

GEOMETRIA COMPUTACIONAL

CRISTINA GOMES FERNANDES

Departamento de Ciência da Computação
Primeiro semestre de 2022

1. INTRODUÇÃO

A procura por algoritmos para resolver problemas geométricos vem desde a época da antiguidade. Algumas motivações práticas para a busca por tais algoritmos foram os impostos sobre o uso da terra e construções de edificações.

São bem-conhecidas as construções geométricas de Euclides, que usavam como instrumentos régua e compasso e consistiam de algumas operações que podiam ser realizadas com esses instrumentos. Um problema clássico de construção geométrica através de régua e compasso é o chamado *Problema de Apollonius* (cerca de 200 A.C.), no qual três circunferências arbitrárias no plano eram dadas e pedia-se uma quarta circunferência que fosse tangente às três circunferências dadas. Euclides apresentou um algoritmo que resolve este problema.

Dentre todos os problemas de construção geométrica usando as operações de Euclides, um que atraiu grande atenção foi o problema da construção de um polígono regular de n lados. Para $n = 3, 4, 5, 6$, a solução é conhecida desde a antiguidade. Entretanto, para heptágonos regulares, o problema não tem solução: aos 17 anos, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrou que *não* existe um algoritmo que, usando somente as operações de Euclides, constrói um heptágono regular. Gauss na realidade mostrou que existe um algoritmo para construir um polígono regular com p lados, para p primo, se e somente se p é um número de Fermat, ou seja, é da forma $2^{2^k} + 1$ para algum inteiro k não-negativo.

Em 1902, Emile Lemoine introduziu uma medida de *simplicidade* para os algoritmos que usam as operações de Euclides [?]. Esta medida é baseada no número destas operações realizadas pelo algoritmo. Para Lemoine, o algoritmo mais simples é aquele que faz menos operações. A solução de Euclides para o Problema de Apollonius requer 508 operações enquanto que um algoritmo proposto por Lemoine requer menos de duzentas. Estava portanto introduzido em geometria um conceito que é, pelo menos em essência, o que hoje chamamos de complexidade de um algoritmo.

Em geometria computacional estamos interessados em projetar algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos. Pelo que foi exposto acima, vemos que não é algo novo. A diferença é que as construções usam um instrumento diferente da régua e do compasso: usam um computador. Um pouco mais precisamente, em geometria computacional, estamos interessados em encontrar algoritmos eficientes, ou procedimentos computacionais, para resolver problemas geométricos. Muitos desses problemas têm sua origem em outras áreas, como computação gráfica, robótica e processamento de imagens. No projeto de tais algoritmos, são comumente utilizados resultados de geometria euclidiana, combinatória, teoria dos grafos, estruturas de dados e análise de algoritmos.

Geometria computacional é um termo usado por diversos grupos. Entretanto, o termo tem sido mais utilizado para descrever a subárea da teoria de algoritmos que trata do projeto e análise de algoritmos eficientes para problemas envolvendo objetos geométricos, principalmente, em espaços de dimensão 2, 3 ou, de uma maneira mais geral, de dimensão fixa. As entradas para os problemas são primordialmente objetos simples: pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, planos e poliedros. É neste sentido que empregamos o termo geometria computacional neste curso.

Se a tese de doutorado de Michael Ian Shamos (1978) for aceita como o início da geometria computacional, pelo menos da maneira como ela será tratada aqui, então a área tem apenas cerca de 35 anos. Ela desenvolveu-se rapidamente nas décadas de 80 e 90, e continua a se desenvolver. Por causa da área a partir da qual cresceu, algoritmos combinatórios, geometria computacional tem sempre enfatizado problemas de natureza matemática discreta. Na maioria dos problemas em geometria computacional, as instâncias são um conjunto finito de pontos ou de outros objetos

geométricos, e a resposta é algum tipo de estrutura descrita por um conjunto finito de pontos ou segmentos de retas.

De acordo com Joseph O'Rourke, nem todos os problemas em aberto em geometria computacional são necessariamente difíceis; alguns estão simplesmente esperando a devida atenção [?]. Este pode ser um bom motivo para investigarmos problemas desta área.

