Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação
à dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

CLRS 34

Redução polinomial

Permite comparar
o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Π, Π': problemas

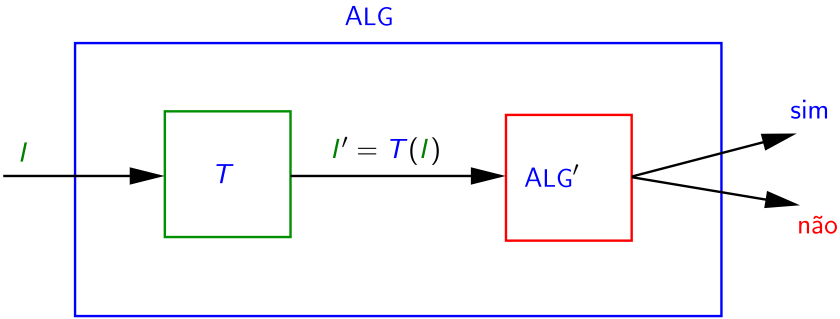
Uma redução de Π a Π' é um algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG′ que resolve Π', de forma que, se ALG′ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \leq_P \Pi'$ = existe uma redução de Π a Π'.

Π e Π' problemas de decisão.

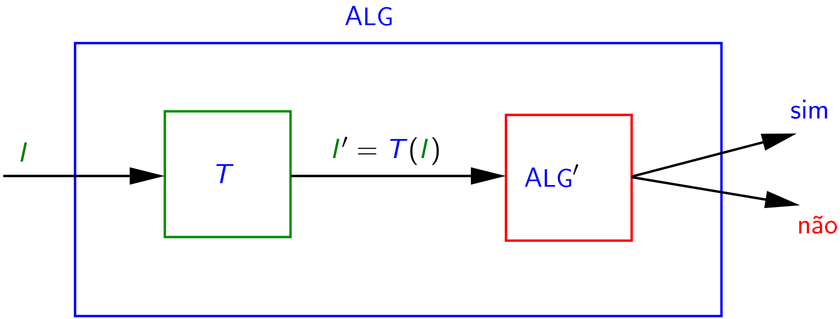
Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π' está em P, então Π está em P.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG'.

Esquema comum de redução



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

T transforma uma instância I de Π em
uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{sim} \text{ se e somente se } \Pi'(I') = \text{sim}$$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_3)$$

Se $t(x_1) = \text{verdade}, t(x_2) = \text{falso}, t(x_3) = \text{falso}$,
então $t(\phi) = \text{verdade}$

Se $t(x_1) = \text{verdade}, t(x_2) = \text{verdade}, t(x_3) = \text{falso}$,
então $t(\phi) = \text{falso}$

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & x_1 & & & & & \geq & 1 \\ - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\ & & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

tem uma solução 0-1?

Sistemas lineares 0-1

Problema: Dadas uma matriz A e um vetor b,

$$Ax \geq b$$

possui uma solução tal que $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ para todo i?

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & x_1 & & & & & \geq & 1 \\ - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\ & & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

tem uma solução 0-1?

Sim! $x_1 = 1, x_2 = 0$ e $x_3 = 0$ é solução.

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que ϕ é satisfatível se e somente se
o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que ϕ é satisfatível se e somente se
o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que ϕ é satisfatível se e somente se
o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & \geq & 1 \\ 1 - x_1 & + & 1 - x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & & & & 1 - x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

Exemplo 1

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

A transformação T recebe uma fórmula booleana ϕ
e devolve um sistema linear $Ax \geq b$
tal que ϕ é satisfatível se e somente se
o sistema $Ax \geq b$ admite uma solução 0-1.

