RELATÓRIO DE ATIVIDADES

relativo ao primeiro ano do projeto CAPES-DAAD-PROBRAL 089/99
"Teoria dos Grafos: Aspectos Assintóticos e Algorítmicos"

1. Introdução

Este relatório refere-se ao primeiro ano do projeto CAPES-DAAD-PROBRAL 089/99 – "Teoria dos Grafos: Aspectos Assintóticos e Algorítmicos", cujo coordenador é o Professor Yoshiharu Kohayakawa.

Durante este ano foram realizadas uma missão de pesquisa e uma missão de trabalho.

Na missão de pesquisa, a Professora Cristina Gomes Fernandes visitou o *Institut für Informatik* da *Humboldt Universität-Berlin* de 13 de dezembro de 1999 a 21 de fevereiro de 2000. Na missão de trabalho, o estudante de doutorado Jair Donadelli visitou o *Institut für Informatik* da *Humboldt Universität-Berlin* de 13 de dezembro de 1999 a 2 de março de 2000.

Nas próximas seções, discorreremos sobre os principais tópicos de pesquisa abordados durante as duas visitas.

2. Problema do Subgrafo Planar Máximo

Um dos problemas inicialmente abordados foi o *Problema do Subgrafo Planar de Peso Máximo*: dado um grafo G com peso nas arestas, determinar um subgrafo planar de G de peso máximo.

O melhor algoritmo conhecido para este problema baseia-se em um algoritmo de aproximação para o *Problema da Árvore Mínima de Steiner* [2].

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto N de vértices de G, uma *árvore de Steiner em* G é uma árvore em G em que estão todos os vértices de N. O *Problema da Árvore Mínima de Steiner* consiste em, dado G, custos $c_e \geq 0$ para toda aresta e de G e um conjunto N, encontrar uma árvore de Steiner em G de custo mínimo.

Vários dos algoritmos recentes para o Problema da Árvore Mínima de Steiner baseiam-se na obtenção de *k-árvores de Steiner* de custo pequeno [1, 5, 9]. Uma *k-árvore de Steiner* consiste de uma árvore de Steiner tal que toda subárvore cujas folhas são vértices de N e os vértices internos não são de N (*full components*) tem no máximo k vértices de N.

O melhor algoritmo conhecido para a versão sem pesos do Problema do Subgrafo Planar de Peso Máximo é equivalente a encontrar uma 3-árvore de Steiner com o maior número possível de arestas. (Uma 3-árvore de Steiner de tamanho máximo corresponde a um *cactus triangular máximo*.) Este algoritmo atinge uma razão de $4/9 = 0,444\ldots$. Já o melhor algoritmo conhecido para o Problema do Subgrafo Planar de Peso Máximo encontra o correspondente a uma 3-árvore de Steiner pesada, mas não necessariamente de peso máximo, e atinge uma razão de apenas $1/3 + 1/72 = 0,3472\ldots$

Recentemente Prömel e Steger [6, 7] desenvolveram um FPTAS para o problema de encontrar uma 3-árvore de Steiner de peso máximo, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, o algoritmo de Prömel e Steger encontra em tempo polinomial uma 3-árvore de Steiner de peso pelo menos $1 - \epsilon$ do peso máximo.

Tentamos, mas não conseguimos, modificar as demonstrações em [2] para obter uma razão maior que $1/3 + 1/72$ usando uma 3-árvore de Steiner de peso máximo ao invés da árvore de Steiner lá utilizada. Infelizmente as demonstrações lá contidas fazem forte uso de particularidades da 3-árvore de Steiner lá construída. Com isso não conseguimos generalizar os resultados para uma 3-árvore de Steiner de peso máximo. Fica então ainda em aberto a conjectura de que uma 3-árvore de Steiner de peso máximo daria uma razão de $5/12 = 0,416\ldots$ para o Problema do Subgrafo Planar de Peso Máximo (o melhor que se pode esperar quando se usa apenas 3-árvores de Steiner).

Além disso, cogitamos sobre o uso de 4-árvores de Steiner, já que estas ainda correspondem a subgrafos planares, para o desenvolvimento de um algoritmo melhor para o Problema do Subgrafo Planar de Peso Máximo. No entanto, o problema de encontrar uma 4-árvore de Steiner de peso máximo é NP-difícil e a melhor razão de aproximação conhecida não é suficiente para obtermos uma melhora na razão de $1/3+1/72$, assim essa idéia mostrou-se inadequada também.