2. OBJETIVOS DA DISCIPLINA

O objetivo desta disciplina é apresentar técnicas, algoritmos e estruturas de dados empregados no projeto e análise de algoritmos eficientes para resolução de problemas geométricos. Pretendemos mostrar estratégias clássicas de solução de problemas geométricos, assim como possivelmente apresentar temas de pesquisa.

3. PRÉ-REQUISITOS

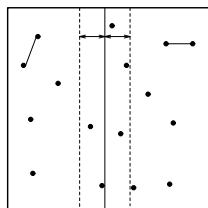
Para esta disciplina, os pré-requisitos são: conhecimento de técnicas básicas de projeto de algoritmos, como divisão-e-conquista, algoritmo guloso, programação dinâmica; notação e técnicas básicas de análise de algoritmos, como notação assintótica, resolução de somatórios e recorrências; e conhecimento de estruturas de dados básicas, como hashing, pilhas, filas, e árvores binárias de busca.

4. TÓPICOS QUE PRETENDEMOS COBRIR

Alguns dos tópicos que pretendemos cobrir nesta disciplina são: problemas de proximidade; fechos convexos; partições convexas; busca geométrica; e problemas de intersecção.

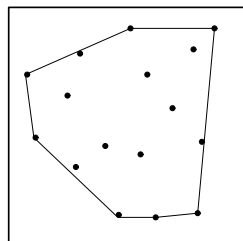
Abaixo encontra-se uma breve descrição de alguns problemas que estudaremos nesta disciplina.

Problema do par mais próximo (closest pair problem)



Dados n pontos, queremos encontrar dois deles que estejam à distância mínima. Uma aplicação prática deste problema é em controle de tráfego aéreo: os dois aviões que estão em maior perigo de colisão são aqueles que estão mais próximos. Este problema pode ser resolvido facilmente em $O(dn^2)$, onde d é a dimensão do espaço. O problema do par mais próximo pode ser resolvido por um algoritmo de divisão e conquista em tempo $O(dn \log n)$ (cf. Seção 33.4 do CLRS e Capítulo 5 de Preparata e Shamos [?]).

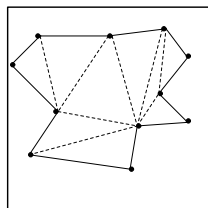
Fecho convexo de um conjunto de pontos



Convexidade é uma propriedade geométrica bastante importante. Um conjunto de pontos é *convexo* se, para cada par de pontos no conjunto, o segmento de reta entre eles está inteiramente contido no conjunto. Segundo O'Rourke (cf. O'Rourke [?], pg. 80) talvez o primeiro artigo na área de geometria computacional tenha sido sobre fechos convexos. O Problema do Fecho Convexo consiste em, dados n pontos, encontrar o fecho convexo desses pontos. Uma das aplicações práticas deste problema se encontra em robótica. Se o fecho convexo de um robô não colide com obstáculos então o robô também não colide.

Nos anos 60 uma aplicação da Bell Labs necessitava computar o fecho convexo de aproximadamente 10.000 pontos no plano e os algoritmos de complexidade de tempo $O(n^2)$ foram considerados muito lentos. Tendo essa aplicação como motivação, no começo dos anos 70, Graham [?] projetou o primeiro algoritmo de complexidade de tempo $O(n \log n)$. O fecho convexo também pode ser construído em $O(n \log n)$ por um algoritmo de divisão-e-conquista (cf. Capítulo 3 de Preparata e Shamos [?]).

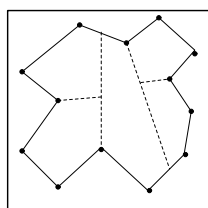
Triangularização de polígonos



O interesse aqui é particionar um certo ‘domínio complexo’ em uma coleção de objetos ‘simples’. A região mais simples na qual podemos decompor um objeto planar é um triângulo (um tetraedro em 3-d e um ‘simplex’ em geral). Dado um polígono P , queremos adicionar a P o maior número possível de diagonais que não se cruzem de tal forma que o interior de P fique particionado em triângulos. Chazelle [?] projetou um algoritmo linear para este problema.

