

# **Estruturas de Dados**

Cristina Gomes Fernandes

# Matrizes esparsas

A célula usada na representação usual de matrizes esparsas tem os seguintes campos:

- *valor*: guarda o valor da entrada da matriz
- *lin*: guarda o número da linha da entrada
- *col*: guarda o número da coluna da entrada
- *cprox*: aponta para o próximo nesta coluna
- *lprox*: aponta para o próximo nesta linha

Apenas entradas não-nulas devem estar armazenadas. Cada linha e cada coluna é uma lista ligada circular, com cabeça de lista. Na cabeça de lista da linha  $i$ , o campo *lin* guarda  $i$  e o campo *col* guarda  $\infty$ . Na cabeça de lista da coluna  $j$ , o campo *lin* guarda  $\infty$  e o campo *col* guarda  $j$ .

# Inserção em matrizes esparsas

**INSIRA** ( $a, l, c, x$ )

```
1   $t \leftarrow \text{NOVACÉLULA}(x, l, c)$ 
2   $p \leftarrow a$ 
3  enquanto  $\text{lin}(p) \neq l$  faça
4     $p \leftarrow \text{cprox}(p)$ 
5  enquanto  $\text{col}(\text{lprox}(p)) < c$  faça
6     $p \leftarrow \text{lprox}(p)$ 
7  se  $\text{col}(\text{lprox}(p)) \neq c$   $\triangleright$  não há entrada ( $l, c$ )
8    então  $\text{lprox}(t) \leftarrow \text{lprox}(p)$      $\text{lprox}(p) \leftarrow t$ 
9     $p \leftarrow a$ 
10   enquanto  $\text{col}(p) \neq c$  faça
11      $p \leftarrow \text{lprox}(p)$ 
12   enquanto  $\text{lin}(\text{cprox}(p)) < l$  faça
13      $p \leftarrow \text{cprox}(p)$ 
14    $\text{cprox}(t) \leftarrow \text{cprox}(p)$      $\text{cprox}(p) \leftarrow t$ 
```

# Skip Lists

Sedgewick, sec 13.5

# Skip Lists

Sedgewick, sec 13.5

**Skip lists:** aprimoramento sobre listas ligadas.

# Skip Lists

## Sedgewick, sec 13.5

**Skip lists:** aprimoramento sobre listas ligadas.

**Objetivo:**

tornar a **busca em uma lista ligada ordenada** mais eficiente.

# Skip Lists

## Sedgewick, sec 13.5

**Skip lists:** aprimoramento sobre listas ligadas.

**Objetivo:**

tornar a **busca em uma lista ligada ordenada** mais eficiente.

**Ferramenta usada:** aleatoriedade.

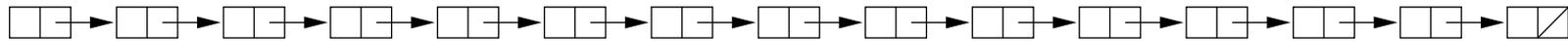
# De onde elas vêm?

Uma lista ligada:

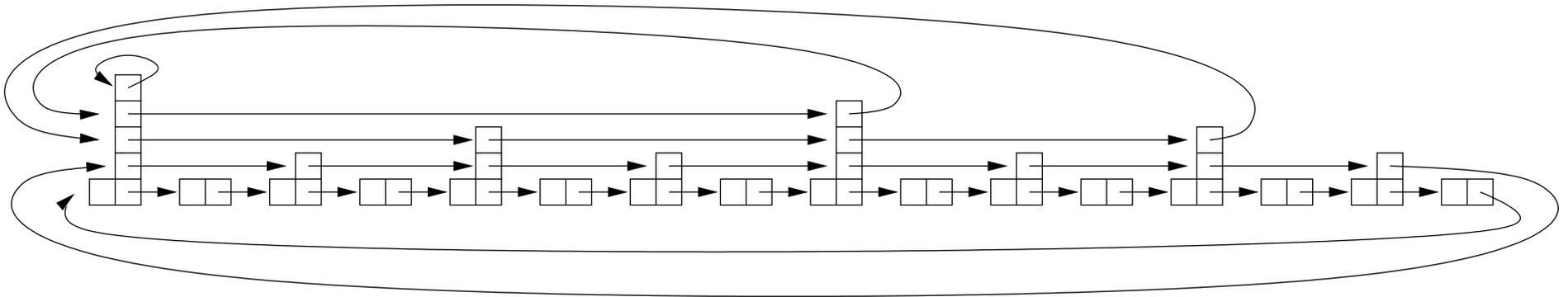


# De onde elas vêm?

Uma lista ligada:



Uma extensão:

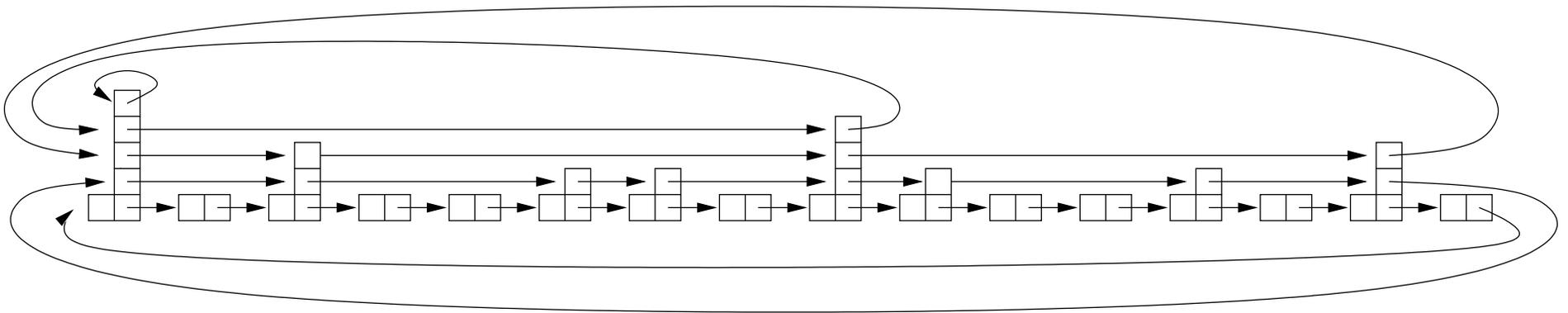


# De onde elas vêm?

Uma lista ligada:

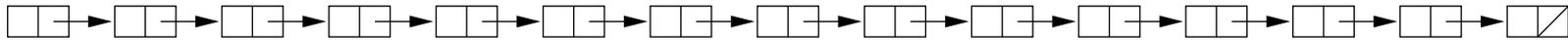


Uma skip list:

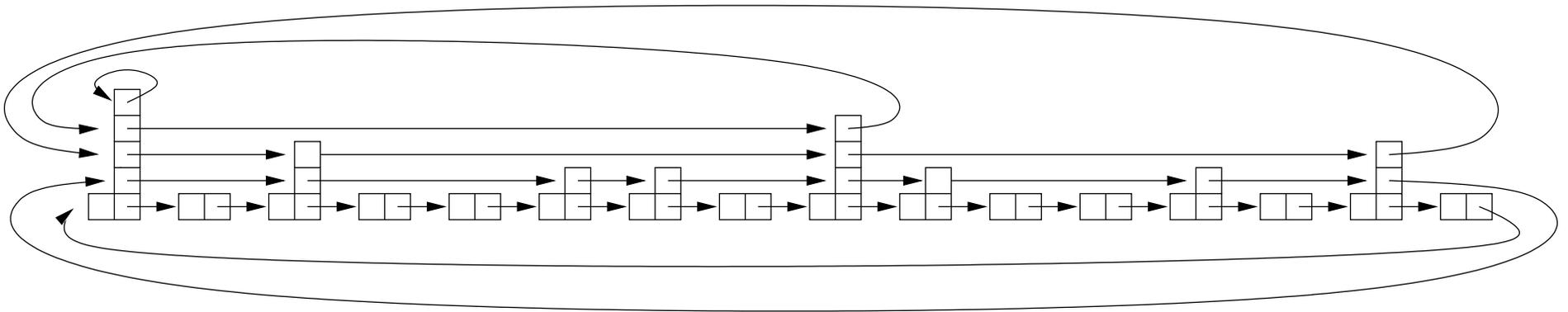


# De onde elas vêm?

Uma lista ligada:



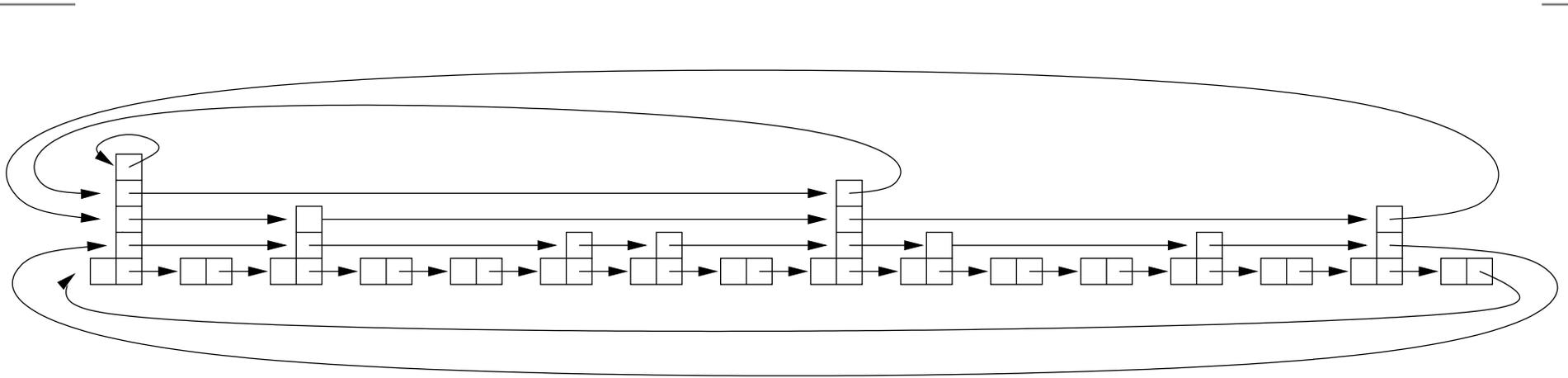
Uma skip list:



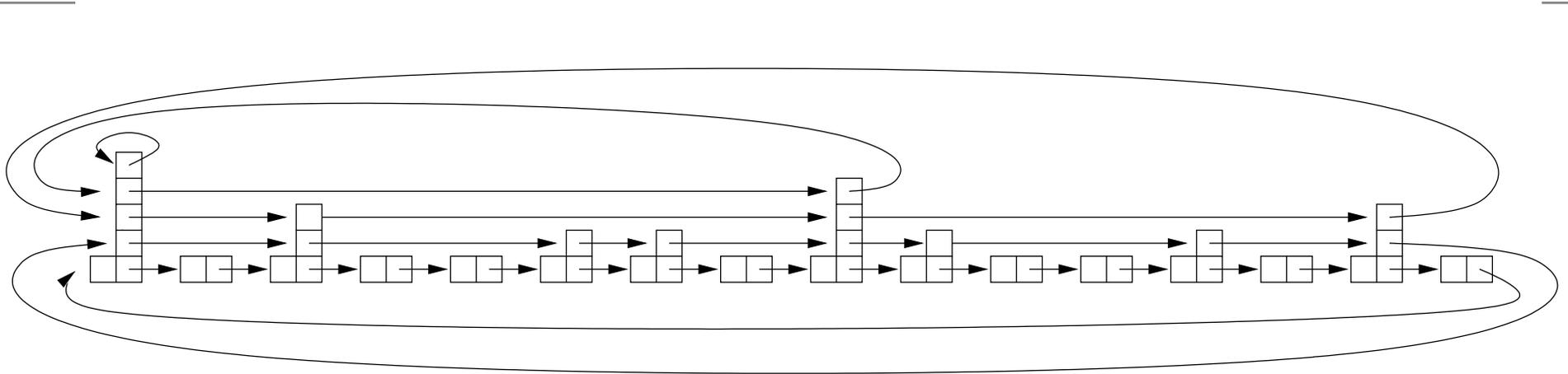
Resultado:

Lista ordenada com busca, inserção e remoção em tempo esperado  $O(\lg n)$ .

# Skip Lists

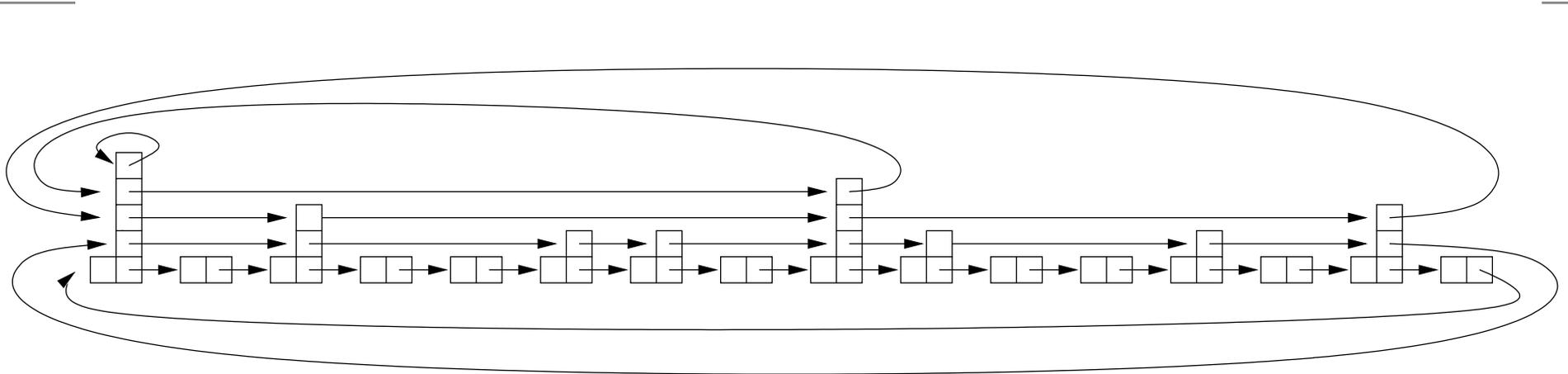


# Skip Lists



**Idéia:** Ao inserir  $x$  na skip list, escolhemos aleatoriamente o número de apontadores de célula que vai conter  $x$ .

