Algoritmos de marcação para caching

Sec 13.8 do KT

Cache

Modelo: itens do mesmo tamanho

Memória cache de tamanho k (itens)

Sequência de requisições:

$$S : d_1, d_2, \ldots, d_m$$

Cache hit: acerto – item está no cache

Cache miss: falha – item não está no cache

Se o cache está cheio e entra um novo item,
outro tem que sair (é despejado).

Políticas de despejo

Política de despejo (*replacement policy*):
algoritmo que decide quando trazer um
item para o cache e que item despejar.

Política preguiçosa (*lazy policy*):
um item só é trazido para o cache se ele foi requisitado.

Política FF (*farthest first* - algoritmo de Bélády): despeja
o item que será acessado novamente no futuro mais distante.

Vimos na aula passada que a política FF é ótima:
provoca o menor número possível de falhas.

Políticas de caching

U: conjunto de itens.

k: capacidade do cache.

$d_1, \ldots, d_m$: sequência de itens de U.

Políticas de caching

U: conjunto de itens.

k: capacidade do cache.

$d_1, \ldots, d_m$: sequência de itens de U.

Algoritmo de manutenção de cache:
Dada uma coleção de k itens de U e um novo item d,
decidir qual dos k itens será desalojado para dar espaço para d.

Políticas de caching

U: conjunto de itens.

k: capacidade do cache.

$d_1, \ldots, d_m$: sequência de itens de U.

Algoritmo de manutenção de cache:
Dada uma coleção de k itens de U e um novo item d,
decidir qual dos k itens será desalojado para dar espaço para d.

Exemplo: Se $k = 9$, $d = 3$ e o cache está assim:

7	2	1
8	5	9
4	0	6

Políticas de caching

U: conjunto de itens.

k: capacidade do cache.

$d_1, \ldots, d_m$: sequência de itens de U.

Algoritmo de manutenção de cache:
Dada uma coleção de k itens de U e um novo item d,
decidir qual dos k itens será desalojado para dar espaço para d.

Exemplo: Se $k = 9$, $d = 3$ e o cache está assim:

7	2	1
8	5	9
4	0	6

Quem devemos desalojar?

Política ótima de caching

U: conjunto de itens.
k: capacidade do cache.

Algoritmo ótimo de caching:
Dada uma sequência $d_1, \ldots, d_m$ de requisições de U,
a cada instante, se necessário, desalojamos do cache
o item que demorará mais para ser requisitado de novo.

(mais distante no futuro)

S_{FF}: escalonamento obtido pela política anterior.

Política ótima de caching

U: conjunto de itens.
k: capacidade do cache.

Algoritmo ótimo de caching:
Dada uma sequência $d_1, \ldots, d_m$ de requisições de U,
a cada instante, se necessário, desalojamos do cache
o item que demorará mais para ser requisitado de novo.

(mais distante no futuro)

S_{FF}: escalonamento obtido pela política anterior.

Aula passada: S_{FF} é ótimo.

Política ótima de caching

U: conjunto de itens.
k: capacidade do cache.

Algoritmo ótimo de caching:
Dada uma sequência $d_1, \ldots, d_m$ de requisições de U,
a cada instante, se necessário, desalojamos do cache
o item que demorará mais para ser requisitado de novo.

(mais distante no futuro)

S_{FF}: escalonamento obtido pela política anterior.

Aula passada: S_{FF} é ótimo.

Problema: não conhecemos d de ante-mão...

Política ótima de caching

U: conjunto de itens.
k: capacidade do cache.

Algoritmo ótimo de caching:
Dada uma sequência $d_1, \ldots, d_m$ de requisições de U,
a cada instante, se necessário, desalojamos do cache
o item que demorará mais para ser requisitado de novo.

(mais distante no futuro)

S_{FF}: escalonamento obtido pela política anterior.

Aula passada: S_{FF} é ótimo.

Problema: não conhecemos d de ante-mão...

Era melhor uma política online e S_{FF} não é online...