Exemplo:

$$\phi = (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$$

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
 & x_1 & & & & & \geq & 1 \\
- & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -1 \\
 & & & & - & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Exemplo 2

Verifique que

$$\text{Ciclo hamiltoniano} \leq_P \text{Caminho hamiltoniano entre } u \text{ e } v$$

Exemplo 2

Verifique que

$$\text{Ciclo hamiltoniano} \leq_P \text{Caminho hamiltoniano entre } u \text{ e } v$$

Verifique que

$$\text{Caminho hamiltoniano entre } u \text{ e } v \leq_P \text{Caminho hamiltoniano}$$

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Suponha que G tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem n^2 variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplo 3

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um grafo G e devolve uma fórmula booleana $\phi(G)$ tal que

$$G \text{ tem caminho hamiltoniano} \Leftrightarrow \phi(G) \text{ é satisfatível.}$$

Suponha que G tem vértices $1, \ldots, n$.

$\phi(G)$ tem n^2 variáveis $x_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Interpretação: $x_{i,j}$ = verdade $\Leftrightarrow$ vértice j é o i-ésimo vértice do caminho.

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- "vértice j faz parte do caminho":

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

  para cada j (n claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- "vértice j faz parte do caminho":

  $$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

  para cada j (n claúsulas).

- "vértice j não está em duas posições do caminho":

  $$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j})$$

  para cada j e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Claúsulas de $\phi(G)$:

- "vértice j faz parte do caminho":

$$(x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j})$$

para cada j (n claúsulas).

- "vértice j não está em duas posições do caminho":

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j})$$

para cada j e $i \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- "algum vértice é o i-ésimo do caminho":

$$(x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,n})$$

para cada i (n claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o i-ésimo":

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o i-ésimo":

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- "se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho":

$$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o i-ésimo":

  $$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- "se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho":

  $$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas e
cada claúsula tem $\leq n$ literais. Logo, $\langle\phi(G)\rangle$ é $\mathrm{O}(n^4)$.

Exemplo 3 (cont.)

Mais claúsulas de $\phi(G)$:

- "dois vértices não podem ser o i-ésimo":

$$(\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k})$$

  para cada i e $j \neq k$ ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

- "se ij não é aresta, j não pode seguir i no caminho":

$$(\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j})$$

  para cada ij que não é aresta ($\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas).

A fórmula $\phi(G)$ tem $\mathrm{O}(n^3)$ claúsulas e cada claúsula tem $\leq n$ literais. Logo, $\langle\phi(G)\rangle$ é $\mathrm{O}(n^4)$.

Não é difícil projetar o algoritmo polinomial T.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$
tal que $t(\phi(G)) = \text{verdade}$.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja t : {variáveis} $\rightarrow$ {verdade, falso}
tal que $t(\phi(G)) =$ verdade.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) =$ verdade.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$
tal que $t(\phi(G)) =$ verdade.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) =$ verdade.
Logo, t é a codificadação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \;\Leftrightarrow\; t(x_{i,j}) = \text{verdade}.$$

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja t : $\{\text{variáveis}\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$
tal que $t(\phi(G)) = \text{verdade}$.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) = \text{verdade}$.
Logo, t é a codificadação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \iff t(x_{i,j}) = \text{verdade}.$$

Para cada k, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de G.

Exemplo 3 (cont.)

$\phi(G)$ satisfatível $\Rightarrow$ G tem caminho hamiltoniano.

Prova: Seja $t : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$ tal que $t(\phi(G)) = \text{verdade}$.

Para cada i, existe um único j tal que $t(x_{i,j}) = \text{verdade}$.
Logo, t é a codificadação de uma permutação

$$\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$$

dos vértices de G, onde

$$\pi(i) = j \;\Leftrightarrow\; t(x_{i,j}) = \text{verdade}.$$

Para cada k, $(\pi(k), \pi(k+1))$ é uma aresta de G.

Logo, $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano.

Exemplo 3 (cont.)

G tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow \phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde π é uma permutação dos vértices de G.

Exemplo 3 (cont.)

G tem caminho hamiltoniano $\Rightarrow$ $\phi(G)$ satisfatível.

Suponha que $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ é um caminho hamiltoniano, onde π é uma permutação dos vértices de G.