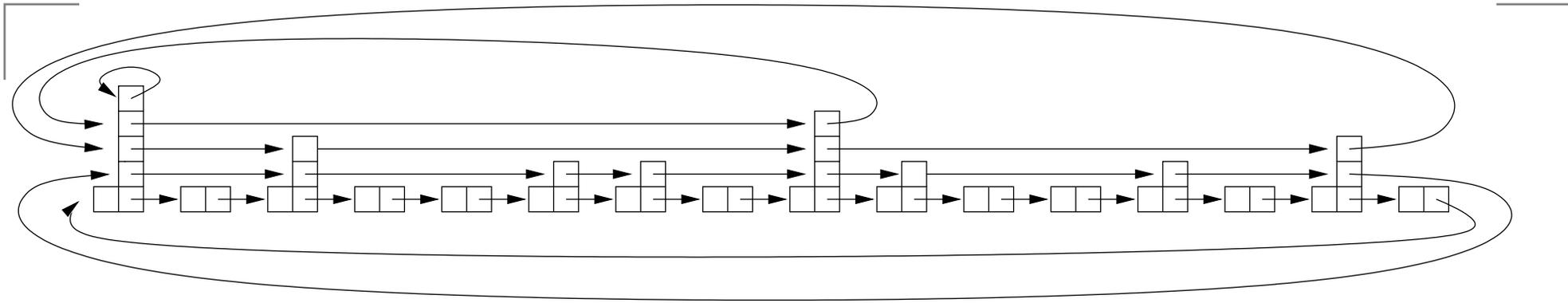
# Skip Lists



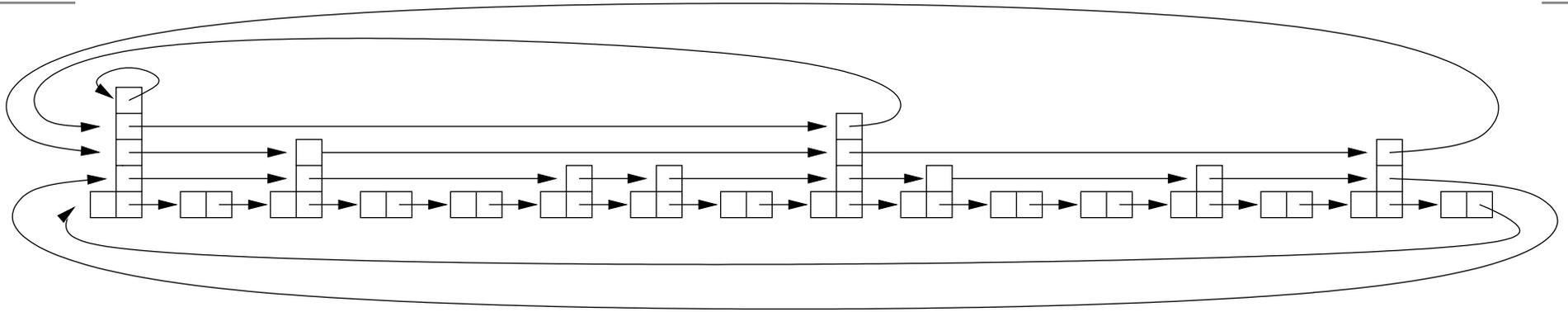
**Idéia:** Ao inserir  $x$  na skip list, **escolhemos aleatoriamente o número de apontadores de célula** que vai conter  $x$ .

A escolha é feita de modo a preservar as proporções de apontadores por nível: se há  $N$  células na skip list, o **número esperado de apontadores** no nível 0 é  $N$ ;  
o número esperado de apontadores no nível 1 é  $N/2$ ;  
o número esperado de apontadores no nível 2 é  $N/4$ ;  
o número esperado de apontadores no nível 3 é  $N/8$ ;  
e assim por diante...