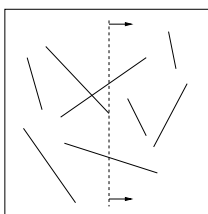
Um algoritmo para triangularizar polígonos pode ser utilizado em problemas do tipo *Art Gallery* (cf. O’Rourke [?]). Imagine que as salas de uma galeria de arte formem um polígono. Considerando que cada guarda fica parado em um local da galeria, qual é o menor número de guardas que são necessários para tomar conta das salas?

Partição de polígonos



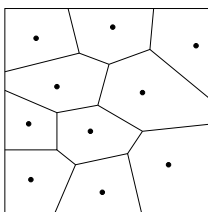
Além de algoritmos eficientes para particionar um polígono em triângulos, também são de interesse algoritmos que particionem um polígono em (digamos) polígonos monótonos, trapezóides e polígonos convexas. Uma motivação para particionar um polígono em polígonos convexas é o reconhecimento de caracteres: um caractere pode ser representado como um polígono particionado em partes convexas.

Intersecções



Um dos problemas geométricos mais básicos é o de determinar quando dois objetos se intersectam. A determinação se dois objetos complexos se intersectam é freqüentemente reduzida ao problema de determinar quais pares de entidades primitivas (e.g., segmentos de retas) se intersectam. Veremos algoritmos eficientes para computar a intersecção de um conjunto de segmentos de retas.

Diagramas de Voronoi

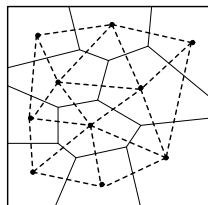


Dado um conjunto S de n pontos no plano, queremos determinar para cada ponto p em S qual é a região $V(p)$ dos pontos do plano que estão mais perto de p do que de qualquer outro ponto em S . As n regiões $V(p)$ formam uma partição do plano chamada de *Diagrama de Voronoi*.

Imagine uma vasta floresta contendo vários pontos de observação de incêndio. O conjunto das árvores que estão mais próximas de um determinado posto p determina a região $V(p)$ das árvores que são de responsabilidade do ponto p .

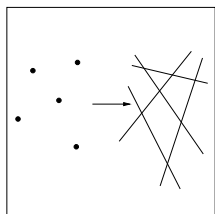
O diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos pode ser construído em $O(n \log n)$ por um (complicado) algoritmo de divisão-e-conquista (cf. Shamos e Hoey [?]). Em 1985, Fortune [?] projetou um algoritmo de varredura (*plane-sweep algorithm*) muito elegante e simples cuja complexidade de tempo é $O(n \log n)$.

Triangularização de Delaunay



O dual geométrico (usando retas) de um diagrama de Voronoi para um conjunto S de pontos forma uma triangularização do conjunto S , chamada de *triangularização de Delaunay*. A triangularização de Delaunay tem várias propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, ela contém todas as “árvores geradoras mínimas” de S (cf. Capítulo 6 de Preparata e Shamos [?]).

Arranjos e dualidade



Talvez uma das estruturas matemáticas mais importantes em geometria computacional seja um arranjo de retas (e em geral, arranjos de curvas e superfícies). Dadas n retas no plano, um arranjo é simplesmente o grafo que tem como vértices as intersecções das retas e como arestas os segmentos de retas ligando estas intersecções. Veremos que uma tal estrutura pode ser construída em tempo $O(n^2)$. A razão para esta estrutura ser tão importante é que muitos problemas envolvendo pontos podem ser transformados em problemas envolvendo retas através do método de dualidade. Por exemplo, suponha que

desejemos determinar se existem três pontos colineares entre um conjunto de n pontos no plano. Isto pode ser determinado por um algoritmo do tipo força-bruta em tempo $O(n^3)$. Entretanto, se os pontos são dualizados em retas, então (como veremos mais tarde neste semestre) a questão é reduzida a decidir se existe um vértice de grau pelo menos 4 neste arranjo de retas.

5. GEOMETRIA COMPUTACIONAL NA INTERNET

Existe **muito** material **muito** bom de Geometria Computacional na Internet.

Durante o andamento da disciplina mantereí na página

<http://www.ime.usp.br/~cris/geocomp/>,

informação sobre Geometria Computacional. Durante o andamento da disciplina esta página deverá ser atualizada e expandida. Se você encontrar algum sítio de Geometria Computacional (ou de qualquer outra coisa) que você ache interessante, por favor, não deixe de me avisar.

