RELATÓRIO DE ATIVIDADES

relativo ao período de novembro de 2000 a dezembro de 2001 do projeto CAPES-DAAD-PROBRAL 089/99
"Teoria dos Grafos: Aspectos Assintóticos e Algorítmicos"

1. Introdução

Este relatório refere-se ao segundo ano do projeto CAPES-DAAD-PROBRAL 089/99 – "Teoria dos Grafos: Aspectos Assintóticos e Algorítmicos", coordenado por Yoshiharu Kohayakawa.

Durante este ano foram realizadas uma missão de trabalho Alemanha/Brasil e duas missões de trabalho Brasil/Alemanha.

Na missão de trabalho Alemanha/Brasil, Dr. Nierhoff visitou o Departamento de Ciência da Computação do IME-USP em novembro de 2000. Na primeira missão de trabalho Brasil/Alemanha, o Professor Yoshiharu Kohayakawa visitou o *Institut für Informatik* da *Humboldt-Universität zu Berlin* de 2 a 16 de julho de 2001. Na segunda missão de trabalho Brasil/Alemanha, a Professora Cristina Gomes Fernandes visitou o *Institut für Informatik* da *Humboldt-Universität zu Berlin* de 11 de agosto a 5 de setembro de 2001.

Na próxima seção relatamos o principal assunto abordado na missão de trabalho do Professor Kohayakawa. Nas seções 3 e 4 discorreremos sobre os principais tópicos abordados durante as missões de trabalho, respectivamente, da Professora Fernandes e do Dr. Nierhoff.

2. Teoria dos Grafos Assintótica

O célebre *Teorema Canônico de Ramsey*, provado por Erdős e Rado em 1950 [5], afirma que se colorirmos as arestas de um grafo completo suficientemente grande então há em nossa coloração um subgrafo grande completo *canonicamente colorido.* Neste contexto existem três colorações canônicas: γ_{const}, que usa a mesma cor em todas as arestas, γ_{inj}, que não usa nenhuma cor mais de uma vez, e $\gamma_<$, na qual duas arestas recebem a mesma cor se e somente se seus elementos $<$-minimais coincidem (para alguma ordem $<$ do conjunto de vértices).

Se nossa coloração usa somente poucas cores no total, então γ_{const} aparece. Isto motiva a seguinte questão. Há uma condição que força as colorações γ_{inj} e $\gamma_<$ a aparecerem? Obviamente uma resposta possível seria requerer que a coloração seja própria (isto é, vértices adjacentes recebem cores diferentes). Mas será que existe uma condição de uma natureza mais global? Bollobás, Kohayakawa e Schelp [2] mostraram que existe um conjunto de colorações canônicas que são ricas em cores, de forma que se nossa coloração não tem a propriedade de que a remoção de uma proporção pequena (que tende a zero) do conjunto de arestas leva a uma coloração com poucas cores, então nossa coloração deve possuir uma destas colorações canônicas em um subgrafo completo grande. Em [2], colorações com essa propriedade são chamadas de *essencialmente infinitas.*

O Teorema Canônico de Ramsey pode ser melhor apreciado quando passamos de colorações de arestas de um grafo completo para partições arbitrárias de k-conjuntos. Neste contexto similarmente almeja-se a prova da existência de estruturas canônicas inevitáveis para colorações essencialmente infinitas de hipergrafos.

Como mencionamos em nosso relatório passado, Bollobás, Kohayakawa e Taraz [3] haviam chegado próximo da generalização do resultado de [2] para hipergrafos, restando apenas algumas dificuldades técnicas a serem resolvidas. Nesta missão de Kohayakawa a Berlim, finalmente obtivemos o resultado final, agora conjuntamente com V. Rödl (Atlanta, EUA), que estava visitando nosso parceito alemão. O que restava provar era basicamente uma versão do teorema canônico de Erdős e Rado para hipergrafos k-partidos, que, na realidade, pode ser de interesse independente.

Além de fecharmos o nosso resultado sobre colorações essencialmente infinitas para hipergrafos, nesta missão trabalhamos com Rödl e Taraz em uma generalização para hipergrafos de um resultado de Clapsadle e Schelp [4], sobre certas colorações de grafos. O resultado que obtivemos e o nosso resultado sobre colorações essencialmente infinitas de hipergrafos aparecerão em um trabalho conjunto de Bollobás, Kohayakawa, Rödl, e Taraz [3].

3. Árvore de Steiner para Grupos

O *Problema da Árvore de Steiner para Grupos* (*Group Steiner Tree* – GST) consiste no seguinte: dados um grafo G, um custo c_e para cada aresta e de G, um inteiro k e conjuntos $g_1, \ldots, g_k$ de vértices de G, encontrar uma árvore em G que contenha pelo menos um vértice de cada g_i e tenha custo mínimo. Um conjunto g_i arbitrário é chamado de *grupo*.

