

Tópicos de Análise de Algoritmos

Análise amortizada

Parte das notas de aula de um curso do Robert Tarjan.

"Amortized Analysis Explained"

por Rebecca Fiebrink, Princeton University

Aulas passadas

Exemplos de análise amortizada:

- ▶ **odômetro binário**
 - ▶ análise agregada
 - ▶ análise por créditos
 - ▶ análise com função potencial
- ▶ **pilha com operação única**
 - ▶ análise agregada
 - ▶ análise por créditos
 - ▶ análise com função potencial
- ▶ **tabelas dinâmicas**
 - ▶ análise por créditos
 - ▶ análise com função potencial

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Move to front

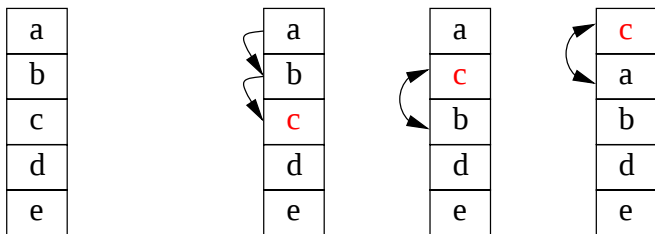
Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.



Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i -ésimo elemento: $2i - 1$.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i -ésimo elemento: $2i - 1$.

Considere uma sequência de acessos à lista.

Qual é o custo de MTF se comparado com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Acesso ao i -ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado
com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Acesso ao i -ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado
com um algoritmo ótimo de acesso?

A : algoritmo arbitrário de acesso à lista.

Análise amortizada:

custo do MTF ≤ 4 vezes o custo de A .

Função potencial e custo real do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Função potencial e custo real do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Primeiro suponha que **A** não troca ninguém de lugar.

Seja **x** o elemento acessado.

Função potencial e custo real do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Primeiro suponha que **A** não troca ninguém de lugar.

Seja **x** o elemento acessado.

Seja **k** a posição de **x** na lista de **MTF**.

Seja **i** a posição de **x** na lista de **A**.

Função potencial e custo real do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Primeiro suponha que **A** não troca ninguém de lugar.

Seja **x** o elemento acessado.

Seja **k** a posição de **x** na lista de **MTF**.

Seja **i** a posição de **x** na lista de **A**.

Custo pelo acesso a **x** por **MTF**: $2k - 1$.

Custo pelo acesso a **x** por **A**: i .

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

k : posição de x na lista de MTF.

i : posição de x na lista de A .

Em MTF, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocam de posição.

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões **a mais** depois do acesso

$\geq (k - 1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões **a menos**

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

k : posição de x na lista de MTF.

i : posição de x na lista de A .

Em MTF, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocam de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de A na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

$\geq (k - 1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões a menos

Então

$$\Delta\Phi \leq 2(2 \min\{k-1, i-1\} - (k - 1))$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e cada um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões **a mais** depois do acesso

$\geq (k - 1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões **a menos**

Então

$$\Delta\Phi \leq 2(2 \min\{k-1, i-1\} - (k - 1)) = 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k - 1).$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

$$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1).$$

Custo amortizado:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\ &\leq 2k - 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\ &\leq 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} \\ &\leq 4i.\end{aligned}$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

$$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1).$$

Custo amortizado:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\ &\leq 2k - 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\ &\leq 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} \\ &\leq 4i.\end{aligned}$$

Lembre-se que o custo de A é i .

Logo o custo amortizado por acesso de A é no máximo 4.

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? **Sobe ou desce de 2.**

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x ,
e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? **Sobe ou desce de 2.**

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x ,
e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \leq 4i + 2t \leq 4(i + t)$.

Custo amortizado de acesso com trocas de A

Função potencial Φ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado por acesso é no máximo 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$,
onde t é o número de trocas de A após o acesso de x ,
e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \leq 4i + 2t \leq 4(i + t)$.

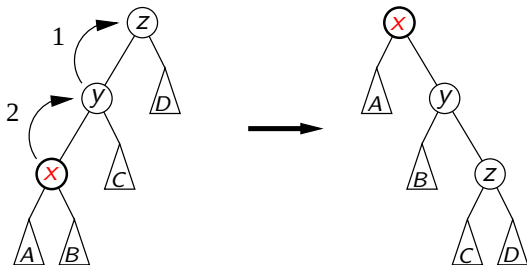
Custo amortizado por operação de A é no máximo 4.

Splay trees

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

As rotações são feitas numa ordem específica, de duas em duas.



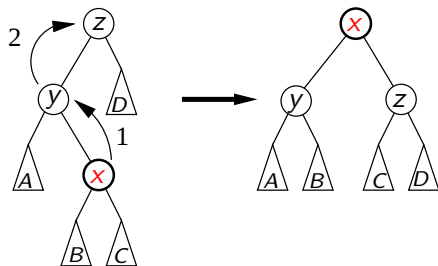
Acima, o **rr splay step**.

