

Análise amortizada

Notas de aula de um curso do Robert Tarjan

"Amortized Analysis Explained"

por Rebecca Fiebrink, Princeton University

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar:
constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Move to front

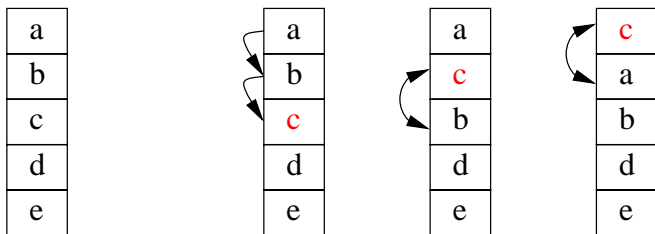
Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.



Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i -ésimo elemento: $2i - 1$.

Move to front

Considere uma lista ligada.

Custo do acesso ao i -ésimo elemento: i .

Custo de trocar dois elementos consecutivos de lugar: constante, descontado o tempo de acessar um deles.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Com MTF, custo do acesso ao i -ésimo elemento: $2i - 1$.

Considere uma sequência de acessos à lista.

Qual é o custo de MTF se comparado com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Acesso ao i -ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado com um algoritmo ótimo de acesso?

Move to front

Lista ligada e sequência de acessos a ela.

Heurística MTF:

ao acessar o elemento x , mova-o para o início da lista.

Acesso ao i -ésimo elemento custa $2i - 1$.

Qual é o custo de MTF se comparado com um algoritmo ótimo de acesso?

A: algoritmo arbitrário de acesso à lista.

Análise amortizada:

custo do **MTF** ≤ 4 vezes o custo de **A**.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Seja x o elemento acessado.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Seja x o elemento acessado.

Seja k a posição de x na lista de **MTF**.

Seja i a posição de x na lista de **A**.

Operações sobre a lista

Acesso e troca com anterior.

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

Seja x o elemento acessado.

Seja k a posição de x na lista de **MTF**.

Seja i a posição de x na lista de **A**.

Suponha que **A** não troca ninguém de lugar.

Custo pelo acesso a x por **MTF**: $2k - 1$.

Custo pelo acesso a x por **A**: i

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

$\geq (k - 1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões a menos

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

k : posição de x na lista de **MTF**.

i : posição de x na lista de **A**.

Em **MTF**, depois do acesso, pares com x e um dos $k - 1$ elementos trocaram de posição.

Existem $i - 1$ elementos na lista de **A** na frente de x .

$\leq \min\{k-1, i-1\}$ inversões a mais depois do acesso

$\geq (k - 1) - \min\{k-1, i-1\}$ inversões a menos

Então $\Delta\Phi \leq 2(2 \min\{k-1, i-1\} - (k - 1))$.

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

$$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1).$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

$$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1).$$

Custo amortizado:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\ &\leq 2k - 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\ &\leq 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} \\ &\leq 4i.\end{aligned}$$

Custo amortizado do acesso

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

$$\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1).$$

Custo amortizado:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\ &\leq 2k - 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) \\ &\leq 1 + 4 \min\{k-1, i-1\} \\ &\leq 4i.\end{aligned}$$

Logo o custo amortizado por custo de acesso de **A** é no máximo 4.

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de **A**... se **A** não fizer trocas...

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de **A**... se **A** não fizer trocas...

E se **A** fizer trocas também?

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de **MTF** em relação à lista de **A**.

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de **A**... se **A** não fizer trocas...

E se **A** fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de **A** sobe de 1.

E o potencial, como se altera? **Sobe ou desce de 2.**

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$, onde t é o número de trocas de A após o acesso de x , e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$, onde t é o número de trocas de A após o acesso de x , e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \leq 4i + 2t \leq 4(i + t)$.

Custo amortizado

Função potencial ϕ : 2 vezes o número de inversões da lista de MTF em relação à lista de A .

O custo amortizado é menor que 4 em relação ao custo de A ... se A não fizer trocas...

