

MAC 6711 - Tópicos de Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Primeiro semestre de 2023

Lista 6

1. (CLRS 17.1-2) Mostre que se incluirmos uma operação **Decrementa** nas operações de manipulação de um contador binário com k bits, n operações podem custar tempo $\Theta(nk)$.
2. (CLRS 17.2-1) Uma sequência de operações sobre uma pilha é executada numa pilha cujo tamanho nunca excede k . Depois de cada k operações, uma cópia da pilha toda é feita para propósito de *back-up*. Mostre que o custo de n operações sobre a pilha, incluindo a operação de cópia para *back-up*, é $O(n)$, atribuindo valores adequados de créditos a cada operação.
3. (CLRS 17.2-3) Suponha que desejamos não apenas incrementar um contador mas também algumas vezes reinicializá-lo com zero. Mostre como implementar um contador com um vetor binário de maneira que qualquer sequência de n operações **incrementa1** e **zera_contador** consuma tempo $O(n)$, desde que o contador esteja inicialmente com zero. (**Dica:** Mantenha um apontador para o 1 mais significativo do contador.)
4. Suponha que desejemos que nossa tabela dinâmica também seja diminuída se sua ocupação diminui significativamente. Ou seja, queremos que, em uma remoção, caso a tabela fique “muito vazia”, seja alocado um novo vetor menor, e os elementos que estão atualmente na tabela grande sejam copiados para o vetor menor e o vetor grande seja desalocado. Sugira um esquema para isso que resulte em um custo amortizado constante para operações de inserção e remoção. Faça a análise do esquema proposto justificando a sua resposta.
5. Considere a seguinte alternativa para representar um contador binário com k bits. O contador é representado por dois vetores com k posições, $P[0..k-1]$ e $N[0..k-1]$, onde, para cada i , no máximo um entre $P[i]$ e $N[i]$ vale 1. (O valor real do contador é a diferença $P - N$.)

Abaixo estão implementações das operações de **Incrementa** e **Decrementa** para tal representação. Para simplificar, assumimos que o número k é grande o suficiente para que os algoritmos abaixo não acessem um índice inválido.

Algoritmo Incrementa (P, N)

1. $i \leftarrow 0$
2. **enquanto** $P[i] = 1$ **faça**
3. $P[i] \leftarrow 0$
4. $i \leftarrow i + 1$
5. **se** $N[i] = 1$
6. **então** $N[i] \leftarrow 0$
7. **senão** $P[i] \leftarrow 1$

Algoritmo Decrementa (P, N)

1. $i \leftarrow 0$
2. **enquanto** $N[i] = 1$ **faça**
3. $N[i] \leftarrow 0$
4. $i \leftarrow i + 1$
5. **se** $P[i] = 1$
6. **então** $P[i] \leftarrow 0$
7. **senão** $N[i] \leftarrow 1$

Abaixo está um exemplo destes algoritmos em ação. (Note que qualquer número exceto o zero pode ser representado de diversas maneiras.)

$P = 10001$		$P = 10010$		$P = 10011$		$P = 10000$		$P = 10000$		$P = 10000$		$P = 10001$
$N = 01100$	+1	$N = 01100$	+1	$N = 01100$	+1	$N = 01000$	-1	$N = 01001$	-1	$N = 01010$	+1	$N = 01010$
$P - N = 5$		$P - N = 6$		$P - N = 7$		$P - N = 8$		$P - N = 7$		$P - N = 6$		$P - N = 7$

Suponha que o contador começa de $(0, 0)$ (ou seja, $P = 0^k$ e $N = 0^k$), e sejam aplicadas n operações, cada uma delas sendo um **Incrementa** ou um **Decrementa**. Suponha que $n < 2^k$, de modo que de fato os algoritmos não acessem um índice inválido dos vetores. Neste caso, o custo de pior caso do **Incrementa** e do **Decrementa** é $\Theta(\lg n)$.

Prove que o custo amortizado do **Incrementa** e do **Decrementa** é $O(1)$.

6. Exercício 1.3 de <http://cs.nyu.edu/~yap/classes/funAlgo/05f/lect/l6.pdf>.

7. Dados $n + 1$ pontos $p, p_1, \dots, p_n$, dizemos que p é uma *combinação convexa* de $p_1, \dots, p_n$ se existem números reais não-negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que (a) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e (b) $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = p$. O *fecho convexo* de uma coleção finita de pontos é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos da coleção. O *casco convexo* de uma coleção finita de pontos é o polígono que delimita o fecho convexo dessa coleção. Como o casco convexo é um polígono, ele pode ser dado por uma sequência de pontos: os vértices do polígono. Note que os pontos dessa sequência são sempre pontos da coleção original de pontos.

O seguinte algoritmo, de Graham, determina o casco convexo da coleção $\{p_1, \dots, p_n\}$. Vamos supor, para simplificar, que não há na coleção três pontos colineares. No pseudo-código abaixo, para três pontos distintos p, q e w , denotamos por $\theta(p, q, w)$ o ângulo entre a reta que passa por p e q e a reta que passa por q e w .

```
GRAHAM( $p, n$ )
1  PRELIMINARES ( $p, n$ )
2   $p[n + 1] \leftarrow p[1]$ 
3   $c[1] \leftarrow p[1]$ 
4   $t \leftarrow 1$ 
5  para  $k \leftarrow 2$  até  $n$  faça
6     $t \leftarrow t + 1$ 
7     $c[t] \leftarrow p[k]$ 
8    enquanto  $t > 2$  e  $\theta(c[t - 1], c[t], p[k + 1]) \leq 180^\circ$  faça
9       $t \leftarrow t - 1$ 
10 devolva  $c$ 

PRELIMINARES( $p, n$ )
1   $min \leftarrow 1$ 
2  para  $i \leftarrow 2$  até  $n$  faça
3    se  $y(p[i]) < y(p[min])$ 
4      então  $min \leftarrow i$ 
5   $p[1] \leftrightarrow p[min]$ 
6  seja  $q$  um ponto tal que a reta que passa por  $q$  e  $p[1]$  é paralela ao eixo  $x$ 
7  ordene  $p[2..n]$  de modo que  $\theta(q, p[1], p[2]) < \dots < \theta(q, p[1], p[n])$ 
```

Demonstre que as linhas 2 a 10 do algoritmo de Graham consomem tempo $O(n)$.

8. Como na aula para o *rr-splay* step, faça a análise do *lr-splay* step e do *r-splay* step.
9. Mostre que $\lg(\lg^* n) = O(\lg^*(\lg n))$.
10. Considere a implementação do union-find por árvores enraizadas com compressão de caminhos e heurística dos ranks (a árvore de menor rank é pendurada na de menor rank no union). Considere uma sequência qualquer (válida) de m operações MAKESET, FINDSET e LINK em que todas as operações LINK aparecem antes das operações FINDSET. Mostre que tal sequência consome, no pior caso, tempo $O(m)$. O que acontece com o tempo consumido por uma sequência deste tipo se apenas compressão de caminhos estiver implementada?