

MAC0338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2024

Lista 7

1. **(CRLS Ex. 23.1-1)** Seja e uma aresta de custo mínimo em um grafo G com custos nas arestas. É verdade que e pertence a alguma MST de G ? É verdade que e pertence a toda MST de G ?
2. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois (ou seja, não há duas arestas com o mesmo custo). Mostre que o grafo tem uma única MST.
3. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois. Seja C um ciclo não trivial. É verdade que a aresta de custo mínimo em C pertence à (única) MST do grafo?
4. **(CRLS Ex. 23.1-2)** Prove ou desprove a seguinte afirmação: Dado um grafo G com pesos nas arestas, um conjunto de arestas A de G , e um corte que respeita A , toda aresta que cruza o corte e que é segura para A tem peso mínimo dentre todas as arestas desse corte.
5. **(CRLS Ex. 23.1-3)** Prove ou desprove a seguinte afirmação: Se uma aresta está contida em alguma MST, então tem peso mínimo dentre todas as arestas de algum corte no grafo.
6. **(CRLS Ex. 23.1-7)** Prove que se todos os pesos nas arestas são positivos, então qualquer subconjunto de arestas que conectam todos os vértices e tem peso total mínimo forma uma árvore. A propriedade vale se alguns pesos são negativos?
7. Seja T uma MST de um grafo com pesos positivos e distintos nas arestas. Suponha que substituamos cada peso pelo seu quadrado. Verdadeiro ou falso: T ainda é uma MST para o novo grafo.
8. Dado um grafo conexo G , dizemos que duas MSTs T e T' são vizinhas se T contém exatamente uma aresta que não está em T' , e T' contém exatamente uma aresta que não está em T . Vamos construir um novo grafo (muito grande) $\mathcal{H}$ como segue. Os vértices de $\mathcal{H}$ são as MSTs de G , e existe uma aresta entre dois vértices em $\mathcal{H}$ se os correspondentes MSTs são vizinhas. É verdade que $\mathcal{H}$ é sempre conexo? Prove ou dê um contra-exemplo.
9. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas. Uma aresta e de G é crítica se o aumento do custo de e faz com que o custo de uma MST de G também aumente. Escreva uma função que determine todas as arestas críticas de G em tempo $O(m \log n)$.
10. Mostre que, se G é conexo, depois da remoção de u da fila Q na linha 6 do algoritmo de Prim, tem-se $\text{key}[u] < \infty$.
11. Suponha que temos um grafo G com pesos nas arestas. Verdadeiro ou falso: Para qualquer MST T de G , existe uma execução válida do algoritmo de Kruskal que produz T como saída? Dê uma prova ou um contra-exemplo.
12. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas e seja B um conjunto de arestas de G . Suponha que o grafo induzido por B não tem circuitos. Queremos encontrar uma subárvore geradora de custo mínimo dentre as que contêm B . Descreva um algoritmo eficiente para resolver o problema.
13. **(CRLS Ex. 23.2-4,5)** Suponha que todos os pesos num grafo com n vértices são inteiros no intervalo de 1 até n . Descreva como otimizar os algoritmos de Kruskal e Prim nesta situação. O que acontece se os pesos são inteiros no intervalo de 1 até W ?
14. Dado um grafo com n vértices, pesos distintos nas arestas, e no máximo $n + 8$ arestas, dê um algoritmo com complexidade $O(n)$ para achar uma MST.