Análise amortizada

Notas de aula de um curso do Robert Tarjan

"*Amortized Analysis Explained*"

por Rebecca Fiebrink, Princeton University

Splay trees

São árvores binárias de busca auto-ajustáveis!

ABB: árvore de busca binária

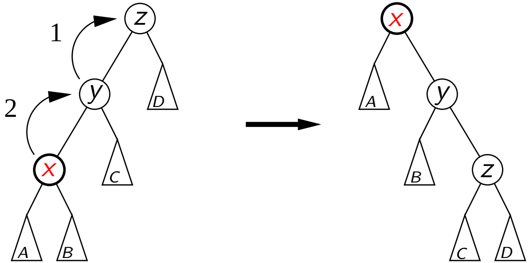
Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.

Splay steps

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.

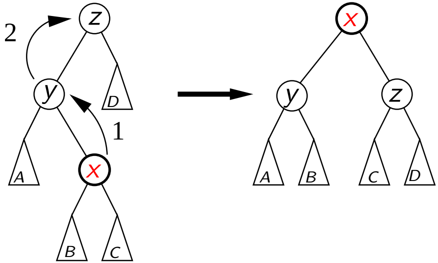


Acima, o rr splay step.

Splay steps

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.

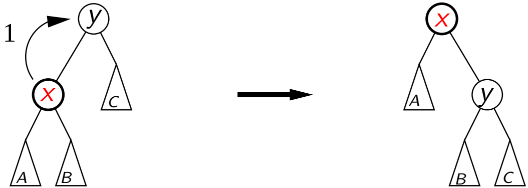


Acima, o lr splay step.

Splay steps

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.

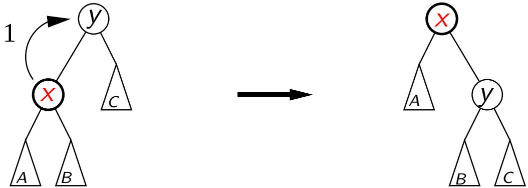


Acima, o r splay step.

Splay steps

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



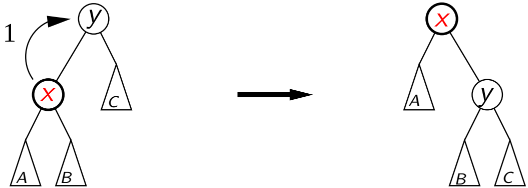
Acima, o r splay step.

Além destes, o l splay, o rl splay e o ll splay step.

Splay steps

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

A operação splay é uma série de splay steps duplos,
e possivelmente um simples no final.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



Acima, o r splay step.

Além destes, o l splay, o rl splay e o ll splay step.

Splay steps são realizados até que x seja raiz.

Splay trees

Operação SPLAY(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do SPLAY: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
um comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

(ABBB: ABB balanceada)

Análise por pontencial

S: splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i
$s_i(x) = |S_i(x)|$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o potencial local no nó x.

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Análise por pontencial

S: splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i
$s_i(x) = |S_i(x)|$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o potencial local no nó x.

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

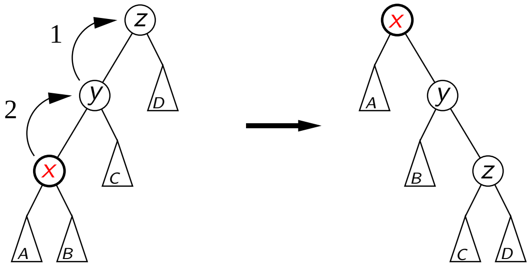
Mostraremos que o custo amortizado por SPLAY é $\mathrm{O}(\lg n)$.

Análise amortizada dos splay steps.

x participa de todos os splay steps de SPLAY(x, S).

Análise amortizada dos splay steps

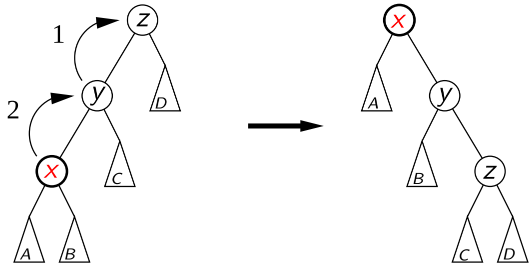
Caso do rr splay step.



Custo real: 2

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.

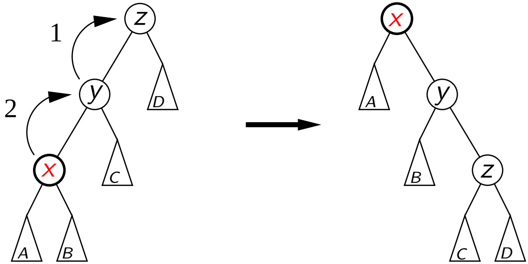


Custo real: 2

Alteração no potencial:
$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w))$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.