E se A fizer trocas também?

Com uma troca, o custo de A sobe de 1.

E o potencial, como se altera? Sobe ou desce de 2.

Ou seja, o custo de A é $i + t$, onde t é o número de trocas de A após o acesso de x , e $\Delta\Phi \leq 4 \min\{k-1, i-1\} - 2(k-1) + 2t$.

Custo amortizado: $\hat{c} \leq 4i + 2t \leq 4(i + t)$.

Custo amortizado por operação de A é ≤ 4 .

Splay trees

São árvores binárias de busca **auto-ajustáveis!**

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

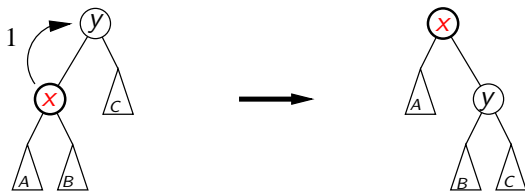
Splay trees

São árvores binárias de busca **auto-ajustáveis!**

ABB: árvore binária de busca

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Lembram-se das rotações usadas para balanceamento?



Splay trees

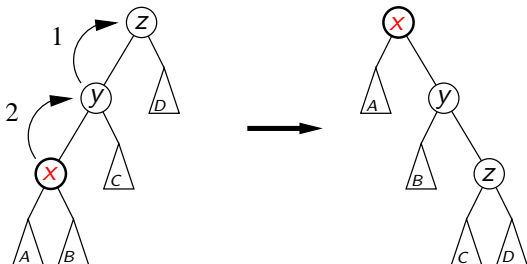
Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

Splay trees

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

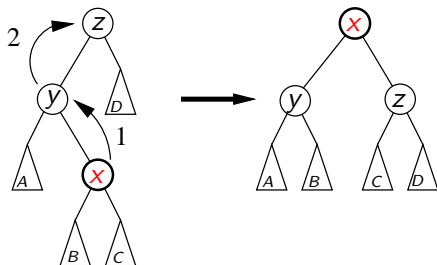


Acima, o **rr splay step**.

Splay trees

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.

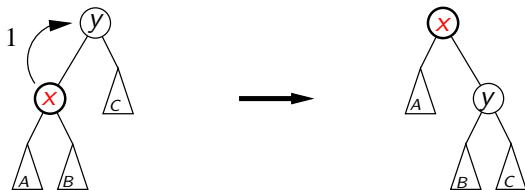


Acima, o **lr splay step**.

Splay trees

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.

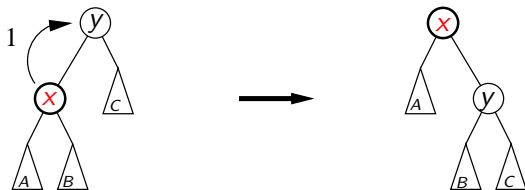


Acima, o r splay step.

Splay trees

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



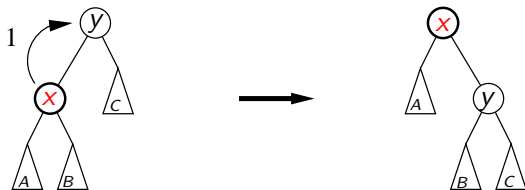
Acima, o r splay step.

Além destes, o l splay, o rl splay e o ll splay step.

Splay trees

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Para a análise, olhamos duas rotações de cada vez.
Eventualmente no final uma rotação simples é necessária.



Acima, o r splay step.

Além destes, o l splay, o rl splay e o ll splay step.

Splay steps são realizados até que x seja raiz.

Splay trees

Operação $\text{SPLAY}(x, S)$, onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Splay trees

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Splay trees

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
um comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

Splay trees

Operação **SPLAY**(x, S), onde S é uma splay tree:
quando x é acessado, move-se x para a raiz por rotações.