Duas políticas online

LRU: least recently used

MRU: most recently used

Para variantes e mais referências, veja a página
https://en.wikipedia.org/wiki/Cache_replacement_policies

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.
recebe requisição do item s.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.
recebe requisição do item s.
marca s.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.
recebe requisição do item s.
marca s.
se $s \in C$, atende s e passa para o próximo.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.
recebe requisição do item s.
marca s.
se $s \in C$, atende s e passa para o próximo.

se $s \notin C$,
se C está todo marcado
desmarca todos os itens e começa nova fase deixando s para ser atendido nela.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.
Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.
recebe requisição do item s.
marca s.
se $s \in C$, atende s e passa para o próximo.

se $s \notin C$,
  se C está todo marcado
    desmarca todos os itens e começa nova
    fase deixando s para ser atendido nela.
  senão
    despeja de C um dos itens desmarcados,
    traz s no seu lugar e passa para o próximo.

Algoritmos de marcação por fases

Algoritmo:

C: itens que estão no cache.

Cada item de C está marcado ou desmarcado.

Fase: no início, todos os itens desmarcados.

recebe requisição do item s.

marca s.

se $s \in C$, atende s e passa para o próximo.

se $s \notin C$,

se C está todo marcado

desmarca todos os itens e começa nova fase deixando s para ser atendido nela.

senão

despeja de C um dos itens desmarcados, traz s no seu lugar e passa para o próximo.

Note que LRU é um algoritmo de marcação.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.
De fato, em cada fase, há k itens distintos requisitados.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.
De fato, em cada fase, há k itens distintos requisitados.

Então $f(d) \geq r - 1$, onde r é o número de fases do algoritmo.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.
De fato, em cada fase, há k itens distintos requisitados.

Então $f(d) \geq r - 1$, onde r é o número de fases do algoritmo.

O algoritmo de marcação faz no máximo k falhas por fase.

Logo, no total, faz no máximo $kr \leq kf(d) + k$ falhas.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.
De fato, em cada fase, há k itens distintos requisitados.

Então $f(d) \geq r - 1$, onde r é o número de fases do algoritmo.

O algoritmo de marcação faz no máximo k falhas por fase.

Logo, no total, faz no máximo $kr \leq kf(d) + k$ falhas.

Dizemos que tal algoritmo é k-competitivo.

Análise do algoritmo de marcação

Fixe uma sequência d de requisições.

$f(d)$: número mínimo de falhas para atender d.

Em cada fase, há pelo menos uma falha.
De fato, em cada fase, há k itens distintos requisitados.

Então $f(d) \geq r - 1$, onde r é o número de fases do algoritmo.

O algoritmo de marcação faz no máximo k falhas por fase.

Logo, no total, faz no máximo $kr \leq kf(d) + k$ falhas.

Dizemos que tal algoritmo é k-competitivo.

Em particular, o LRU é k-competitivo.

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Análise:

Fase j:
item requisitado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Análise:

Fase j:
item requisitado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Análise:

Fase j:
item requisitado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Análise:

Fase j:
item requisitado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Um algoritmo melhor

Sorteie um desmarcado uniformemente para despejar!

Análise:

Fase j:
item requisitado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Prova: Na fase j, há requisição para k itens distintos.

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Prova: Na fase j, há requisição para k itens distintos.

Na fase $j+1$, há requisição para c_{j+1} itens distintos destes.

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.

$$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$$

c_j: número de itens frescos na fase j.

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Prova: Na fase j, há requisição para k itens distintos.

Na fase $j+1$, há requisição para c_{j+1} itens distintos destes.

Então um algoritmo ótimo incorre em $\geq c_{j+1}$ falhas. □

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.
$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$.
c_j: número de itens frescos na fase j. (Tome $c_1 = 0$.)

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.
$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$.
c_j: número de itens frescos na fase j. (Tome $c_1 = 0$.)

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Consequência:

$$2f(d) - f_1(d) - f_r(d) \;=\; \sum_{j=1}^{r-1}(f_j(d) + f_{j+1}(d)) \;\geq\; \sum_{j=1}^{r-1} c_{j+1}$$

Um algoritmo melhor

Fase j:
item desmarcado é fresco se não foi marcado na fase $j-1$
e é amanhecido caso contrário.

$f_j(d)$: número de falhas da política ótima na fase j.
$f(d) = \sum_{j=1}^{r} f_j(d)$.
c_j: número de itens frescos na fase j. (Tome $c_1 = 0$.)