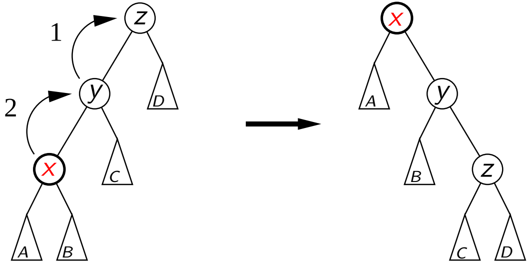
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w))$$
$$= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z))$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.



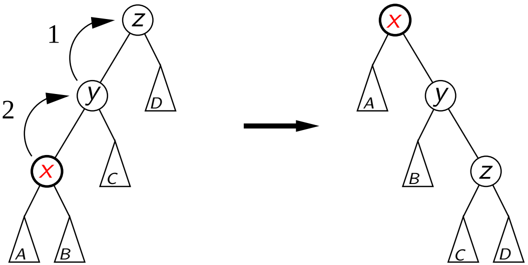
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\
&= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\
&= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y))
\end{aligned}
$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.



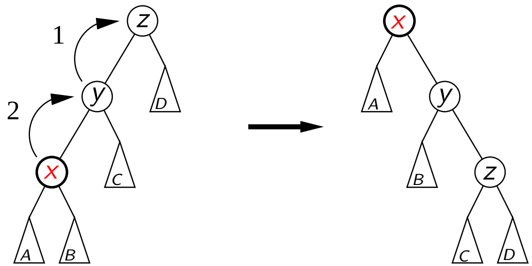
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\
&= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\
&= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y)) \\
&< r_i(y) + r_i(z) - 2\, r_{i-1}(x)
\end{aligned}
$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.

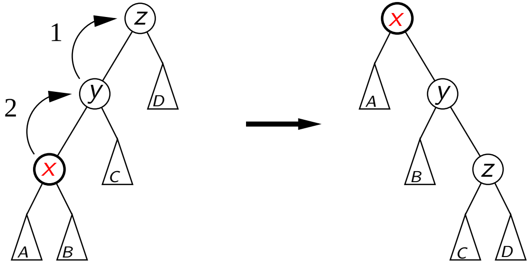


Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.



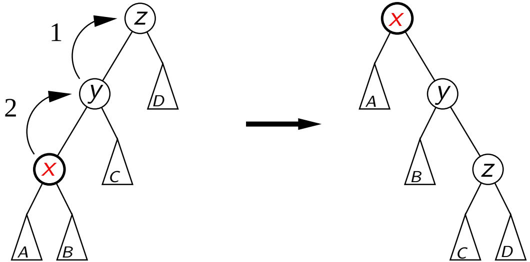
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \; < \; 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do rr splay step.



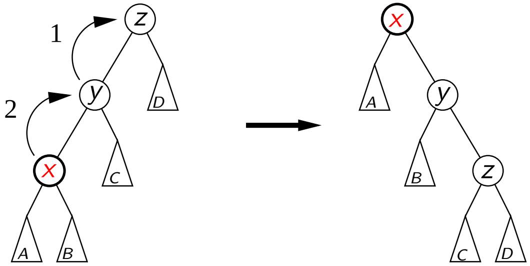
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i \; < \; 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

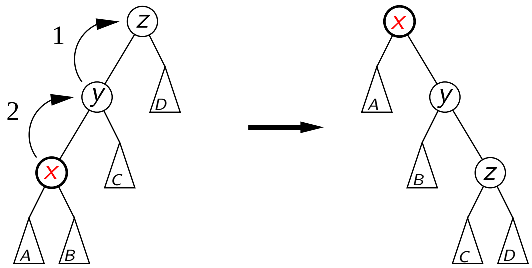
Queremos uma delimitação que dependa apenas de x.

Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log(\frac{a+b}{2})$ (função log é côncava).

