Mais programação dinâmica

CLRS 15.5

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1..n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

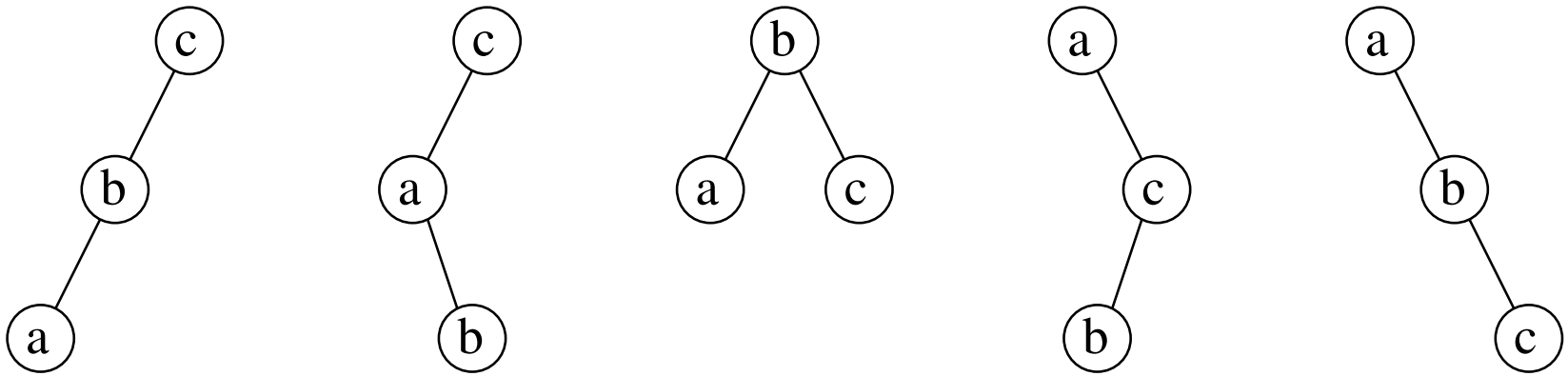
Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1..n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore binária de busca (ABB)?

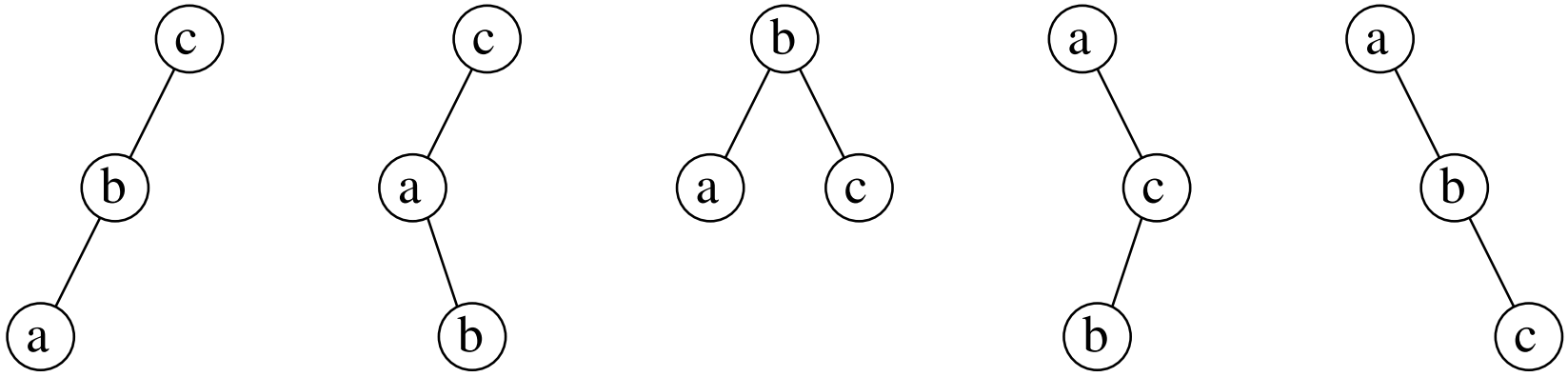
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

Qual a melhor das ABBs?



