Estruturas de Dados

Cristina Gomes Fernandes

ABB ótima

Suponha que tenhamos um conjunto fixo de chaves e que queremos repetidamente fazer testes de pertinência neste conjunto, ou seja, buscas.

Que estrutura de dados podemos usar neste caso?

ABB ótima

Suponha que tenhamos um conjunto fixo de chaves e que queremos repetidamente fazer testes de pertinência neste conjunto, ou seja, buscas.

Que estrutura de dados podemos usar neste caso?

Se não soubermos nada sobre as buscas que faremos, um vetor ordenado e busca binária podem ser uma boa opção.

ABB ótima

Suponha que tenhamos um conjunto fixo de chaves e que queremos repetidamente fazer testes de pertinência neste conjunto, ou seja, buscas.

Que estrutura de dados podemos usar neste caso?

Se não soubermos nada sobre as buscas que faremos, um vetor ordenado e busca binária podem ser uma boa opção.

No entanto, há situações em que temos alguma informação estatística sobre as buscas. Por exemplo, podemos ter a freqüência estimada de busca de cada chave.

Como podemos levar essa informação extra em conta para derivar uma ED melhor do que o vetor ordenado com a busca binária?

Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7$ $\quad p_2 = 2/7$ $\quad p_3 = 4/7$

Qual é o número esperado de comparações que seriam feitas em um vetor ordenado com a busca binária?

Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7$ $\quad p_2 = 2/7$ $\quad p_3 = 4/7$

Qual é o número esperado de comparações que seriam feitas em um vetor ordenado com a busca binária?

$$\frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 1 + \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{12}{7}$$

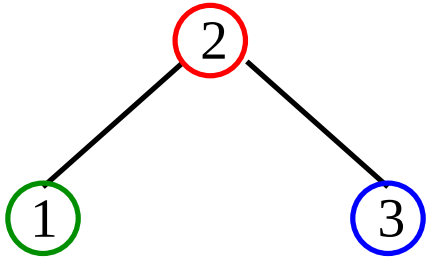
Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7$ $\quad p_2 = 2/7$ $\quad p_3 = 4/7$

Qual é o número esperado de comparações que seriam feitas em um vetor ordenado com a busca binária?

$$\frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 1 + \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{12}{7}$$

Isso é também o número esperado de comparações feitas na seguinte ABB:



Exemplo

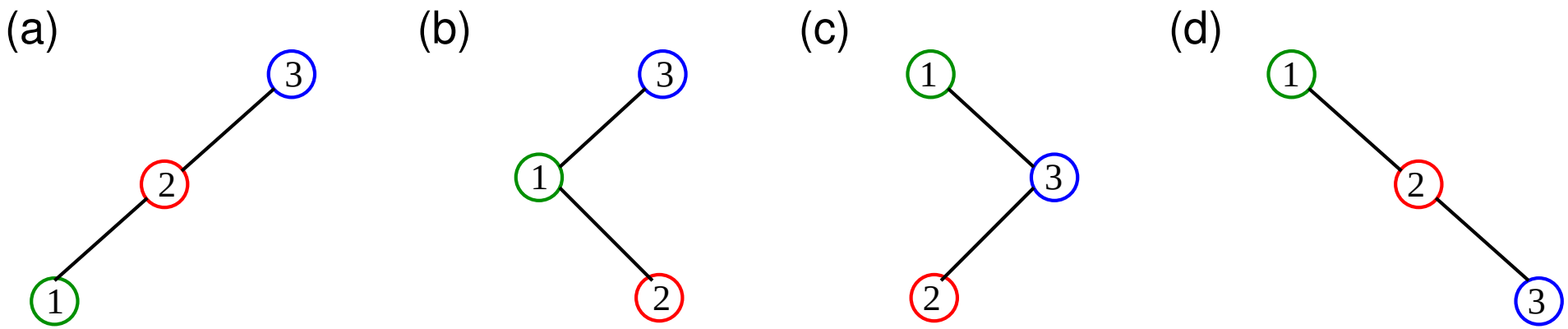
$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7$ $\quad p_2 = 2/7$ $\quad p_3 = 4/7$

Uma outra ABB não seria melhor, dadas as freqüências?

Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7$ $\quad p_2 = 2/7$ $\quad p_3 = 4/7$

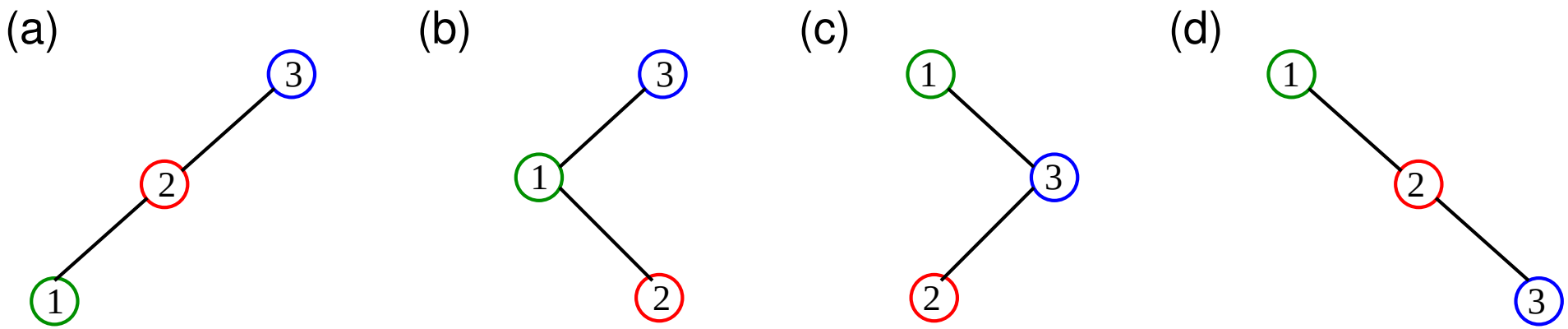
Uma outra ABB não seria melhor, dadas as freqüências?



Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7 \quad p_2 = 2/7 \quad p_3 = 4/7$

Uma outra ABB não seria melhor, dadas as freqüências?



(a) $\frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{11}{7}$

(b) $\frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{12}{7}$

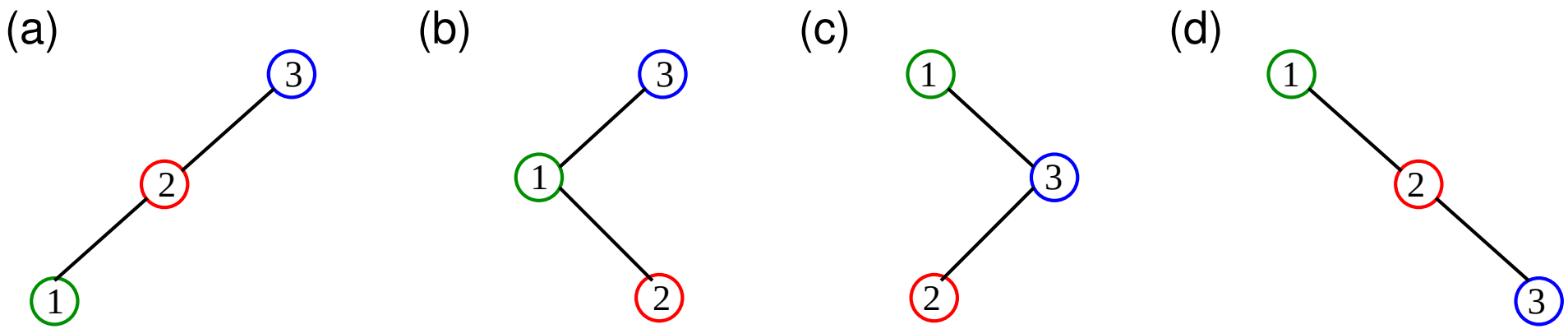
(c) $\frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{15}{7}$

(d) $\frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{17}{7}$

Exemplo

$S = \{1, 2, 3\}$ $\quad p_1 = 1/7 \quad p_2 = 2/7 \quad p_3 = 4/7$

Uma outra ABB não seria melhor, dadas as freqüências?