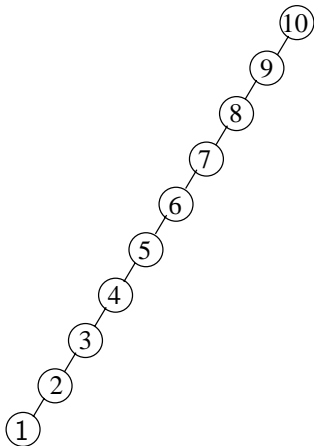
Custo de pior caso do **SPLAY**: $\Theta(n)$,
onde n é o número de elementos na splay tree.

Queremos mostrar que uma splay tree tem
um comportamento mais parecido com o de uma ABBB.

(ABBB: ABB balanceada)

Splay trees: pior caso

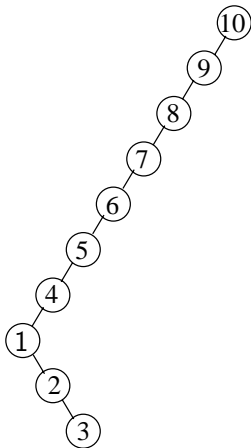
SPLAY(1, 5)



Splay trees: pior caso

$SPLAY(1, 5)$

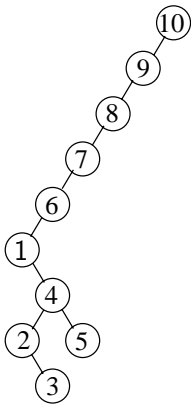
primeiro splay step



Splay trees: pior caso

SPLAY(1, 5)

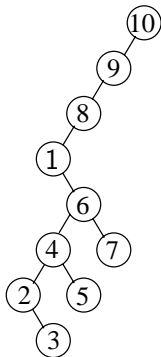
segundo splay step



Splay trees: pior caso

SPLAY(1, 5)

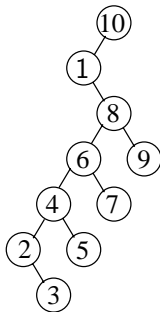
terceiro splay step



Splay trees: pior caso

$\text{SPLAY}(1, 5)$

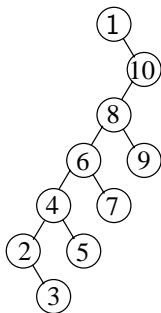
quarto splay step



Splay trees: pior caso

$SPLAY(1, 5)$

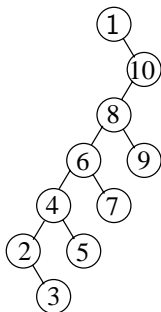
quinto splay step



Splay trees: pior caso

SPLAY(1, 5)

quinto splay step



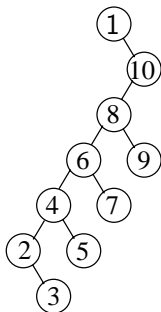
Total de rotações: 9

Em geral, é $\Theta(n)$, onde n é o número de nós.

Agora, o maior custo de um **SPLAY** nesta árvore é 7.

Splay trees: mais um exemplo

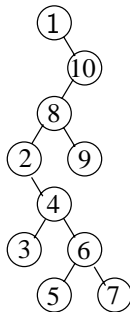
SPLAY(2, 5)



Splay trees: mais um exemplo

$SPLAY(2, 5)$

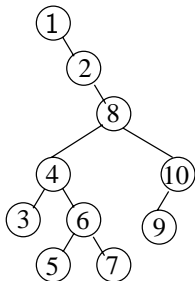
primeiro splay step



Splay trees: mais um exemplo

$\text{SPLAY}(2, 5)$

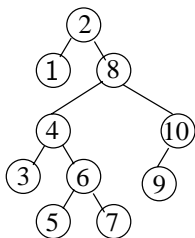
segundo splay step



Splay trees: mais um exemplo

$SPLAY(2, 5)$

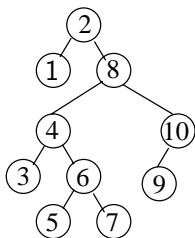
terceiro splay step



Splay trees: mais um exemplo

SPLAY(2, 5)

terceiro splay step



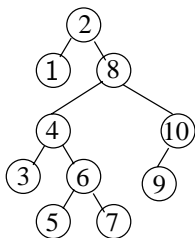
Total de rotações: 5

Árvore bem mais balanceada após estes dois **SPLAY**s.

