Análise de Algoritmos

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

Merge-Sort

Rearranja A[p..r], com $p \le r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

```
MERGESORT (A, p, r)

1 se p < r

2 então q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor

3 MERGESORT (A, p, q)

4 MERGESORT (A, q+1, r)

5 INTERCALA (A, p, q, r)
```

Problema: Dados A[p..q] e A[q+1..r] crescentes, rearranjar A[p..r] de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

Problema: Dados A[p..q] e A[q+1..r] crescentes, rearranjar A[p..r] de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

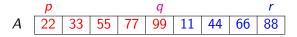
	p				q				r
Α	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

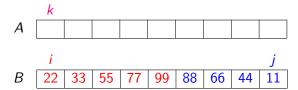
```
INTERCALA (A, p, q, r)
     \triangleright B[\mathbf{p}..\mathbf{r}] é um vetor auxiliar
      para i \leftarrow p até q faca
            B[i] \leftarrow A[i]
 3 para i \leftarrow q + 1 até r faça
           B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]
 5 \quad i \leftarrow p
 6 i \leftarrow r
      para k \leftarrow p até r faça
 8
            se B[i] \leq B[i]
 9
                 então A[k] \leftarrow B[i]
10
                           i \leftarrow i + 1
                 senão A[k] \leftarrow B[j]
11
12
                           i \leftarrow i - 1
```

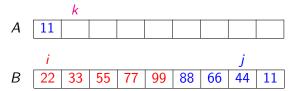
```
INTERCALA (A, p, q, r)
    \triangleright B[p..r] é um vetor auxiliar
     para i \leftarrow p até q faca
           B[i] \leftarrow A[i]
 3 para i \leftarrow q + 1 até r faça
          B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]
 5 \quad i \leftarrow p
 6 i \leftarrow r
      para k \leftarrow p até r faça
 8
           se B[i] \leq B[i]
 9
                então A[k] \leftarrow B[i]
10
                          i \leftarrow i + 1
                senão A[k] \leftarrow B[j]
11
12
                          i \leftarrow i - 1
```

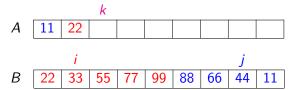
Essa versão do intercala não é estável. Por que?

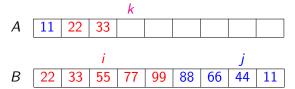


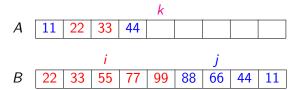


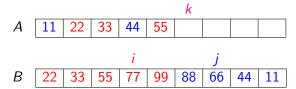


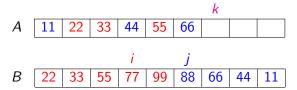


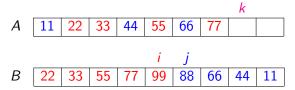


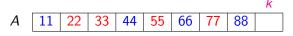












A 11 22 33 44 55 66 77 88 99

| j | i |
| B | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11

```
INTERCALA (A, p, q, r)
     \triangleright B[p..r] é um vetor auxiliar
     para i \leftarrow p até q faça
            B[i] \leftarrow A[i]
    para i \leftarrow q + 1 até r faça
           B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]
 5 i \leftarrow p
 6 i \leftarrow r
      para k \leftarrow p até r faça
 8
           se B[i] \leq B[i]
                 então A[k] \leftarrow B[i]
 9
10
                          i \leftarrow i + 1
                senão A[k] \leftarrow B[i]
11
12
                          i \leftarrow i - 1
```

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de n := r - p + 1?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(n)$
2	$\Theta(n)$
3	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n)$
5–6	$\Theta(1)$
7	$\Theta(n)$
8	$\Theta(n)$
9–12	$\Theta(n)$

total
$$\Theta(7n+1) = \Theta(n)$$

Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome $\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome tempo $\Theta(n)$.

Mergesort

```
MERGESORT (A, p, r)

1 se p < r

2 então q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor

3 MERGESORT (A, p, q)

4 MERGESORT (A, q+1, r)

5 INTERCALA (A, p, q, r)
```

linha	nha consumo máximo na linha			
1	$\Theta(1)$			
2	$\Theta(1)$			
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$			
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$			
5	$\Theta(n)$			
T(n)	$= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$			

Mergesort

T(n) := consumo de tempo máximo quando n = r - p + 1

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$
 (1)

Solução: $T(n) \in \Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

= $2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n$$

$$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n$$

$$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n$$

$$= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$= 2(2T(n/2^{2}) + n/2) + n = 2^{2}T(n/2^{2}) + 2n$$

$$= 2^{2}(2T(n/2^{3}) + n/2^{2}) + 2n = 2^{3}T(n/2^{3}) + 3n$$

$$= 2^{3}(2T(n/2^{4}) + n/2^{3}) + 3n = 2^{4}T(n/2^{4}) + 4n$$

$$= \dots = 2^{k}T(n/2^{k}) + kn$$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n$$

$$= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n$$

$$= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n$$

$$= \dots = 2^kT(n/2^k) + kn$$

$$= n + n \lg n = \Theta(n \lg n).$$

Conclusão:

O MERGESORT consume $\Theta(n \lg n)$ unidades de tempo.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2 T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k2^k$.