6. MONITORIA

O monitor desta disciplina será o Guillermo Enrique Junchaya Heredia.

7. BIBLIOGRAFIA

Para preparar as aulas desta disciplina, usarei principalmente as notas de aula do professor José Coelho de Pina [?], o capítulo *Convite à Geometria Computacional* de [?], os livros de O'Rourke [?] e de Berg, van Kreveld, Overmars, e Schwarzkopf [?].

O livro de Preparata e Shamos [?] é um texto clássico em geometria computacional (foi primeiro livro sobre o assunto) que coloca bastante ênfase na análise dos algoritmos apresentados. Este livro contém basicamente todos os tópicos que serão tratados nesta disciplina. Outros livros que também podem ser encontrados na biblioteca são: Edelsbrunner [?] (“The art of counting and estimating is at heart of combinatorics—and it is a necessary prerequisite for analyzing algorithms . . .”; copiado da introdução da Parte I deste livro); Figueiredo e Carvalho [?] (um livro muito claro e introdutório); e Rezende e Stolfi [?] (descreve várias técnicas e algoritmos em geometria computacional). Outros livros sobre geometria computacional são: Laszlo [?] (um livro que descreve vários algoritmos em geometria computacional e apresenta trechos de implementações em C++); Mulmuley [?] (como o próprio título diz, este livro trata de algoritmos aleatórios em geometria computacional). Cormen, Leiserson, Rivest & Stein [?] é um livro enciclopédico sobre análise de algoritmos que trata de geometria computacional no Capítulo 33. Há ainda um livro recente de Devadoss e O'Rourke que inclui tópicos mais recentes e sofisticados.

Na biblioteca também podem ser encontrados alguns surveys sobre geometria computacional. Veja por exemplo: Chazelle [?]; Graham e Yao [?]; Guibas e Stolfi [?]; e Yao [?].

Artigos em geometria computacional podem ser encontrados em várias revistas, incluindo *ACM Transactions on Graphics*, *Algorithmica*, *Journal of Algorithms*, *Journal of the ACM*, e *SIAM Journal on Computing*. Existem também revistas particularmente dedicadas à área, como por exemplo *Discrete and Computational Geometry*, *International Journal of Computational Geometry & Applications*, *Computational Geometry, Theory and Applications* e o mais recente *Journal of Computational Geometry*.

A principal conferência da área é o *ACM Annual Symposium on Computational Geometry*. Além de conferências especializadas na área, várias outras conferências apresentam trabalhos em geometria computacional.

8. IMPLEMENTAÇÕES DE ALGORITMOS

Algumas das animações dos algoritmos que vocês verão durante as aulas foram feitas pelos alunos Alexandre Albano, Alexis Sakurai Landgraf Carvalho, Ana Luiza Basalo, Caetano Jimenez Carezato, Caio Braz, Camila Mari Matsubara, César Gamboa Machado, Gustavo Katague, Henrique Morimitsu, Luiz Corte Real, Marcelo Hashimoto, Rafael Beirigo, entre outros, em um oferecimento passado da disciplina Geometria Computacional.

9. CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO

A nota final na disciplina será baseada em três componentes:

Listas de exercícios: Pretendo disponibilizar várias listas de exercícios durante o semestre e alguns dos exercícios deverão ser entregues para correção.

Tarefas: Teremos algumas tarefas de implementação atribuídas durante o decorrer da disciplina, geralmente tiradas de sites de programação competitiva.

Projetos: Haverá cinco projetos de programação que consistirão na implementação de um ou mais algoritmos para um problema. É esperado que você entregue, junto com cada projeto, um relatório, em L^AT_EX ou HTML, de no máximo duas páginas, sobre o problema e os algoritmos implementados. Haverá duas ou três possibilidades de escolha para cada projeto. Cada projeto deverá ser feito em Python, como uma opção nova de uma implementação inicialmente feita pelo aluno Alexis, e que será apresentada nas aulas.

10. OUTRAS INFORMAÇÕES

A minha sala é a 107-C e meu endereço eletrônico é `cris@ime.usp.br`. Mantereí uma página de MAC0331/MAC5747 no URL

`http://www.ime.usp.br/~cris/geocomp/`.

