

MAC0338 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2024

Lista 3

1. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor $v[1..n]$ com $n \geq 2$ números positivos distintos.

Algoritmo Máximo (v, n)

1. $maior \leftarrow 0$
2. $segundo_maior \leftarrow 0$
3. **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $segundo_maior \leftarrow maior$
6. $maior \leftarrow v[i]$
7. **senão se** $v[i] > segundo_maior$
8. **então** $segundo_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva** $segundo_maior$

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a n , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja X o número de vezes que a variável $segundo_maior$ é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de $Máximo(v, n)$. Note que X é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de X .

2. Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor $v[1..n]$ com elementos distintos.

Algoritmo MaiorMenor (v, n)

1. $maior \leftarrow v[1]$
2. $menor \leftarrow v[1]$
3. **para** $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
4. **se** $v[i] > maior$
5. **então** $maior \leftarrow v[i]$
6. **senão se** $v[i] < menor$
7. **então** $menor \leftarrow v[i]$
8. **devolva** $maior, menor$

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n .

Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo?
Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

3. Seja $M(n)$ definida pela recorrência

$$\begin{aligned}M(0) &= 1 \\M(1) &= 1 \\M(n) &= \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

Mostre que $M(n) \geq \frac{1}{2}(n+1) \lg(n+1)$ para todo $n \geq 0$.

4. **(CLRS 8.4-3)** Seja X uma variável aleatória que é igual ao número de caras em duas jogadas de uma moeda justa. Quanto vale $E[X^2]$? Quanto vale $E[X]^2$?
5. Qual é o consumo de espaço do QUICKSORT no pior caso?
6. Escreva uma função que recebe um vetor com n letras A's e B's e, por meio de trocas, move todos os A's para o início do vetor. Sua função deve consumir tempo $O(n)$.
7. Escreva uma função que rearranje um vetor $v[p..r]$ de inteiros de modo que tenhamos $v[p..j-1] \leq 0$ e $v[j..r] > 0$ para algum j em $p..r+1$. Faz sentido exigir que j esteja em $p..r$? Procure fazer uma função rápida que não use vetor auxiliar. Repita o exercício depois de trocar $v[j..r] > 0$ por $v[j..r] \geq 0$. Faz sentido exigir que $v[j]$ seja 0?
8. Sejam $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ dois vetores, cada um contendo n números ordenados. Escreva um algoritmo $O(\lg n)$ para encontrar uma das medianas de todos os $2n$ elementos nos vetores X e Y .
9. Para esta questão, vamos dizer que a mediana de um vetor $A[p..r]$ com números inteiros é o valor que ficaria na posição $A[\lfloor (p+r)/2 \rfloor]$ depois que o vetor $A[p..r]$ fosse ordenado. Considere um algoritmo $\text{CAIXAPRETA}(A, p, r)$ que recebe um vetor $A[p..r]$ de inteiros e devolve a mediana de $A[p..r]$. Suponha que esse algoritmo consome tempo linear em n , onde $n = r - p + 1$.
- Escreva um algoritmo simples, linear, que, dado um vetor $A[p..r]$ de inteiros distintos e um inteiro k , devolve o k -ésimo mínimo do vetor. (O k -ésimo mínimo de um vetor de inteiros distintos é o elemento que estaria na k -ésima posição do vetor se ele fosse ordenado.)
10. **(CLRS 8.3-2)** Quais dos seguintes algoritmos de ordenação são estáveis: insertionsort, mergesort, heapsort, e quicksort. Descreva uma maneira simples de deixar qualquer algoritmo de ordenação estável. Quanto tempo e/ou espaço adicional a sua estratégia usa?
11. Qual a diferença de consumo de tempo entre uma busca binária em um vetor com n elementos e uma busca binária em um vetor com n^2 elementos?