MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2025

Lista 8

1. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

Verdadeiro ou falso? Em toda instância do Problema do Casamento Estável, existe um emparelhamento perfeito estável contendo um par (h, m) tal que m é a primeira da lista de preferências de h e h é o primeiro da lista de m .

2. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, dê uma breve explicação. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

Verdadeiro ou falso? Considere uma instância do Problema do Casamento Estável na qual existe um homem h e uma mulher m tal que m é a primeira da lista de preferências de h e h é o primeiro da lista de m . Então, em todo emparelhamento perfeito estável S para essa instância, $(h, m) \in S$.

3. O Problema do Casamento Estável, como discutido na aula, assume que todos os homens e mulheres têm uma lista totalmente ordenada de preferências. Nesse problema, vamos considerar a versão do problema em que homens e mulheres podem ser *indiferentes* em relação a algumas opções. Como antes, temos um conjunto H de n homens e um conjunto W de n mulheres. Suponha que cada homem e cada mulher ordena os membros do outro gênero, mas agora possivelmente deixando alguns membros empatados. Por exemplo, para um caso em que $n = 4$, uma mulher poderia dizer que o homem h_1 vem em primeiro na sua lista, em segundo vêm os homens h_2 e h_3 empatados, e em último vem o homem h_4 . Diremos que m prefere h a h' se h está melhor posicionado na sua lista (não empatado).

Com indiferenças nas listas, podem haver dois jeitos de definir estabilidade. E para cada jeito podemos nos perguntar se existe um emparelhamento perfeito estável.

- (a) Uma *instabilidade forte* num emparelhamento perfeito S consiste em um homem h e uma mulher m tais que cada um deles prefere ao outro do que seu parceiro atual em S . Será que sempre existe um emparelhamento perfeito sem instabilidades fortes? Ou dê um exemplo de um conjunto de homens e mulheres com suas listas de preferências para o qual todo emparelhamento perfeito tem uma instabilidade forte, ou dê um algoritmo que garantidamente encontre um emparelhamento perfeito sem instabilidades fortes.
- (b) Uma *instabilidade fraca* num emparelhamento perfeito S consiste em um homem h e uma mulher m tais que seus parceiros são m' e h' , respectivamente, e uma das seguintes condições vale:
 - h prefere m a m' , e m prefere h a h' ou é indiferente entre os dois (ou seja, os empatou na sua lista); ou
 - m prefere h a h' , e h prefere m a m' ou é indiferente entre as duas (ou seja, as empatou na sua lista).

Em palavras, o pareamento entre h e m ou é preferível para ambos, ou é preferível para um deles e indiferente para o outro. Será que sempre existe um emparelhamento perfeito sem instabilidades fracas? Ou dê um exemplo de um conjunto de homens e mulheres com suas listas de preferências para o qual todo emparelhamento perfeito tem uma instabilidade fraca, ou dê um algoritmo que garantidamente encontre um emparelhamento perfeito sem instabilidades fracas.