Então

$$t(x_{i,j}) = \text{verdade } se\ \pi(i) = j\ e$$

$$t(x_{i,j}) = \text{falso } se\ \pi(i) \neq j,$$

é uma atribuição de valores que satisfaz todas as claúsulas de $\phi(G)$.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Π e Π' problemas de decisão.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo
se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin:
Satisfatibilidade é NP-completo.

Π e Π' problemas de decisão.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo
se e somente se $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

Para isto devemos:

- Demonstrar que Π' está em NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada uma fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Vamos mostrar que Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade.

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por claúsula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível } \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por claúsula tal que

$$\phi \text{ é satisfatível} \iff \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir cada claúsula de ϕ por uma coleção de claúsulas com exatamente 3 literais cada, e equivalente a ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma variável nova.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$,
onde y é uma variável nova.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\ \ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$

$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\ \ldots$

$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \lor l_2 \lor \cdots \lor l_k)$ por

$(l_1 \lor l_2 \lor y_1)$

$(\neg y_1 \lor l_3 \lor y_2)\,(\neg y_2 \lor l_4 \lor y_3)\,(\neg y_3 \lor l_5 \lor y_4)\ \ldots$

$(\neg y_{k-3} \lor l_{k-1} \lor l_k)$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas.

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova claúsula é $\mathrm{O}(q)$,
onde q é o número de literais que ocorrem em ϕ
(contando-se as repetições).

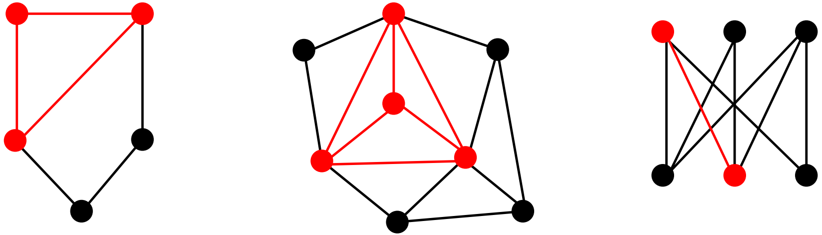
Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui um clique com $\geq k$ vértices?

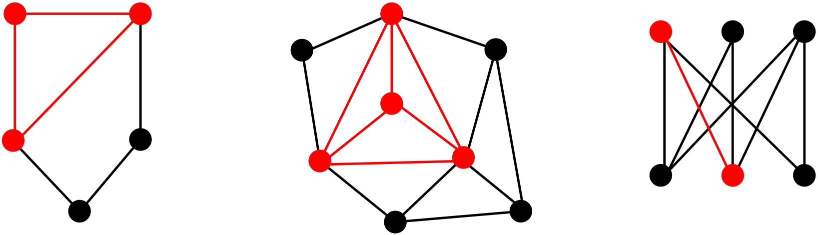
Exemplos:



Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:



clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula, o grafo G terá três vértices,
um correspondente a cada literal da cláusula.
Logo, G terá $3k$ vértices.

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe uma fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula, o grafo G terá três vértices,
um correspondente a cada literal da cláusula.
Logo, G terá $3k$ vértices.
Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

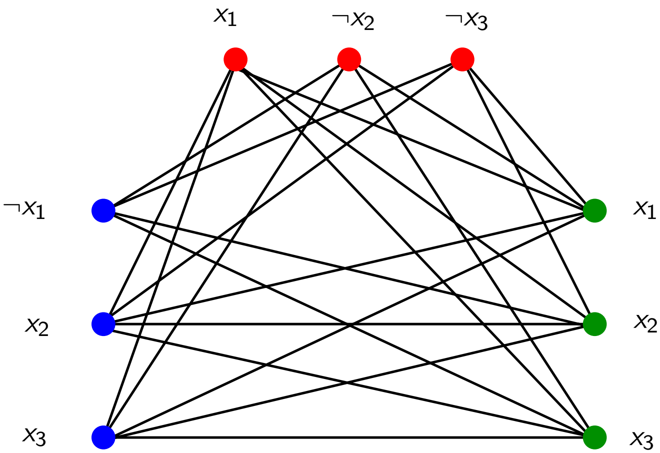
- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes claúsulas; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k,
G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Cobertura por vértices

Um conjunto S de vértices de um grafo G é uma cobertura se toda aresta de G tem uma ponta em S.