Para k = 0, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2 T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k2^k$.

Para k = 0, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \ge 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2 T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k2^k$.

Para k = 0, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \ge 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2 T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
 (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k2^k$.

Para
$$k = 0$$
, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para
$$k \ge 1$$
, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então
$$T(2^k) = 2 T(2^{k-1}) + 2^k$$
 pela recorrência.

Logo
$$T(2^k) = 2(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k$$

= $2^k + (k-1)2^k + 2^k = 2^k + k2^k$.



- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$
 e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \ge 2$ potência de 2.

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$
 e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \ge 2$ potência de 2.

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

$$= (T(n/2^{2}) + 1) + 1 = T(n/2^{2}) + 2$$

$$= (T(n/2^{3}) + 1) + 2 = T(n/2^{3}) + 3$$

$$= (T(n/2^{4}) + 1) + 3 = T(n/2^{4}) + 4$$

$$= \dots = T(n/2^{k}) + k \text{ para } k = \lg n$$

$$= T(1) + \lg n = 1 + \lg n = \Theta(\lg n).$$

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$
 e $T(n) = T(n-1) + n$ para $n \ge 2$.

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$
 e $T(n) = T(n-1) + n$ para $n \ge 2$.

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$= T(n-2) + (n-1) + n$$

$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= \dots = T(1) + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= 1 + 2 + \dots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).$$

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$= T(n-2) + (n-1) + n$$

$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= \dots = T(1) + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= 1 + 2 + \dots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).$$

Por expansão:

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$= T(n-2) + (n-1) + n$$

$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= \dots = T(1) + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= 1 + 2 + \dots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).$$

Note que não temos restrição no n neste caso.

Só faça a conta quando os termos que saem da recorrência são o mesmo (como o n na recorrência do Mergesort, e o 1 na anterior).

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$

 $T(n) = 3 T(n/2) + n$ para $n \ge 2$ potência de 2.

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$

 $T(n) = 3 T(n/2) + n$ para $n \ge 2$ potência de 2.

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$$

$$= 3(3T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}) + n = 3^2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^2(3T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}n + n = 3^3T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{3}{2})^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1$$

 $T(n) = 3 T(n/2) + n$ para $n \ge 2$ potência de 2.

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n = 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n = 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^3\left(3T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^4T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3n + \left(\frac{3}{2}\right)^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$T(n) = 3 T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n = 3^2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^3T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{3}{2})^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^4T(\frac{n}{2^4}) + (\frac{3}{2})^3n + (\frac{3}{2})^2n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= \dots = 3^kT(\frac{n}{2^k}) + (\frac{3}{2})^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n$$

$$T(n) = 3 T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n = 3^{2}T(\frac{n}{2^{2}}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^{3}T(\frac{n}{2^{3}}) + (\frac{3}{2})^{2}n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= 3^{4}T(\frac{n}{2^{4}}) + (\frac{3}{2})^{3}n + (\frac{3}{2})^{2}n + \frac{3}{2}n + n$$

$$= \dots = 3^{k}T(\frac{n}{2^{k}}) + (\frac{3}{2})^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 3^{\lg n}T(1) + (\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{3}{2})n$$

$$= 3^{\lg n} + (\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1})n = 3^{\lg n} + 2((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1)n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n = 3^{2}T(\frac{n}{2^{2}}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= \dots = 3^{k}T(\frac{n}{2^{k}}) + (\frac{3}{2})^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 3^{\lg n}T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1}\frac{3}{2}\right)n = 3^{\lg n} + \left(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n = 3^{2}T(\frac{n}{2^{2}}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= \dots = 3^{k}T(\frac{n}{2^{k}}) + (\frac{3}{2})^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 3^{\lg n}T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1}\frac{3}{2}\right)n = 3^{\lg n} + \left(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n = 3^{2}T(\frac{n}{2^{2}}) + \frac{3}{2}n + n$$

$$= \dots = 3^{k}T(\frac{n}{2^{k}}) + (\frac{3}{2})^{k-1}n + \dots + \frac{3}{2}n + n \quad \text{para } k = \lg n$$

$$= 3^{\lg n}T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1}\frac{3}{2}\right)n = 3^{\lg n} + \left(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - 1\right)n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$= 33^{\lg n} - 2n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3^{\lg n} T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{3}{2}\right) n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n = 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$= 33^{\lg n} - 2n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3^{\lg n} T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{3}{2}\right) n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n = 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$= 33^{\lg n} - 2n$$

$$= 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3^{\lg n} T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{3}{2}\right) n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n = 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$= 33^{\lg n} - 2n$$

$$= 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n$$

$$= 3n^{\lg 3} - 2n$$

$$T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 3^{\lg n} T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n-1} \frac{3}{2}\right) n = 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n = 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n$$

$$= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right)$$

$$= 3^{\lg n} + 23^{\lg n} - 2n$$

$$= 33^{\lg n} - 2n$$

$$= 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n$$

$$= 3n^{\lg 3} - 2n$$

$$= \Theta(n^{\lg 3}).$$

Exercícios das listas para entregar

Vejam na página as Listas 1 e 2, e os exercícios que devem entregar na aula de quinta e na aula de terça.