2.1. **Cadeias de Markov.** Para a versão sem pesos do problema—o Problema do Subgrafo Planar Máximo—estamos considerando um outro método para encontrar subgrafos planares grandes de um dado grafo. Este método baseia-se em *cadeias de Markov*. Uma questão antiga relacionada a grafos planares é a determinação do número esperado de arestas em um grafo planar com n vértices escolhido uniformemente dentre todos os grafos planares com n vértices. Em resposta a esta questão, surgiu recentemente um algoritmo que simula uma cadeia de Markov nos grafos planares com n vértices. Não se sabe ainda o tempo (em função de n) que esta cadeia de Markov leva para atingir (aproximadamente) a sua distribuição estacionária, que é a distribuição uniforme, porém já se conseguiu mostrar, usando este algoritmo, que o número esperado de arestas em um grafo planar com n vértices escolhido uniformemente dentre todos os grafos planares com n vértices é pelo menos $2n$. É fácil alterar o algoritmo para que este produza um subgrafo planar de um dado grafo, e então a pergunta é qual é o número esperado de arestas de um tal subgrafo? Infelizmente a prova anterior não dá bons resultados para este caso. Existem no entanto diversas maneiras de modificarmos o algoritmo e, para várias delas, não é claro o resultado. Este trabalho está em uma fase bem inicial, e vale ressaltar que existem vários obstáculos a frente. Além da prova do número esperado de arestas do subgrafo produzido, não temos ainda um algoritmo polinomial para encontrar tal subgrafo pois não provarmos um limite superior polinomial para o tempo que a cadeia de Markov correspondente leva para chegar (aproximadamente) a sua distribuição estacionária.

2.2. **O Lema de Regularidade e Algoritmos de Aproximação.** Recentemente, Frieze e Kannan [3] desenvolveram uma versão do Lema de Szemerédi para tratar problemas MAXSNP-difícieis e obtiveram, baseados nessa versão, esquemas de aproximação polinomiais para instâncias densas desses problemas.

Investigamos apenas rapidamente a aplicação destas técnicas ao Problema do Subgrafo Planar Máximo. Neste caso, as instâncias densas seriam grafos densos, ou seja, grafos com $\Theta(n^2)$ arestas. Mas o ótimo do Problema do Subgrafo Planar Máximo em qualquer grafo com n vértices tem $O(n)$ arestas, e essa abordagem então não se aplica.

3. UPS Problem

Durante a visita, trabalhamos bastante no *Problema do United Postal Service (UPS)*, uma variação do *Problema do Caixeiro Viajante*. Este problema foi sugerido pelo Professor Savelsbergh do *Georgia Institute of Technology* no ano passado. Precisamos de alguma notação para apresentar o problema.

Seja $G = (V, E)$ o grafo completo com n vértices. O *comprimento de um circuito* $C = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ *com respeito a uma função* $l : V^2 \to R^+$ é denotado por $l(C)$ e é dado por

$$l(C) := \sum_{i=0}^{k-1} l(v_i, v_{i+1}).$$

O *Problema do Caixeiro Viajante (TSP)* é o seguinte: dado um grafo $G = (V, E)$ e uma função $l : V^2 \to R^+$, encontrar um circuito Hamiltoniano (um circuito que passa por todos os vértices de G) de comprimento mínimo.

Deste ponto em diante, todas as funções $l : V^2 \to R^+$ consideradas neste texto, a menos que especificado ao contrário, satisfazem a *desigualdade triangular*: para todo x, y, z em V, $l(x, y) \leq l(x, z) + l(z, y)$. Sob esta condição, o TSP é chamado de *TSP métrico*.

Dado um circuito $C = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ e um subconjunto S de $V(C) := \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, o *encurtamento de C induzido por S*, denotado por $sc_S(C)$, é o circuito em S dado pela subseqüência de C contendo exatamente os vértices de S.

Suponha que cada vértice v em V tenha uma probabilidade p_v associada a ele. Estas probabilidades induzem uma distribuição de probabilidade nos subconjuntos de V: para cada $S \subseteq V$,

$$\mathcal{P}(S) := \prod_{v \in S} p_v \prod_{v \notin S} (1 - p_v).$$

Dado um circuito Hamiltoniano C, denote por $\mathcal{E}(l(sc_S(C)))$, ou simplesmente $\mathcal{E}(lsc(C))$, o valor esperado do comprimento do encurtamento de C induzido por um subconjunto S aleatoriamente escolhido de acordo com $\mathcal{P}$. Em fórmula,

$$\mathcal{E}(lsc(C)) := \sum_{S \subseteq V} l(sc_S(C)) \mathcal{P}(S).$$

Agora estamos prontos para apresentar o *UPS*: dado um grafo completo $G = (V, E)$, uma função $l : V^2 \to R^+$ satisfazendo a desigualdade triangular e, para cada vértice v de G, uma probabilidade p_v, encontrar um circuito Hamiltoniano que minimiza $\mathcal{E}(lsc(C))$.