Splay trees

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

As rotações são feitas numa ordem específica, de duas em duas.



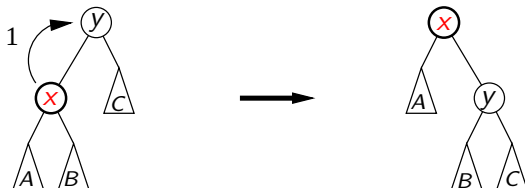
Acima, o **lr splay step**.

Splay trees

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

As rotações são feitas numa ordem específica, de duas em duas.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



Acima, o **r splay step**.

Além destes, o **l splay**, o **rl splay** e o **ll splay step**.

Splay steps são realizados até que x seja raiz.

Splay trees

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

(ABBB: ABB balanceada)

Splay trees: análise

S: splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Splay trees: análise

S : splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Splay trees: análise

S : splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps.

Splay trees: análise

S : splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps.

$S_i(w)$: subárvore de S enraizada em w no instante i

$$s_i(w) = |S_i(w)|$$

▷ número de nós na subárvore

Splay trees: análise

S : splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps.

$S_i(w)$: subárvore de S enraizada em w no instante i

$s_i(w) = |S_i(w)|$ ▷ número de nós na subárvore

Tome $r_i(w) = \lg s_i(w)$.

$r_i(w)$ indica o **potencial local** em cada nó w .

Splay trees: análise

S : splay tree

Custo: número de rotações.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps.

$S_i(w)$: subárvore de S enraizada em w no instante i

$s_i(w) = |S_i(w)|$ ▷ número de nós na subárvore

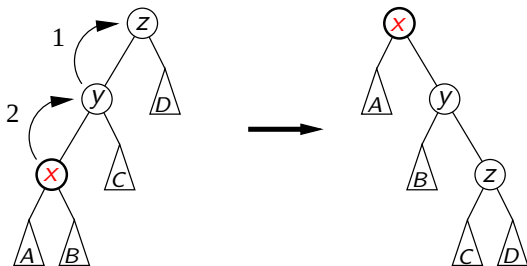
Tome $r_i(w) = \lg s_i(w)$.

$r_i(w)$ indica o **potencial local** em cada nó w .

Seja $\Phi_i = \sum_w r_i(w)$.

Análise amortizada dos splay steps

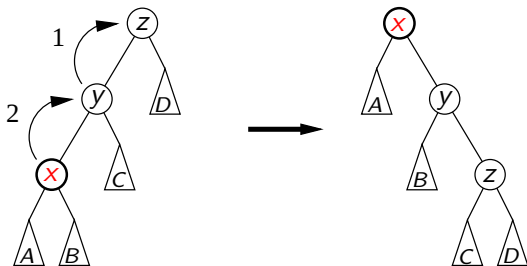
Caso do **rr splay step**.



Custo real: 2

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



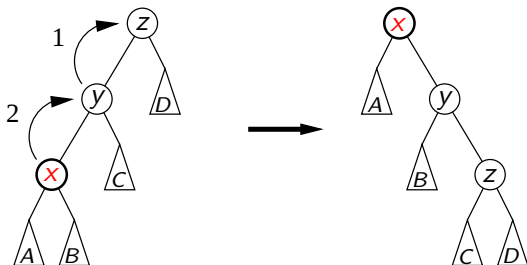
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w))$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



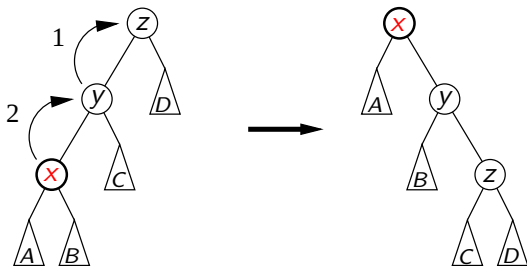
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z))\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



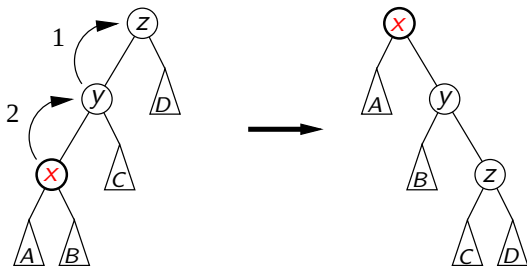
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y)) \quad \triangleright r_i(x) = r_{i-1}(z)\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



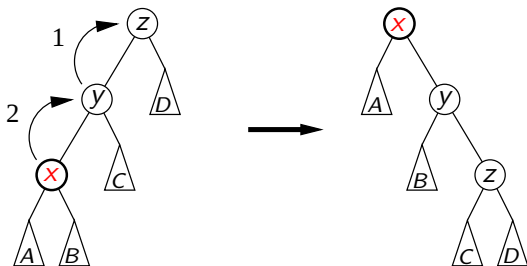
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y)) \quad \triangleright r_i(x) = r_{i-1}(z) \\ &\leq r_i(y) + r_i(z) - 2 r_{i-1}(x) \quad \triangleright r_{i-1}(x) \leq r_{i-1}(y)\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.