# Skip Lists

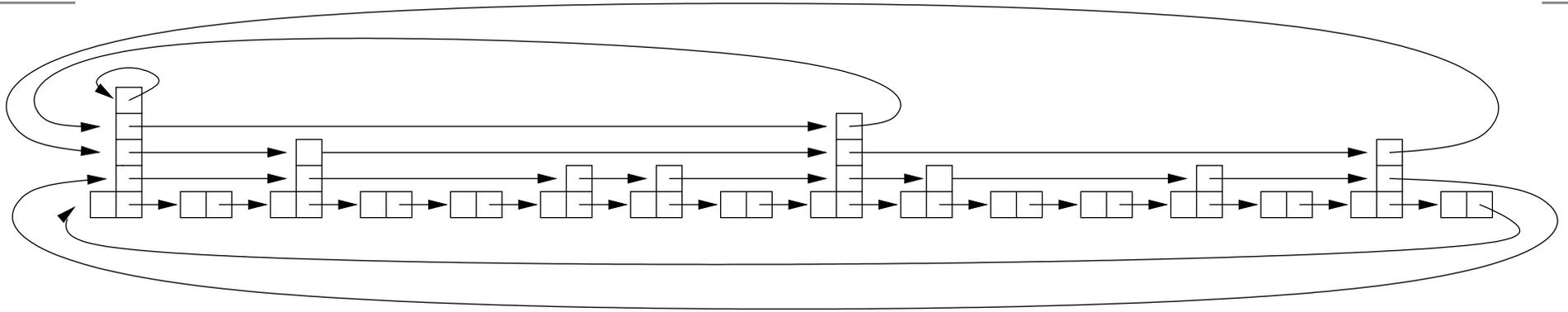


# Skip Lists



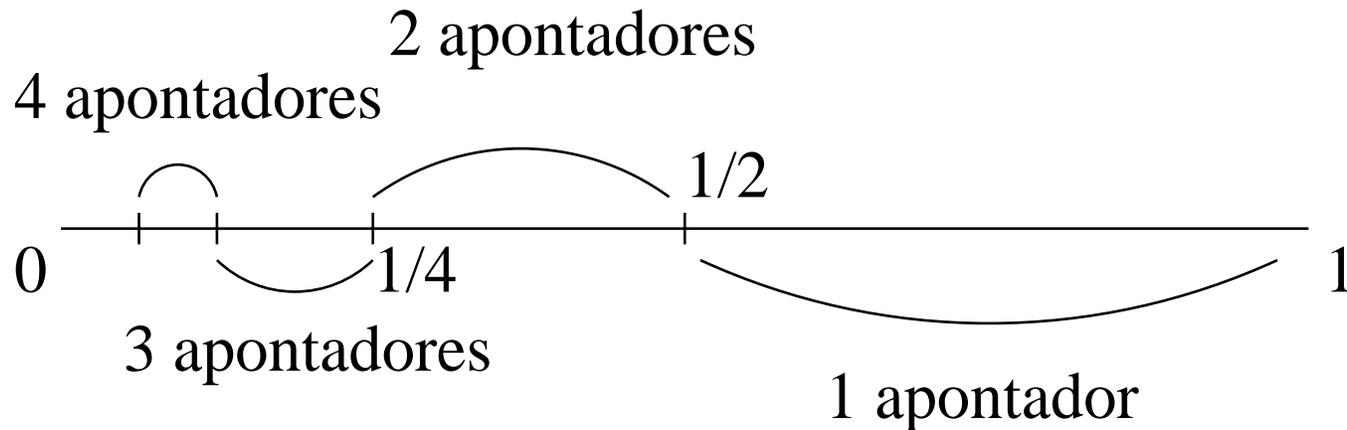
Ou seja, o número de apontadores (**nível**) da nova célula é  $k$ , com probabilidade  $1/2^k$ .

# Skip Lists



Ou seja, o número de apontadores (**nível**) da nova célula é  $k$ , com probabilidade  $1/2^k$ .

$t$ : número aleatório entre 0 e 1



# Escolha do nível

$\lg N_{\max}$  = nível máximo permitido

$\lg N$  = nível máximo existente no momento

NÍVEL-ALEATÓRIO ()

1  $t \leftarrow \text{RAND}()$  ▷ número aleatório em  $[0..1)$

2  $i \leftarrow 0$

3  $j \leftarrow 2$  ▷  $j = 2^{i-1}$

4 **enquanto**  $i < \lg N_{\max}$  **e**  $t \leq 1/j$  **faça**

5      $j \leftarrow 2j$

6      $i \leftarrow i + 1$

7 **se**  $i > \lg N$

8     **então**  $\lg N \leftarrow i$

9 **devolva**  $i$

# Busca numa skip list

BUSCA ( $r, x$ )

1 **devolva** BUSCA-NÍVEL ( $r, x, \lg N$ )

# Busca numa skip list

BUSCA ( $r, x$ )