Começamos estudando uma versão particular do problema acima, onde a probabilidade de cada vértice pode ser 1 ou uma probabilidade fixa p, com pelo menos um vértice com probabilidade 1 (representando um escritório do UPS). Denotamos esta versão particular do problema por UPS_p.

Uma heurística natural para o UPS é ignorar as probabilidades e tomar como solução um circuito Hamiltoniano de comprimento mínimo, ou seja, uma solução do TSP correspondente. Durante o período da visita, demonstramos para o UPS_p o seguinte

Theorem 3.1. *Se C^{TSP} é uma solução ótima do TSP para G e l e* opt *é o valor de uma solução ótima do UPS, então*

$$\frac{\mathcal{E}(lsc(C^{TSP}))}{opt} \leq \frac{1}{p}.$$

Além disso, conseguimos um exemplo que mostra que esta análise é a melhor possível.

Pretendemos dar continuidade a este trabalho, estendendo a análise para o caso geral. Temos também algumas idéias que talvez nos levem a um algoritmo para o problema com uma garantia de performance melhor que a garantia obtida pelo teorema acima. Este trabalho foi desenvolvido junto com Till Nierhoff e Deryk Osthus e está ainda em andamento.

4. Palestras proferidas

Durante a visita a sua missão de pesquisa, a Professora Fernandes proferiu três palestras:

- *Approximating Maximum Weight Planar Subgraph*, na *Humboldt Universität* em Berlin, no dia 20 de janeiro de 2000.
- *Multicuts in Bounded Degree and Bounded Tree-Width Graphs*, na *Dortmund Universität*, no dia 15 de fevereiro de 2000.
- *Multicuts in Bounded Degree and Bounded Tree-Width Graphs*, no *24. Berliner Algorithmen Tag (BAT)*, na *Technischen Universität* em Berlin, no dia 18 de fevereiro de 2000.

5. Conclusões

Gostaríamos de lembrar que durante a sua missão de trabalho, o estudante Jair Donadelli teve problemas com a sua vista e teve que ser emergencialmente operado. A sua visita foi parcialmente prejudicada por isso.

Ainda assim, consideramos que o primeiro ano do projeto foi bastante positivo pois fortaleceu o vínculo já existente entre o Departamento de Ciência da Computação do IME-USP e o *Institut für Informatik* da *Humboldt Universität*. Graças ao projeto, iniciou-se uma colaboração entre os membros do projeto do lado brasileiro e alguns dos membros do *Institut für Informatik* da *Humboldt Universität* na área de algoritmos de aproximação.

Referências

[1] P. Berman and V. Ramaiyer. "Improved Approximations for the Steiner Tree Problem", *Journal of Algorithms*, 17:381–408 (1994).

[2] G. Călinescu, C. G. Fernandes, H. Karloff and A. Zelikovski. A New Approximation Algorithm for Finding Heavy Planar Subgraphs *(submitted, 1998)*.

[3] A. Frieze and R. Kannan. "The Regularity Lemma and Approximation Schemes for Dense Problems", *Proc. of 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Burlington, VT, 1996), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1996, pp. 12–20.

[4] S. Hougardy and H.-J. Prömel. "An 1.598 Approximation Algorithm for the Steiner Tree Problem in Graphs", *Proc. of ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA'1999), 448–453.

[5] M. Karpinski and A. Zelikovsky. "New Approximation Algorithm for the Steiner Tree Problem", *Journal of Combinatorial Optimization* 1 (1997), 47–65.

[6] H.-J. Prömel and A. Steger. "RNC-Approximation Algorithms for the Steiner Problem". *Proc. of Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science STACS'97*, LNCS 1200, Springer-Verlag, 1997, 559–570.

[7] ———. "New Approximation Algorithm for the Steiner Tree Problem with Performance Ratio 5/3" *(preprint)*.

[8] G. Robins and A. Zelikovsky. "Improved Steiner Tree Approximation in Graphs", *Proc. of ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA'2000), 770–779.

[9] A. Zelikovsky. "An 11/6-Approximation Algorithm for the Network Steiner Problem", *Algorithmica* 9 (1993), 463–470.