Curso de Verão 2018 - Tópicos de Álgebra Linear - Lista 1

8 de janeiro de 2018

1. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Prove as seguintes propriedades:
   (a) O elemento neutro 0_V é único;
   (b) Para cada $u \in V$, $-u$ é único;
   (c) $0 \odot u = 0_V$;
   (d) $\alpha \odot 0_V = 0_V$;
   (e) $(-\alpha) \odot u = -(\alpha \odot u) = \alpha \odot (-u)$;
   (f) se $\alpha \odot u = 0_V$, então $\alpha = 0$ ou $u = 0_V$;
   (g) se $\alpha \odot u = \alpha \odot v$ e $\alpha \neq 0$, então $u = v$;
   (h) se $\alpha \odot u = \beta \odot u$ e $u \neq 0_V$, então $\alpha = \beta$.
2. Verifique se o conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, munido das operações:
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$$
é um espaço vetorial real.
3. Seja V um $\mathbb{K}$ espaço vetorial.
   (a) Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Prove que $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V *se, e somente se,* $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.
   (b) Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subespaços de V com a seguinte propriedade: *dados* $W_1, W_2 \in \mathcal{C}$, *então existe* $W_3 \in \mathcal{C}$ *tal que* $W_1 \cup W_2 \subseteq W_3$. Prove que $\bigcup_{W \in \mathcal{C}} W$ é subespaço de V.
   (c) Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de V tais que $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3$ e $W_1 + W_2 = W_1 + W_3$. Mostre que $W_2 \subseteq W_3$ se, e somente se, $W_3 \subseteq W_2$.
4. Seja $n \geq 3$ um número inteiro. Determine quais dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$?
   (a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 > 0\}$;
   (b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_3 = 2x_1 + 4x_2\}$;
   (c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_3 = x_1^2\}$;
   (d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$;
   (e) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 \text{ é racional}\}$.
5. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $n \geq 2$ um inteiro e $M_n(\mathbb{K})$ o espaço das $n \times n$ matrizes sobre $\mathbb{K}$. Determine quais dos seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{K})$ são subespaços de $M_n(\mathbb{K})$?
   (a) $\{A \in M_n(\mathbb{K}) : A \text{ é inversível}\}$;

(b) $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \,:\, A$ não é inversível$\}$;

(c) $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \,:\, AB = BA\}$, onde $B \in M_n(\mathbb{K})$ está fixada;

(d) $\{A \in M_n(\mathbb{K}) \,:\, A^2 = A\}$;

6. Mostre que o subconjunto

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) = 0 \right\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

7. Mostre que um subconjunto B de um espaço vetorial V é l.i. se, e somente se, cada subconjunto finito de B é l.i.

8. Seja B um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que B é l.d. se, e somente se, existe $v \in B$ que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $B \setminus \{v\}$.

9. Seja $\{u, v, w\}$ um subconjunto l.i. de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ também é l.i.

10. Determine condições sobre o escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ de tal forma que os vetores $(0, 1, \alpha), (\alpha, 0, 1)$, e $(1 + \alpha, 1, \alpha)$ formem uma base de $\mathbb{C}^3$.

11. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 3.

    (a) Mostre que $B = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é base de V;

    (b) Escreva $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ como combinação linear dos elementos de B.

12. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere no conjunto $V_{\mathbb{C}} = \{(x, y) \,:\, x, y \in V\}$ as seguintes operações de adição e multiplicação por um número complexo:

    - $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V_{\mathbb{C}}$;
    - $(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$, para todos $(x, y) \in V_{\mathbb{C}}$ e todo $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

    (a) Mostre que $V_{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. (O espaço $V_{\mathbb{C}}$ é chamado de *complexificação* de V).

    (b) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ um subconjunto l.i.. Mostre que $\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_n, 0)\}$ e $\{(0, v_1), (0, v_2), \ldots (0, v_n)\}$ são subconjuntos l.i. em $V_{\mathbb{C}}$.

    (c) Mostre que se V tem dimensão n, então $V_{\mathbb{C}}$ tem dimensão n.

13. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão finita de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V. Determine condições necessárias e suficientes sobre U e W para que $dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = dim_{\mathbb{K}}(W)$.

14. Sejam W_1, W_2, W_3 subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V. Determine se a seguinte igualdade é falsa ou verdadeira:

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_2 + W_3) = {} & dim\, W_1 + dim\, W_2 + dim\, W_3 \\ & - dim(W_1 \cap W_2) - dim(W_1 \cap W_2) - dim(W_2 \cap W_3) \\ & + dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \end{aligned}$$

15. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado não nulo e W_1 um subespaço de V. Mostre que existe um subespaço W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$. É tal W_2 único?

16. Considere os seguintes subespaços

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$$

    (a) Determine um conjunto de geradores para o subespaço $U \cap W$.

    (b) Determine um conjunto de geradores para o subespaço $U + W$.

    (c) O subespaço $U + W$ é soma direta? Justifique sua resposta.

17. Seja U o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo elemento $u_1 = (1, 0, 0)$ e W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos elementos $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 1)$. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

18. Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ tais que $dim(U) = 1$, $dim(W) = 2$ e U não está contido em W. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

19. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$$U = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} \text{ e } W = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}.$$

    Mostre que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

20. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Prove que existem subespaços $W_1, \ldots, W_n$ de dimensão 1 tais que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

21. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Prove que

$$dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W + dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

22. Seja $W = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty : x_j \neq 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ salvo um conjunto finito}\}$.

    (a) Mostre que W é um subespaço de $\mathbb{C}^\infty$.

    (b) Prove que $\mathbb{C}^\infty/W$ é de dimensão infinita.

23. Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão infinita V e um subespaço W de V tal que V/W tenha dimensão finita.