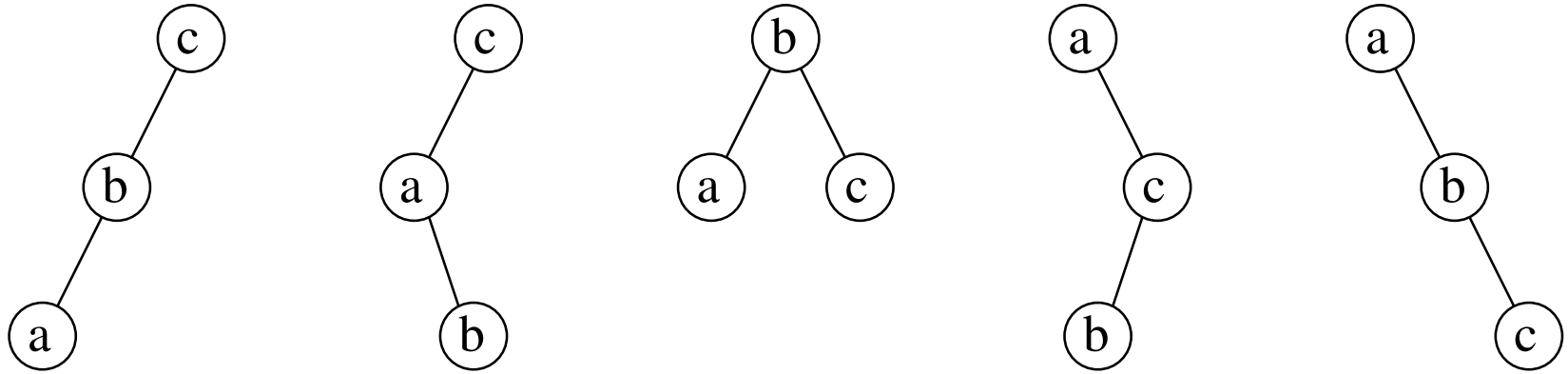
Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

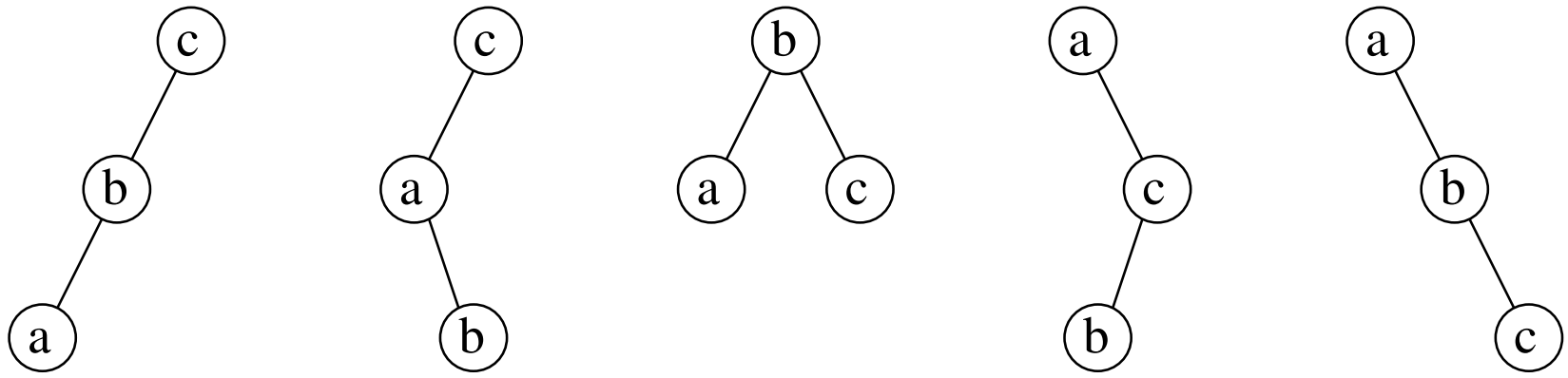


Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$ ⟵ ABB ótima
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1..n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1..n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1,\ldots,n\}$.

Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1..n]$ de inteiros com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1,\ldots,n\}$.

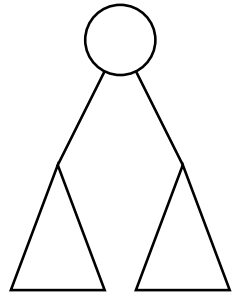
Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

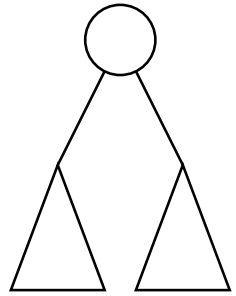
Problema (ABB Ótima): Dado $e[1..n]$, encontrar uma árvore binária de busca ótima com respeito a e.