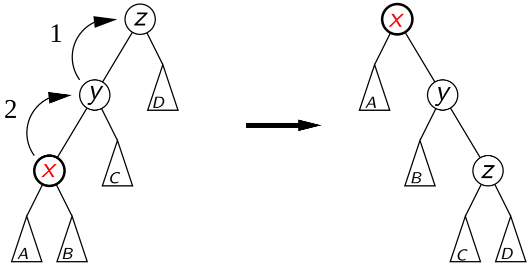
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log(\frac{a+b}{2})$ (função log é côncava). Logo

$$
\begin{aligned}
r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\
&\leq 2 \lg\left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

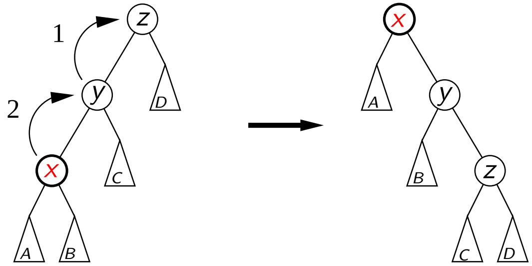
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log(\frac{a+b}{2})$ (função log é côncava). Logo

$$
\begin{aligned}
r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\
&\leq 2 \lg\left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2}\right) < 2 \lg\left(\frac{s_i(x)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

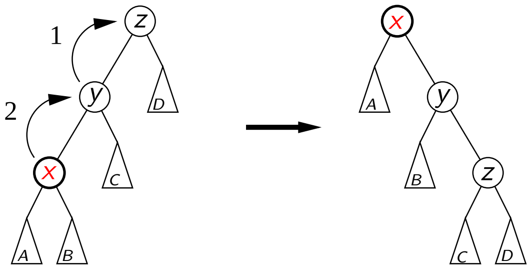
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log(\frac{a+b}{2})$ (função log é côncava). Logo

$$
\begin{aligned}
r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\
&\leq 2 \lg \left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2}\right) \; < \; 2 \lg \left(\frac{s_i(x)}{2}\right) \\
&= 2 (\lg s_i(x) - 1)
\end{aligned}
$$

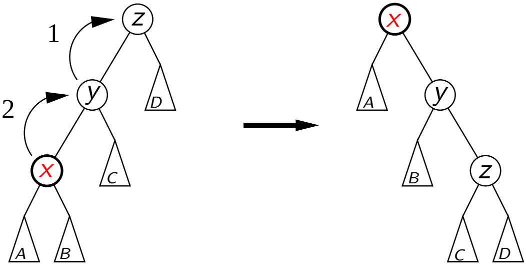
Caso do rr splay step



Temos que $\frac{\log a + \log b}{2} \leq \log(\frac{a+b}{2})$ (função log é côncava). Logo

$$
\begin{aligned}
r_{i-1}(x) + r_i(z) &= \lg s_{i-1}(x) + \lg s_i(z) \\
&\leq 2 \lg \left(\frac{s_{i-1}(x) + s_i(z)}{2}\right) \;<\; 2 \lg \left(\frac{s_i(x)}{2}\right) \\
&= 2\,(\lg s_i(x) - 1) \;=\; 2\,(r_i(x) - 1).
\end{aligned}
$$

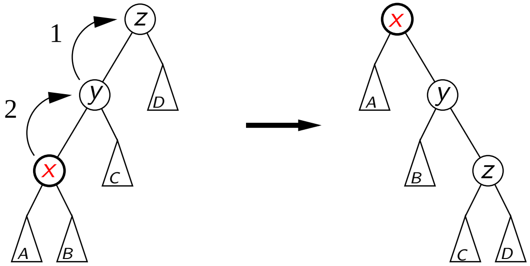
Caso do rr splay step



Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) \ < \ 2\, r_i(x) - 2.$$

Caso do rr splay step



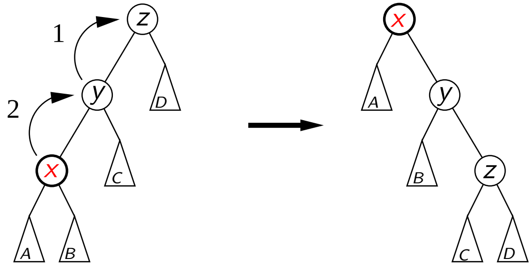
Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) \; < \; 2\, r_i(x) - 2.$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &\leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x) \\ &< 2 + r_i(x) + (2\, r_i(x) - 2 - r_{i-1}(x)) - 2r_{i-1}(x) \end{aligned}$$

Caso do rr splay step



Logo

$$r_{i-1}(x) + r_i(z) \; < \; 2\, r_i(x) - 2.$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &\leq 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x) \\ &< 2 + r_i(x) + (2\, r_i(x) - 2 - r_{i-1}(x)) - 2r_{i-1}(x) \\ &= 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x)). \end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Para l splay steps e r splay steps, vale que

$$\hat{c}_i \leq 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Análise amortizada dos splay steps

Analogamente podemos mostrar que

$$\hat{c}_i < 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x))$$

para rl splay steps, lr splay steps, e ll splay steps.