Nessa página, colocarei o material da disciplina (como, por exemplo, listas de exercícios, notas de aula, programação das aulas, etc). Por favor, consulte esta página regularmente.

Temos uma entrada para a disciplina no sistema E-Disciplinas, onde há uma lista de discussão que tem como objetivo servir de suporte para a disciplina. Recomenda-se que você mande para esta lista suas dúvidas, sugestões, críticas e observações sobre o andamento da disciplina. É nesse sistema que os alunos entregaram seus projetos, e possivelmente suas listas de exercícios.

Sinta-se a vontade para me escrever e fazer perguntas ou comentários sobre a disciplina.

Outros professores do departamento que estudam geometria computacional são:

- Carlos Eduardo Ferreira (sala 108-C, `cef@ime.usp.br`)
`http://www.ime.usp.br/~cef/`
- José Coelho de Pina (sala 4-C, `jose@ime.usp.br`)
`http://www.ime.usp.br/~coelho/`.

Se você tiver interesse em Geometria Discreta, converse com o professor:

- Sinai Robins (sala 102-C, `srobin@ime.usp.br`)
`https://sites.google.com/site/sinairobins/home/`

Se você quer saber o que é Processamento de Imagens, Visão Computacional, Computação Gráfica, etc, então converse com os professores:

- Carlos Hitoshi Morimoto (sala 209-C, hitoshi@ime.usp.br)
<http://www.ime.usp.br/~hitoshi/>
- Nina S. T. Hirata (sala 6-C, nina@ime.usp.br)
<http://www.ime.usp.br/~nina/>
- Roberto Marcondes Cesar Júnior (sala 297-A, cesar@ime.usp.br)
<http://www.ime.usp.br/~cesar/>

REFERÊNCIAS

1. B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete and Computational Geometry **6** (1991), 485–524.
2. ———, *Computational geometry: A retrospective*, Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Montréal, Québec, Canada), The ACM Special Interest Group for Algorithms and Computation Theory, May 1994, pp. 75–94.
3. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to algorithms*, 2. ed., MIT Press, 2001.
4. M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational geometry, algorithms and applications*, Springer Verlag, 1997, second edition, 2000.
5. J.C. de Pina, *Geometria computacional*, Notas de aula, 2000.
6. P.J. de Rezende and J. Stolfi, *Fundamentos de geometria computacional*, IX Escola de Computação, 1994.
7. H. Edelsbrunner, *Algorithms in combinatorial geometry*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, no. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987, QA758 E21a.
8. C.G. Fernandes and J.C. de Pina, *Convite à geometria computacional*, Jornadas de Atualização em Informática da SBC, ch. 7, Ed. PUC-Rio, 2009, acessível em <http://www.ime.usp.br/~cris/jai2009/>.
9. L.H. Figueiredo and P.C.P. Carvalho, *Introdução à geometria computacional*, 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991, QA758 F475i.
10. S. Fortune, *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams*, Algorithmica **2** (1987), 153–174.
11. R.L. Graham, *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, Information Processing Letters **1** (1972), 132–133.
12. R.L. Graham and F. Yao, *A whirlwind tour of computational geometry*, The American Mathematical Monthly **97** (1990), no. 8, 687–701.
13. L.J. Guibas and J. Stolfi, *Ruler, compass and computer: The design and analysis of geometric algorithms*, Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD (R.A. Earnshaw, ed.), NATO ASI Series, vol. F40, Springer-Verlag, 1988, pp. 111–165.
14. M.J. Laszlo, *Computational geometry and computer graphics in C++*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
15. K. Mulmuley, *Computational geometry: An introduction through randomized algorithms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
16. J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.
17. ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.
18. F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational geometry: An introduction*, Texts and Monographs in Computer Science, Springer-Verlag, New York, 1985, QA758 P927c.
19. M.I. Shamos and D. Hoey, *Closest point problems*, Proc. 16th Annual IEEE Symposium in Foundations of Computer Science, 1975, pp. 151–162.
20. F.F. Yao, *Computational geometry*, Handbook of Theoretical Computer Science (J. van Leeuwen, ed.), vol. A, The MIT Press/Elsevier, Amsterdam, 1990, QA810.C3 V259h v.1A, pp. 343–389.