Lema: $f_j(d) + f_{j+1}(d) \geq c_{j+1}$

Consequência:

$$2f(d) - f_1(d) - f_r(d) \;=\; \sum_{j=1}^{r-1}(f_j(d) + f_{j+1}(d)) \;\geq\; \sum_{j=1}^{r-1} c_{j+1}$$

Logo, $2\,f(d) \geq \sum_{j=1}^{r} c_j$.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$.

Note que
$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$.

Note que
$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$.

Note que
$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Cache:	frescos	$c \leq c_j$
	amanhecidos marcados	$i - 1$
	amanhecidos desmarcados	$k - c - i + 1$

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$.

Note que
$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Cache:	frescos	$c \leq c_j$
	amanhecidos marcados	$i - 1$
	amanhecidos desmarcados	$k - c - i + 1$

Logo o número de amanhecidos fora do cache é c.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

$$\Pr[\text{falha no } i\text{-ésimo amanhecido}] = \frac{c}{k-i+1} \leq \frac{c_j}{k-i+1}.$$

($k - i + 1$: número de amanhecidos no cache)

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

$$\Pr[\text{falha no } i\text{-ésimo amanhecido}] = \frac{c}{k-i+1} \leq \frac{c_j}{k-i+1}.$$

($k - i + 1$: número de amanhecidos no cache)

Logo $\mathrm{E}[X_j] \leq c_j + \sum_{i=c_j+1}^{k} \frac{c_j}{i} = c_j(1 + H_k - H_{c_j}) \leq c_j H_k$ e

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

$$\Pr[\text{falha no } i\text{-ésimo amanhecido}] \;=\; \frac{c}{k-i+1} \;\le\; \frac{c_j}{k-i+1}.$$

($k-i+1$: número de amanhecidos no cache)

Logo $\mathrm{E}[X_j] \le c_j + \sum_{i=c_j+1}^{k} \frac{c_j}{i} = c_j(1 + H_k - H_{c_j}) \le c_j H_k$ e

$$\mathrm{E}[X] \;=\; \sum_{j=1}^{r} \mathrm{E}[X_j] \;\le\; \sum_{j=1}^{r} c_j H_k \;\le\; 2H_k f(d) \;=\; \mathrm{O}(\lg k)\, f(d).$$

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

$$\Pr[\text{falha no } i\text{-ésimo amanhecido}] = \frac{c}{k-i+1} \leq \frac{c_j}{k-i+1}.$$

($k - i + 1$: número de amanhecidos no cache)

Temos que $\mathrm{E}[X] = \mathrm{O}(\lg k) f(d)$.

Análise deste algoritmo aleatorizado

X_j: número de falhas do algoritmo aleatorizado na fase j.

$X_j = c_j$ falhas por itens frescos + falhas por amanhecidos.

Queremos estimar $\mathrm{E}[X]$, onde $X = \sum_{j=1}^{r} X_j$.

Considere a requisição do i-ésimo amanhecido na fase j.

Número de amanhecidos fora do cache é c, assim

$$\Pr[\text{falha no } i\text{-ésimo amanhecido}] = \frac{c}{k-i+1} \leq \frac{c_j}{k-i+1}.$$

($k - i + 1$: número de amanhecidos no cache)

Temos que $\mathrm{E}[X] = \mathrm{O}(\lg k) f(d)$.

Portanto esse algoritmo é $\mathrm{O}(\lg k)$-competitivo.

Exercício 10 da Lista 4

Três provas (natação, corrida, ciclismo), n participantes.

Tempos estimados de prova para cada participante:
n_i, c_i, b_i para $i = 1, \ldots, n$

Provas de natação não podem ser simultâneas.

Em que ordem os participantes devem fazer as provas para minimizar o tempo estimado de conclusão de todas as provas?