(a) $\frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{11}{7}$ $\longleftarrow$ ABB ótima neste caso!

(b) $\frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{12}{7}$

(c) $\frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{4}{7} \cdot 2 = \frac{15}{7}$

(d) $\frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{17}{7}$

ABB ótima

Problema: Dado n e uma distribuição de probabilidades (d.p.) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, encontrar uma ABB ótima para esta d.p..

ABB ótima

Problema: Dado n e uma distribuição de probabilidades (d.p.) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, encontrar uma ABB ótima para esta d.p..

Ou seja, encontrar uma ABB para as chaves $1, 2, \ldots, n$ cujo número esperado de comparações para uma busca com d.p. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é mínimo.

ABB ótima

Problema: Dado n e uma distribuição de probabilidades (d.p.) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, encontrar uma ABB ótima para esta d.p..

Ou seja, encontrar uma ABB para as chaves $1, 2, \ldots, n$ cujo número esperado de comparações para uma busca com d.p. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é mínimo.

Seja $e[i, j]$ o número esperado mínimo de comparações para uma busca em uma ABB com as chaves $i, i+1, \ldots, j$, onde a busca segue a d.p. $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$.

Vale a seguinte recorrência para $e[i, j]$.

ABB ótima

Vale a seguinte recorrência para $e[i,j]$:

$$e[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{e[i,k-1] + e[k+1,j]\} + w[i,j] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

onde

$$w[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ w[i,j-1] + p_j & \text{se } i \le j, \end{cases}$$

ou seja, $w[i,j] = \sum_{k=i}^{j} p_k$.

Podemos então usar PD para calcular $e[i,j]$ e $w[i,j]$.

ABB ótima

```
ABBÓTIMA (p, n)
para i ← 1 até n + 1 faça
    w[i, i − 1] ← 0
    e[i, i − 1] ← 0
para ℓ ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n − ℓ + 1 faça
        j ← i + ℓ − 1
        w[i, j] ← w[i, j − 1] + p[j]
        e[i, j] ← ∞
        para k ← i até j faça
            aux ← e[i, k − 1] + e[k + 1, j] + w[i, j]
            se aux < e[i, j]
                então e[i, j] ← aux
                      r[i, j] ← k
devolva (e, r)
```

ABB ótima

Exercício: Escreva uma rotina MontaABB(r, n) que receba como parâmetro a matriz $r_{n \times n}$ devolvida pelo ABBÓTIMA(p, n) e devolva um apontador para a raiz de uma ABB ótima para $p[1 \mathinner{..} n]$.

ABB ótima: caso geral

No que segue, considere que
a 0-ésima chave é $-\infty$ e que a $(n+1)$-ésima chave é $+\infty$.

Entrada do caso geral: d.p. $q_0, p_1, q_1, \ldots, q_{n-1}, p_n, q_n$, onde
p_i é a probabilidade de se buscar a i-ésima chave, e
q_i é a probabilidade de se fazer uma busca mal-sucedida por um x entre a i-ésima e a $(i+1)$-ésima chave.

Saída do caso geral: ABB ótima, levando em consideração na esperança as buscas mal-sucedidas.

Exercício: Resolva o caso geral da ABB ótima.

Dica: Redefina $e[i,j]$ como o valor de uma ABB ótima para buscas de valores estritamente maiores que a chave $i-1$ e estritamente menores que a chave $i+1$.
Ajuste a recorrência e o algoritmo adequadamente para essa nova definição.