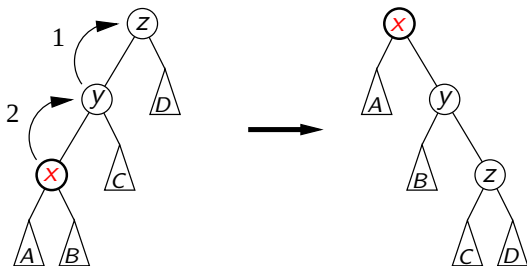


Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



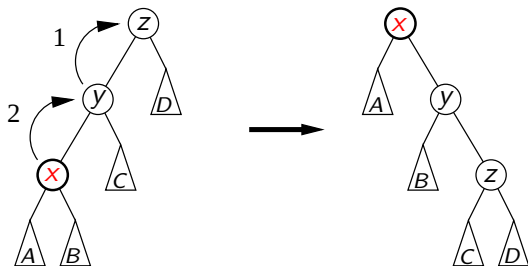
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} \leq r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .

Análise amortizada dos splay steps

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .

Análise amortizada dos splay steps

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .

Como $r_i(y) < r_i(x)$, temos que

Custo amortizado: $\hat{c}_i < 2 + r_i(x) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Custo amortizado: $\hat{c}_i \leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .

Como $r_i(y) < r_i(x)$, temos que

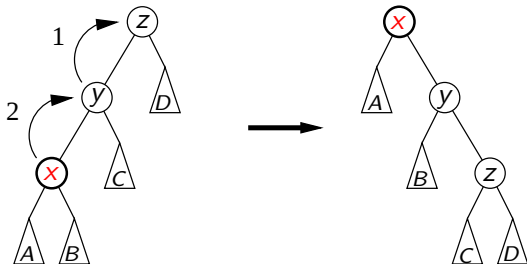
Custo amortizado: $\hat{c}_i < 2 + r_i(x) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Não gostamos do termo 2, pois ele, somado para todos os splay steps envolvidos num $\text{SPLAY}(x, S)$, pode não dar $O(\lg n)$.

Por isso não fazemos o mesmo com o z .

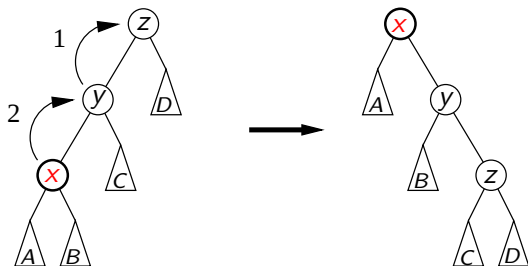
O z vai nos ajudar a eliminar esse 2.

Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

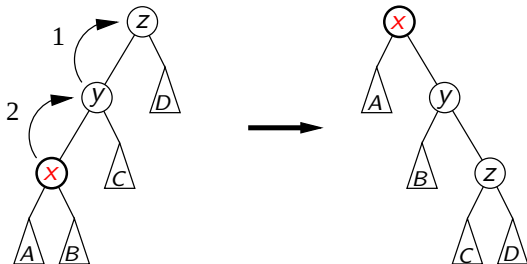
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$\begin{aligned} r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\ &\leq 2 \lg \left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2} \right) \\ &< 2 \lg \left(\frac{s_i(x)}{2} \right) \\ &= 2 \lg s_i(x) - 2. \end{aligned}$$

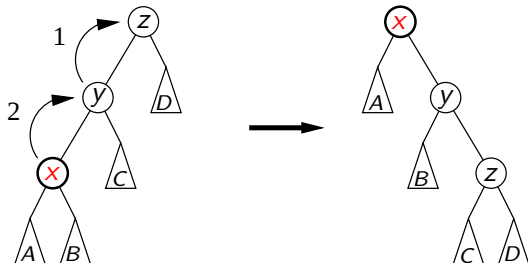
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) < 2 \lg s_i(x) - 2 = 2 r_i(x) - 2.$$

Caso do rr splay step



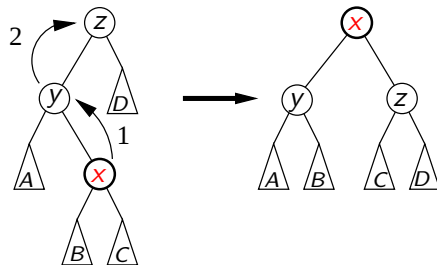
Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) < 2 \lg s_i(x) - 2 = 2r_i(x) - 2.$$