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

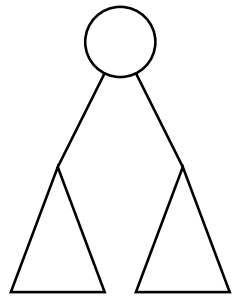
Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

Subestrutura ótima

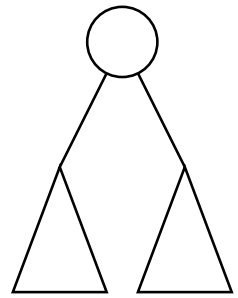


Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[i,j]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1]+c[k+1,j]\}+s[j]-s[i-1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j]\} + s[j] - s[i-1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Para calcular s:

```
1   s[0] = 0
2   para i ← 1 até n faça
3       s[i] ← s[i−1] + e[i]
```

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i..j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1..j]$
$s[j]-s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i..j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1]+c[k+1,j]\}+s[j]-s[i-1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

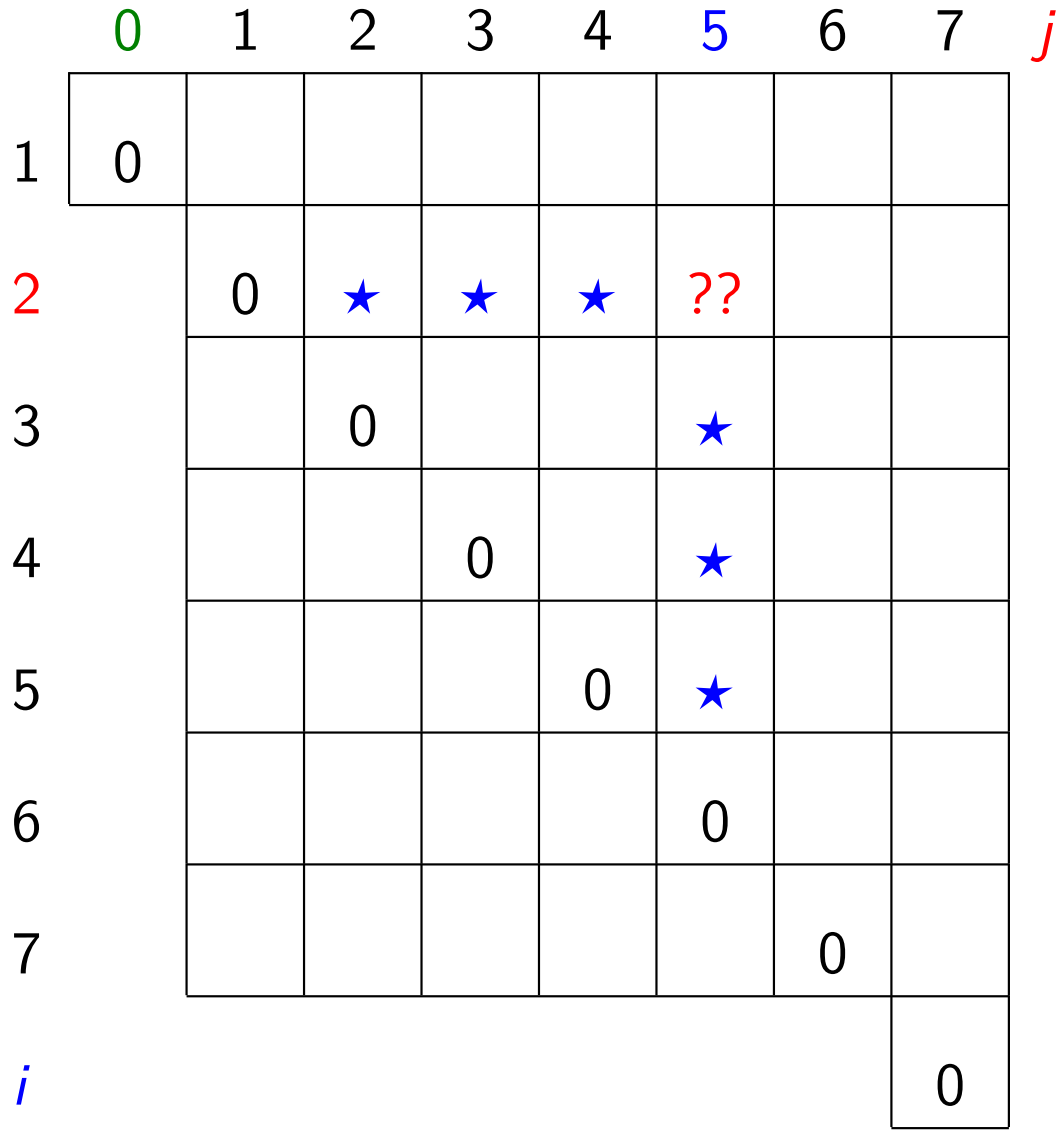
$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i-1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1]+c[k+1,j]\}+s[j]-s[i-1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Como no problema da parentização! Pelas diagonais!