Para l splay steps e r splay steps, vale que

$$\hat{c}_i \le 3\,(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1.$$

Se m é o número de splay steps e n o número de nós,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i &\le 3\sum_{i=1}^{m}(r_i(x) - r_{i-1}(x)) + 1 \\ &= 3(r_m(x) - r_0(x)) + 1 \\ &\le 3 \lg n + 1. \end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i.

Então vale que o custo do SPLAY(x, S) é

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \;=\; \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \;-\Phi_m + \Phi_0 \leq \;3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0,$$

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i.

Então vale que o custo do SPLAY(x, S) é

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0,$$

onde Φ_0 é o potencial da árvore inicial, que pode não ser zero.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i.

Então vale que o custo do SPLAY(x, S) é

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \;=\; \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \;-\Phi_m + \Phi_0 \leq \; 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0,$$

onde Φ_0 é o potencial da árvore inicial, que pode não ser zero.

Vamos mostrar algo semelhante para inserções em splay trees.

Análise amortizada dos splay steps

Lembre-se que $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Ou seja, $\Phi_i \geq 0$ para todo i.

Então vale que o custo do SPLAY(x, S) é

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \leq 3 \lg n + 1 - \Phi_m + \Phi_0,$$

onde Φ_0 é o potencial da árvore inicial, que pode não ser zero.

Vamos mostrar algo semelhante para inserções em splay trees.

E disso é possível concluir que o custo amortizado
por operação em uma splay tree é $\mathrm{O}(\lg n)$.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a SPLAY no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a SPLAY no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e
y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causada pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a SPLAY no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e
y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causada pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$\Delta\Phi = \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j)))$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB,
seguida de uma chamada a SPLAY no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e
y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causada pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j))) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lg \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)}
\end{aligned}
$$

Inserções em splay trees

A inserção em splay trees é igual à inserção em ABB, seguida de uma chamada a SPLAY no elemento inserido.

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causada pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j))) \\ &= \sum_{j=1}^{k}\lg\frac{s(y_j)+1}{s(y_j)} = \lg\Big(\prod_{j=1}^{k}\frac{s(y_j)+1}{s(y_j)}\Big)\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causado pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$\Delta\Phi = \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j)))$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causado pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^{k} (r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k} (\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j))) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lg \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)} = \lg \Big(\prod_{j=1}^{k} \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)} \Big)
\end{aligned}$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causado pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j))) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lg \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)} = \lg \Big(\prod_{j=1}^{k} \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)}\Big) \\
&\leq \lg \Big(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k)+1}{s(y_k)}\Big) \quad \text{(pois } s(y_j)+1 \leq s(y_{j+1})\text{)}
\end{aligned}
$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causado pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \sum_{j=1}^{k}(r'(y_j) - r(y_j)) = \sum_{j=1}^{k}(\lg(s(y_j)+1) - \lg(s(y_j))) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lg \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)} = \lg\Big(\prod_{j=1}^{k} \frac{s(y_j)+1}{s(y_j)}\Big) \\
&\leq \lg\Big(\frac{s(y_2)}{s(y_1)} \cdot \frac{s(y_3)}{s(y_2)} \cdots \frac{s(y_k)}{s(y_{k-1})} \cdot \frac{s(y_k)+1}{s(y_k)}\Big) \quad \text{(pois } s(y_j)+1 \leq s(y_{j+1})\text{)} \\
&= \lg\Big(\frac{s(y_k)+1}{s(y_1)}\Big) \leq \lg(n+1).
\end{aligned}
$$

Inserções em splay trees

Seja y_1 o pai de x após a inserção, e y_i o pai de y_{i-1} para $i = 1, \ldots, k$, onde y_k é a raiz da árvore.

Considere a variação do potencial causado pela inserção.

r: potencial local antes da inserção
r': potencial local depois da inserção

Então $\Delta\Phi \leq \lg(n+1)$ e,
como uma inserção não faz rotações, $c = 0$ e temos que

$$\hat{c} \leq 0 + \lg n + 1 = \lg n + 1.$$

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i &= \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \; - \Phi_m + \Phi_0 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\
&\leq 3m \lg m + m - 0 \\
&\leq 4m \lg m.
\end{aligned}$$

Concluindo a análise

Lembre-se que $\Phi_i \geq 0$ para todo i e agora $\Phi_0 = 0$.
(Começamos da árvore vazia.)

Então o custo total de m operações é

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i &= \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \; - \Phi_m + \Phi_0 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} (3 \lg n_i + 1) - \Phi_m + \Phi_0 \\
&\leq 3m \lg m + m - 0 \\
&\leq 4m \lg m.
\end{aligned}$$

Portanto o custo amortizado por operação é $\mathrm{O}(\lg m)$.