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui uma cobertura com $\leq k$ vértices?

Você consegue provar que este problema é NP-completo?

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica que $P = NP$.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil,
  mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles . . .

Exercícios

Exercício 25.A

Suponha que os algoritmos ALG e ALG′ transformam cadeias de caracteres em outras cadeias de caracteres. O algoritmo ALG consome $\mathrm{O}(n^2)$ unidades de tempo e o algoritmo ALG′ consome $\mathrm{O}(n^4)$ unidades de tempo, onde n é o número de caracteres da cadeia de entrada. Considere agora o algoritmo ALGALG′ que consiste na composição de ALG e ALG′, com ALG′ recebendo como entrada a saída de ALG. Qual o consumo de tempo de ALGALG′?

Exercício 25.B [CLRS 34.1-4]

O algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é polinomial? Justifique a sua resposta.

Exercício 25.C [CLRS 34.1-5]

Seja ALG um algoritmo que faz um número constante de chamadas a um algoritmo ALG′. Suponha que se o consumo de tempo de ALG′ é constante então o consumo de tempo de ALG é polinomial.

1. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial então o consumo de tempo de ALG é polinomial.
2. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial e ALG faz um número polinomial de chamadas a ALG′, então é possível que o consumo de tempo de ALG seja exponencial.

Mais exercícios

Exercício 25.D [CLRS 34.2-1]
Mostre que o problema de decidir se dois grafos dados são isomorfos está em NP.

Exercício 25.E [CLRS 34.2-2]
Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano (= possui um ciclo hamiltoniano).

Exercício 25.F [CLRS 34.2-3]
Mostre que se o problema do Ciclo hamiltoniano está em P, então o problema de listar os vértices de um ciclo hamiltoniano, na ordem em que eles ocorrem no ciclo, pode ser resolvido em tempo polinomial.

Exercício 25.G [CLRS 34.2-5]
Mostre que qualquer problema em NP pode ser resolvido por um algoritmo de consumo de tempo $2^{\mathrm{O}(n^c)}$, onde n é o tamanho da entrada e c é uma constante.

Exercício 25.H [CLRS 34.2-6]
Mostre que o problema do Caminho hamiltoniano está em NP.

Exercício 25.I [CLRS 34.2-7]
Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos orientado acíclicos.

Mais exercícios

Exercício 25.J [CLRS 34.2-8]
Uma fórmula booleana ϕ é uma tautologia se $t(\phi) = \text{verdade}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em co-NP.

Exercício 25.K [CLRS 34.2-9]
Prove que $\mathrm{P} \subseteq \text{co-NP}$.

Exercício 25.L [CLRS 34.2-10]
Prove que se $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$, então $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

Exercício 25.M [CLRS 34.2-11]
Se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G^3 é o grafo que se obtém a partir de G ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em G por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que G^3 é hamiltoniano.

Exercício 25.N [CLRS 34.3-2]
Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Mais exercícios

Exercício 25.O [CLRS 34.3-7]
Suponha que Π e Π' são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{sim}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{não}$. Mostre que Π é NP-completo se e somente se Π' é co-NP-completo. (Um problema Π' é co-NP-completo se Π' está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema Π em co-NP.)

Exercício 25.P [CLRS 34.4-4]
Mostre que o problema de decidir se uma fórmula boolena é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

Exercício 25.Q [CLRS 34.4-6]
Suponha que ALG' é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade.
Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{verdade}, \text{falso}\}$ tal que $t(\phi) = \text{verdade}$.

Exercício 25.Q [CLRS 34.5-3]
Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

Exercício 25.R [CLRS 34.5-6]
Mostre que o problema Caminho hamiltoniano é NP-completo.

Exercício 25.S [CLRS 34.5-7]
Mostre que o problema de encontrar um ciclo de comprimento máximo é NP-completo.