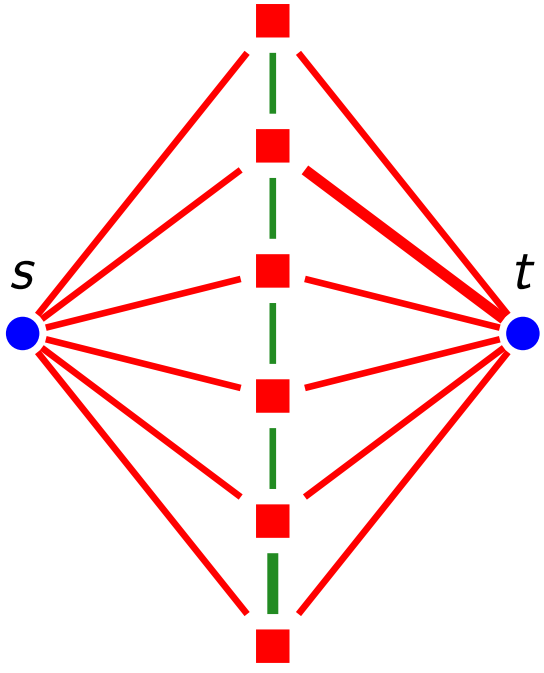
Mostre que esta variante do exercício 9 da lista 4, em que os participantes podem fazer suas provas em uma ordem arbitrária, é NP-difícil.

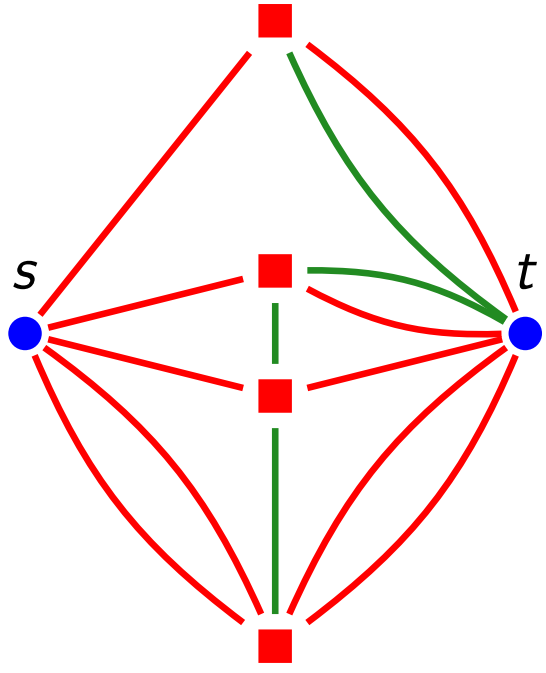
Exercício 10 da Lista 4

Dica: Mesmo instâncias em que $b_i = 0$ para todo i são difíceis.

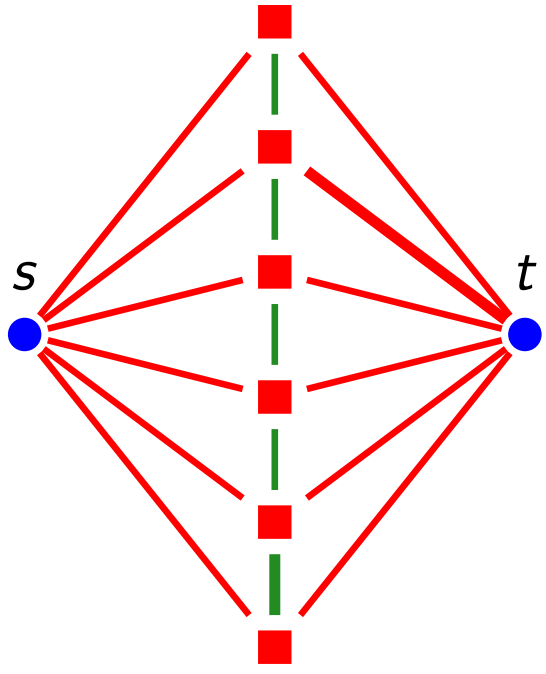
Tente fazer uma redução a partir do problema da partição:
dados números inteiros $a_1, \ldots, a_n$, determinar se
existe $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \notin S} a_i$.