1 **devolva** BUSCA-NÍVEL ( $r, x, \lg N$ )

BUSCA-NÍVEL ( $p, x, k$ )

1 **se**  $x = chave(prox(p, k))$

2 **devolva**  $prox(p, k)$

3 **se**  $x < chave(prox(p, k))$

4 **se**  $k = 0$

5 **devolva** NIL

6 **senão**

7 **devolva** BUSCA-NÍVEL ( $p, x, k - 1$ )

8 **senão**

9 **devolva** BUSCA-NÍVEL ( $prox(p, k), x, k$ )

# Inserção numa skip list

INSERE ( $r, x$ )

1 INSERE-NÍVEL ( $r, \text{NOVACEL}(x, \text{NÍVEL-ALEATÓRIO}()), \lg N$ )

2  $N \leftarrow N + 1$

# Inserção numa skip list

INSERE ( $r, x$ )

- 1 INSERE-NÍVEL ( $r, \text{NOVACEL}(x, \text{NÍVEL-ALEATÓRIO}()), \lg N$ )
- 2  $N \leftarrow N + 1$

INSERE-NÍVEL ( $p, q, k$ )

- 1  $v \leftarrow \text{chave}(q)$
- 2 **se**  $v < \text{chave}(\text{prox}(p, k))$
- 3     **se**  $k \leq \text{nivel}(q)$
- 4          $\text{prox}(q, k) \leftarrow \text{prox}(p, k)$
- 5          $\text{prox}(p, k) \leftarrow q$
- 5     **se**  $k > 0$
- 6         INSERE-NÍVEL ( $p, q, k - 1$ )
- 7 **senão**
- 8     INSERE-NÍVEL ( $\text{prox}(p, k), q, k$ )

# Exercícios

1. Escreva o `REMOVA` ( $r, x$ ), que remove de uma skip list apontada por  $r$  a célula cujo conteúdo é  $x$ .

# Exercícios

1. Escreva o `REMOVA` ( $r, x$ ), que remove de uma skip list apontada por  $r$  a célula cujo conteúdo é  $x$ .
2. Mostre que o número esperado de apontadores em uma skip list em que ocorreram  $N$  inserções é  $O(N)$ .
  - ▷ ocupa espaço linear

# Exercícios

1. Escreva o `REMOVA` ( $r, x$ ), que remove de uma skip list apontada por  $r$  a célula cujo conteúdo é  $x$ .
2. Mostre que o número esperado de apontadores em uma skip list em que ocorreram  $N$  inserções é  $O(N)$ .  
▷ ocupa espaço linear
3. Mostre que o número esperado de níveis em uma skip list que sofreu  $N$  inserções é  $O(\lg N)$ .

# Exercícios

1. Escreva o `REMOVA` ( $r, x$ ), que remove de uma skip list apontada por  $r$  a célula cujo conteúdo é  $x$ .
2. Mostre que o número esperado de apontadores em uma skip list em que ocorreram  $N$  inserções é  $O(N)$ .  
▷ ocupa espaço linear
3. Mostre que o número esperado de níveis em uma skip list que sofreu  $N$  inserções é  $O(\lg N)$ .
4. Mostre que o número esperado de elementos no nível  $i - 1$  entre dois elementos consecutivos do nível  $i$  é dois.

# Exercícios

1. Escreva o `REMOVA` ( $r, x$ ), que remove de uma skip list apontada por  $r$  a célula cujo conteúdo é  $x$ .
2. Mostre que o número esperado de apontadores em uma skip list em que ocorreram  $N$  inserções é  $O(N)$ .  
▷ ocupa espaço linear
3. Mostre que o número esperado de níveis em uma skip list que sofreu  $N$  inserções é  $O(\lg N)$ .
4. Mostre que o número esperado de elementos no nível  $i - 1$  entre dois elementos consecutivos do nível  $i$  é dois.
5. Conclua que o número esperado de comparações em uma busca, inserção ou remoção é  $O(\lg N)$ .