Há uma redução do problema da cobertura mínima por conjuntos para o GST que preserva aproximação. Assim, não só o GST é NP-difícil como, por um resultado de Feige [6] para o problema da cobertura por conjuntos, a existência de uma $(1-\delta)\ln k$-aproximação para o GST implicaria que NP $\subset$ DTIME$(n^{O(\log\log n)})$, onde $n := |V_G|$.

O melhor algoritmo de aproximação conhecido para o GST deve-se a Garg, Konjevod and Ravi [8] e tem uma razão de aproximação de $O(\log n \log\log n \log k)$.

Fernandes e Nierhoff trabalharam nesse problema em busca de uma $O(\log k)$-aproximação. Alguns resultados parciais foram obtidos, que incluem um algoritmo de aproximação que tem chances de ser uma $O(\log k)$-aproximação. A análise do algoritmo ainda não está completa e recentemente alguns obstáculos foram encontrados que talvez exijam que sejam feitas algumas modificações no algoritmo. Espera-se, no entanto, que este trabalho resulte em uma $O(\log k)$-aproximação para o GST.

4. UPS Problem

Durante a visita, Fernandes e Nierhoff deram continuidade ao seu trabalho no *Problema do United Postal Service* (UPS) [7].

Especificamente, buscou-se um algoritmo de aproximação com razão constante para o caso geral do problema, mas não se conseguiu nenhum resultado positivo nesse sentido. A semelhança entre o UPS e o bem-conhecido TSP métrico torna tentadora a idéia de utilizar técnicas de projeto de algoritmos bem sucedidas com o TSP métrico, porém constatou-se algumas diferenças aparentemente importantes entre os dois problemas. Primeiramente, mostramos que uma solução ótima para o UPS pode ser quase duas vezes mais longa que uma solução da correspondente instância do TSP. Encontramos também evidências que desmotivaram o uso das técnicas de Arora [1] e Mitchell [10] para obter um PTAS ou mesmo um algoritmo de aproximação com razão constante para a versão planar do UPS. Especificamente, toda solução do TSP planar — uma versão planar do TSP métrico — é um circuito hamiltoniano sem "cruzamentos" no plano. O mesmo parece não ser verdade para o UPS.

Tentamos também aplicar técnicas de programação linear, seguindo as idéias de Jain [9], porém não tivemos sucesso. Continua assim em aberto a existência ou não de um algoritmo de aproximação para o caso geral do UPS com razão constante.

5. Palestras proferidas

Durante a sua missão de trabalho, Dr. Nierhoff proferiu uma palestra intitulada *Approximation algorithms for the Steiner tree problem in graphs* no IME-USP.

O Professor Kohayakawa, durante a sua missão de trabalho, proferiu uma palestra no *27. Berliner Algorithmentag* (Humboldt-Uni, 6 de julho de 2001) intitulada *On the hereditary nature of regularity*.

A Professora Fernandes, durante a sua missão de trabalho, proferiu uma palestra intitulada *Prize-collecting Steiner tree problem* na *Humboldt Universität zu Berlin*.

6. Conclusões

Consideramos que o segundo ano do projeto foi bastante positivo pois fortaleceu o vínculo existente entre o Departamento de Ciência da Computação do IME-USP e o *Institut für Informatik* da *Humboldt Universität*.

Referências

[1] S. Arora, "Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems", *Journal of the ACM* **45** (1998), 753–782.

[2] B. Bollobás, Y. Kohayakawa e R.H. Schelp, "Essentially infinite colourings of graphs", *Journal of the London Mathematical Society, Second Series* **61** (2000), no. 3, 658–670.

[3] B. Bollobás, Y. Kohayakawa, V. Rödl e A. Taraz, "Essentially infinite colourings of hypergraphs", em preparação, 2002.

[4] R.A. Clapsadle e R.H. Schelp, "Local edge colorings that are global", *Journal of Graph Theory* **18** (1994), 389–399.

[5] P. Erdős e R. Rado, "A combinatorial theorem", *Journal of the London Mathematical Society* **25** (1950), 249–255.

[6] U. Feige, "A threshold of $\ln n$ for approximating set cover", Journal of the ACM **45** (4), 634–652, 1998.

[7] C.G. Fernandes e T. Nierhoff, "The UPS Problem", *Proc. 18th International Symposium in Theoretical Aspects of Computer Science (STACS).* Springer-Verlag, 2001.

[8] N. Garg, G. Konjevod e R. Ravi, "A polylogarithmic approximation algorithm for the group Steiner tree problem", *Journal of Algorithms* **37** (2000), no. 1, 66–84.

[9] K. Jain, "Factor 2 Approximation Algorithm for the Generalized Steiner Network Problem", IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 448–457, 1998.

[10] J.S.B. Mitchell, "Guillotine Subdivisions Approximate Polygonal Subdivisions: A Simple Polynomial-Time Approximation Scheme for Geometric TSP, k-MST, and Related Problems", *SIAM Journal on Computing* **28** (1999), 1298–1309.