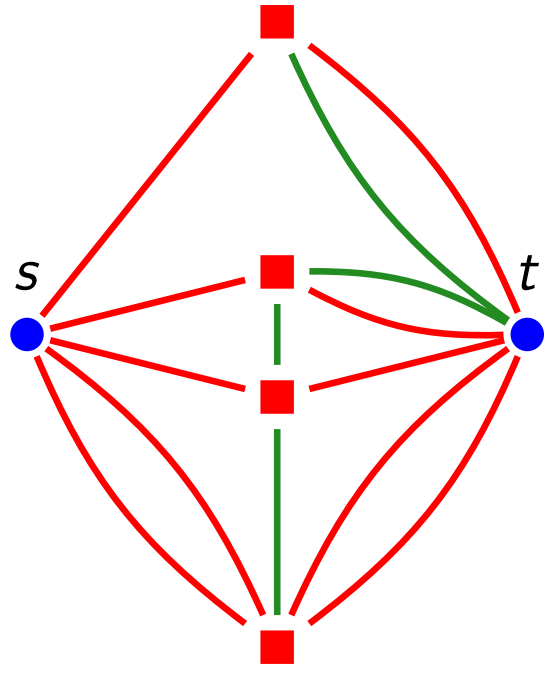
Exercício 12 da Lista 3





Exercício 12 da Lista 3

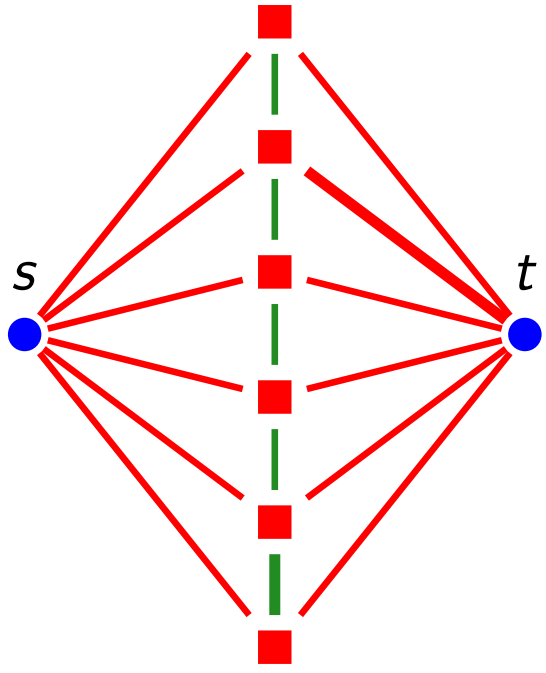


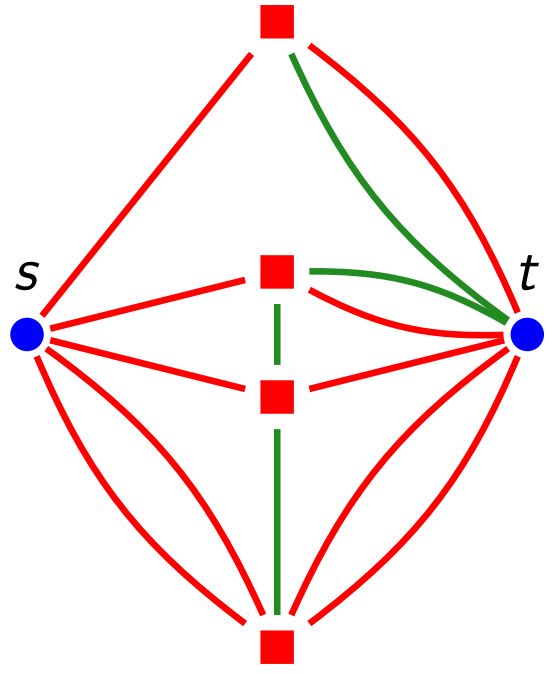


Antes da i-ésima contração, há $n-1-i$ vértices no meio e

- a arestas incidentes a s, onde $a \geq n-1-i$
- a arestas vermelhas incidentes a t
- entre $n-2-i$ e $2(n-1-i)$ arestas verdes

Exercício 12 da Lista 3





Antes da i-ésima contração, há $n-1-i$ vértices no meio e

- a arestas incidentes a s, onde $a \geq n-1-i$
- a arestas vermelhas incidentes a t
- entre $n-2-i$ e $2(n-1-i)$ arestas verdes

Então $|E| \leq 2a + 2(n-1-i) \leq 4a$ e

$$\Pr[\text{contrair aresta de } \delta(s)] = \frac{a}{|E|} \geq \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}.$$