Então

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &\leq 2 + r_i(x) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x) \\ &< 2 + r_i(x) + (2r_i(x) - r_{i-1}(x) - 2) - 2r_{i-1}(x) \\ &= 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)).\end{aligned}$$

Caso do lr splay step



Custo real: 2

Exercício: Mostre que, neste caso,

$$\phi_i - \phi_{i-1} \leq 2(r_i(x) - r_{i-1}(x)) - 2.$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Para l splay steps e r splay steps, vale que

$$\hat{c}_i \leq 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para **rl splay steps**, **lr splay steps**, e **ll splay steps**.

Para **l splay steps** e **r splay steps**, vale que

$$\hat{c}_i \leq 3(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Se s é o número de splay steps em **SPLAY**(x, S) e n o número de nós,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \hat{c}_i &\leq 3 \sum_{i=1}^s (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1 \\ &= 3(r_s(x) - r_0(x)) + 1 \\ &\leq 3 \lg n + 1. \end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do $\text{SPLAY}(x, S)$ é

$$\sum_{i=1}^s c_i = \sum_{i=1}^s \hat{c}_i - \Phi_s + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_s + \Phi_0.$$

Porém, em geral, não vale que $\Phi_0 = 0$, ou $\Phi_0 \leq \Phi_s$.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do $\text{SPLAY}(x, S)$ é

$$\sum_{i=1}^s c_i = \sum_{i=1}^s \hat{c}_i - \Phi_s + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_s + \Phi_0.$$

Porém, em geral, não vale que $\Phi_0 = 0$, ou $\Phi_0 \leq \Phi_s$.

Vamos considerar na análise inserções em splay trees, de modo que possamos começar de uma árvore vazia, com $\Phi_0 = 0$.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i .

Então vale que o custo do $\text{SPLAY}(x, S)$ é

$$\sum_{i=1}^s c_i = \sum_{i=1}^s \hat{c}_i - \Phi_s + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_s + \Phi_0.$$

Porém, em geral, não vale que $\Phi_0 = 0$, ou $\Phi_0 \leq \Phi_s$.

Vamos considerar na análise inserções em splay trees, de modo que possamos começar de uma árvore vazia, com $\Phi_0 = 0$.

E disso será possível concluir que o custo amortizado por operação em uma splay tree é $O(\lg n)$.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Sejam y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Sejam y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Sejam y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j)))\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Sejam y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)}\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a **SPLAY** no elemento inserido.

Sejam y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^k (\lg(s(y_j) + 1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &\leq \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1}))\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &\leq \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right) \leq \lg(n + 1) \leq \lg n + 1.\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 2, \dots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a **variação do potencial** causado pela inserção.

r : potencial local antes da inserção

r' : potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^k \lg \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} = \lg \left(\prod_{j=1}^k \frac{s(y_j) + 1}{s(y_j)} \right) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k) + 1}{s(y_k)} \right) \quad (\text{pois } s(y_j) + 1 \leq s(y_{j+1})) \\ &= \lg \left(\frac{s(y_k) + 1}{s(y_1)} \right) \leq \lg(n + 1) \leq \lg n + 1.\end{aligned}$$

Então $\hat{c} \leq 0 + \lg n + 1 = \lg n + 1$. (inserção não faz rotações)

Outras operações

Lembre-se que o custo real de cada operação é o número de rotações que a operação executa.

Assim, buscas, mínimos, máximos todos têm custo real 0 e não alteram o potencial. Ou seja, têm custo amortizado nulo.

Falta analisar a remoção.

A remoção também tem custo real 0, mas o potencial se altera. O que podemos dizer sobre $\Delta\Phi$ para uma remoção?

Concluindo a análise

Começamos da árvore vazia ($\Phi_0 = 0$), considere agora uma sequência de m inserções, buscas, mínimos, máximos, e splays, estes entremeando as demais operações do modo esperado.

Chame de c_i o custo real e de $\hat{c}_i$ o custo amortizado de cada uma destas operações.

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m c_i &= \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq 3m \lg m + m + 0 \\ &\leq 4m \lg m.\end{aligned}$$

Concluindo a análise

Começamos da árvore vazia ($\Phi_0 = 0$), considere agora uma sequência de m inserções, buscas, mínimos, máximos, e splays, estes entremeando as demais operações do modo esperado.

Chame de c_i o custo real e de $\hat{c}_i$ o custo amortizado de cada uma destas operações.

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m c_i &= \sum_{i=1}^m \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^m (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\ &\leq 3m \lg m + m + 0 \\ &\leq 4m \lg m.\end{aligned}$$

Portanto o custo amortizado por operação é $O(\lg m)$.