Programação dinâmica



Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$c[1,1-1]+e[1]+c[1+1,1] = 0+10+0 = 10$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	??			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$c[2, 2-1] + e[2] + c[2+1, 2] = 0+20+0 = 20$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10					
2		0	20				
3			0	??			
4				0			
5					0		
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0		
5					0	
6						0

$c[3,3-1] + e[3] + c[3+1,3] = 0+30+0 = 30$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	??	
5					0	
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	
6						0

$c[4,4+1]+e[4]+c[4+1,4] = 0+15+0 = 15$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	??
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[5,5+1]+e[5]+c[5+1,5] = 0+30+0 = 30$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	??				
2		0	20				
3			0	30			
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	50			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,1-1]+(e[1]+e[2])+c[1+1,2] = 0+30+20 = 50$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20			
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[1,2-1]+(e[1]+e[2])+c[2+1,2] = 10+30+0 = 40$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	??		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	80		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[2,2-1]+(e[2]+e[3])+c[2+1,3] = 0+50+30 = 80$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30		
4				0	15	
5					0	30
6						0

$$c[2,3{-}1] + (e[2] + e[3]) + c[3{+}1,3] = 20{+}50{+}0 = 70$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30	??		
4				0	15		
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[3,3{-}1] + (e[3] + e[4]) + c[3{+}1,4] = 0{+}45{+}15 = 60$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	
5					0	30
6						0

$c[3,4-1]+(e[3]+e[4])+c[4+1,4] = 30+45+0 = 75$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40				
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	??	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	75
5					0	30
6						0

$c[4,4-1]+(e[4]+e[5])+c[4+1,5] = 0+45+30=75$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40			
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[4,5{-}1] + (e[4] + e[5]) + c[5{+}1,5] = 15{+}45{+}0 = 60$$

Simulação

$e[1]=10$ $e[2]=20$ $e[3]=30$ $e[4]=15$ $e[5]=30$

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	??			
2		0	20	70			
3			0	30	60		
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	130		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,1{-}1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[1{+}1,3] = 0{+}60{+}70 = 130$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,2-1]+(e[1])+e[2]+e[3])+c[2+1,3] = 10+60+30 = 100$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70		
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[1,3{-}1] + (e[1] + e[2] + e[3]) + c[3{+}1,3] = 40{+}60{+}0 = 100$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	??	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	125	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,2-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[2+1,4] = 0+65+60 = 125$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,3{-}1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[3{+}1,4] = 20{+}65{+}15 = 100$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[2,4-1] + (e[2] + e[3] + e[4]) + c[4+1,4] = 70+65+0 = 135$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

	0	1	2	3	4	5	j
1	0	10	40	100			
2		0	20	70	100		
3			0	30	60	??	
4				0	15	60	
5					0	30	
6						0	
i							

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,3-1]+(e[3]+e[4]+e[5])+c[3+1,5] = 0+75+60 = 135$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,4-1]+(e[3]+e[4]+e[5])+c[4+1,5] = 30+75+30 = 135$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

$$c[3,5-1]+(e[3]+e[4]+e[5])+c[5+1,5] = 60+75+0 = 135$$

Simulação

$e[1]$=10 $e[2]$=20 $e[3]$=30 $e[4]$=15 $e[5]$=30

i \ j	0	1	2	3	4	5
1	0	10	40	100		
2		0	20	70	100	
3			0	30	60	135
4				0	15	60
5					0	30
6						0

Exercício: Preencha o que falta!

Árvore de busca ótima

```
ABB-ÓTIMA (e, n)
 1  s[0] = 0
 2  para i ← 1 até n faça
 3      s[i] ← s[i−1] + e[i]
 4  para i ← 1 até n+1 faça
 5      c[i, i−1] ← 0
 6  para ℓ ← 1 até n faça
 7      para i ← 1 até n−ℓ+1 faça
 8          j ← i+ℓ−1
 9          q ← c[i+1, j]
10          para k ← i+1 até j faça
11              se c[i, k−1] + c[k+1, j] < q
12              então q ← c[i, k−1] + c[k+1, j]
13          c[i, j] ← q + s[j] − s[i−1]
14  devolva c[1, n]
```

Árvore de busca ótima

Exercício: Como fazer para obter uma ABB ótima e não apenas o seu custo? Complete o serviço!

Mais programação dinâmica

KT 6.4

Aproveite para olhar todo o Cap 6 do KT,
que é sobre programação dinâmica.

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W
e vetores positivos $w[1..n]$ e $v[1..n]$.

Uma mochila é qualquer vetor $x[1..n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W
e vetores positivos $w[1..n]$ e $v[1..n]$.

Uma mochila é qualquer vetor $x[1..n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

O valor de uma mochila é o número $x \cdot v$.

Uma mochila é ótima se tem valor máximo.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1..n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila booleana ótima.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1..n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila booleana ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4	
w	40	30	20	10	
v	840	600	400	100	
x	1	0	0	0	valor = 840
x	1	0	0	1	valor = 940
x	0	1	1	0	valor = 1000

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n-1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W - w[n])$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n{-}1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W-w[n])$

senão $x[1..n{-}1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W)$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n-1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x[1..n-1]$ é mochila booleana ótima para $(w, v, n-1, W)$

NOTA. Não há nada de especial acerca do índice n.
Uma afirmação semelhante vale para qualquer índice i.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima
para (w, v, i, Y)

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$=$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito às restrições

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$=$ valor da expressão $x \cdot v$ sujeito às restrições

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Possíveis valores de Y: $0, 1, 2, \ldots, W$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

onde x é uma mochila booleana ótima para $\{1, \ldots, i\}$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

$t[i, Y] = \max\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\}$ se $w[i] \leq Y$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2       então devolva 0
3  se w[n] > W
4       então devolva REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max{a, b}
```

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2       então devolva 0
3  se w[n] > W
4       então devolva REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max{a, b}
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2       então devolva 0
3  se w[n] > W
4       então devolva REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max{a, b}
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Por que demora tanto?
O mesmo subproblema é resolvido muitas vezes.

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t?

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t?

Olhe a recorrência e pense...

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

$t[i, Y] = \max\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\}$ se $w[i] \leq Y$

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0	★	★	★	★	★		
3	0					??		
4	0							
5	0							
6	0							
7	0							

i Y

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0					
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0			
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0				
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400			
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400		
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0	300	400	700	700	800
4	0	300	400	700	700	850

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

```
MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
 1  para Y ← 0 até W faça
 2      t[0, Y] ← 0
 3      para i ← 1 até n faça
 4          a ← t[i−1, Y]
 5          se w[i] > Y
 6              então b ← 0
 7              senão b ← t[i−1, Y−w[i]] + v[i]
 8          t[i, Y] ← max{a, b}
 9  devolva t[n, W]
```

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

```
MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
 1  para Y ← 0 até W faça
 2      t[0, Y] ← 0
 3      para i ← 1 até n faça
 4          a ← t[i−1, Y]
 5          se w[i] > Y
 6              então b ← 0
 7              senão b ← t[i−1, Y−w[i]] + v[i]
 8          t[i, Y] ← max{a, b}
 9  devolva t[n, W]
```

Consumo de tempo é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o "tamanho" de W é $\lg W$ e não W
(tente multiplicar $w[1], \ldots, w[n]$ e W por 1000)

Conclusão

O consumo de tempo do
algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o "tamanho" de W é $\lg W$ e não W
(tente multiplicar $w[1], \ldots, w[n]$ e W por 1000)

Se W é $\Omega(2^n)$ o consumo de tempo é $\Omega(n2^n)$,
mais lento que o algoritmo força bruta!

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

```
MOCHILA (w, n, W, t)
1  Y ← W
2  para i ← n decrescendo até 1 faça
3      se t[i, Y] = t[i−1, Y]
4          então x[i] ← 0
5          senão x[i] ← 1
6                Y ← Y − w[i]
7  devolva x
```

Obtenção da mochila

Como obter uma mochila ótima?

```
MOCHILA (w, n, W, t)
1   Y ← W
2   para i ← n decrescendo até 1 faça
3       se t[i, Y] = t[i−1, Y]
4           então x[i] ← 0
5           senão x[i] ← 1
6                 Y ← Y − w[i]
7   devolva x
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Versão recursiva

Como é a versão memoizada?

Versão recursiva

Como é a versão memoizada?

```
MEMOIZED-MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
1   para i ← 0 até n faça
2       para Y ← 0 até W faça
3           t[i, Y] ← ∞
3   devolva LOOKUP-MOC (w, v, n, W)
```

Versão recursiva

```
LOOKUP-MOC (w, v, i, Y)
1   se t[i, Y] < ∞
2       então devolva t[i, Y]
3   se i = 0 ou Y = 0 então t[i, Y] ← 0
    senão
4       se w[i] > Y
            então
5               t[i, Y] ← LOOKUP-MOC (w, v, i−1, Y)
            senão
6               a ← LOOKUP-MOC (w, v, i−1, Y)
7               b ← LOOKUP-MOC (w, v, i−1, Y−w[i]) + v[i]
8               t[i, Y] ← max{a, b}
9   devolva t[i, Y]
```