Splay trees: mais um exemplo

SPLAY(2, 5)

terceiro splay step



Total de rotações: 5

Árvore bem mais balanceada após estes dois **SPLAY**s.

Custo: número de rotações.

Splay trees

S: splay tree

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Análise amortizada dos splay steps.

Splay trees

S : splay tree

$S_i(x)$: subárvore de S enraizada em x no instante i

$$s_i(x) = |S_i(x)|$$

Tome $r_i(x) = \lg s_i(x)$.

$r_i(x)$ indica o **potencial local** no nó x .

Seja $\Phi_i = \sum_x r_i(x)$.

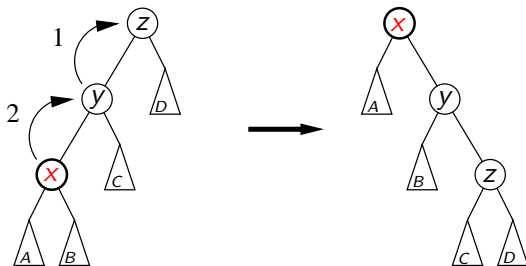
Mostraremos que o custo amortizado por **SPLAY** é $O(\lg n)$.

Análise amortizada dos splay steps.

x participa de todos os splay steps de **SPLAY**(x, S).

Análise amortizada dos splay steps

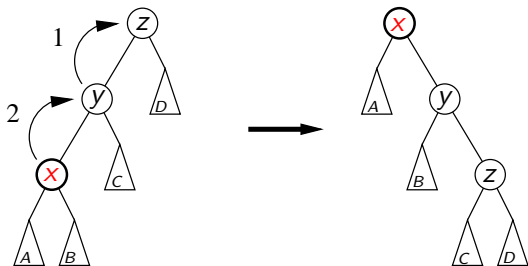
Caso do *rr splay step*.



Custo real: 2

Análise amortizada dos splay steps

Caso do *rr splay step*.



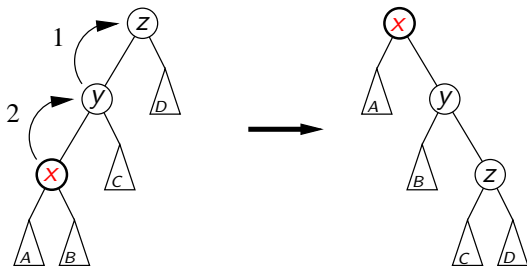
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w))$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do *rr splay step*.



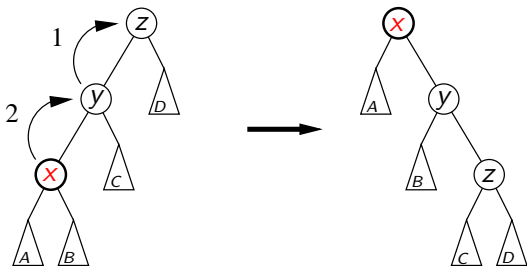
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z))\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do *rr splay step*.



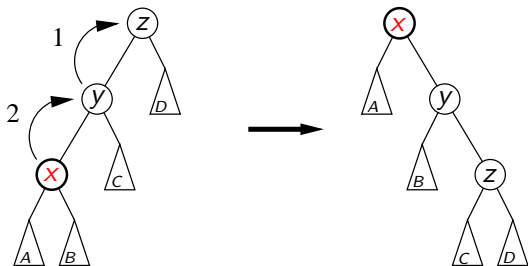
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y))\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do *rr splay step*.



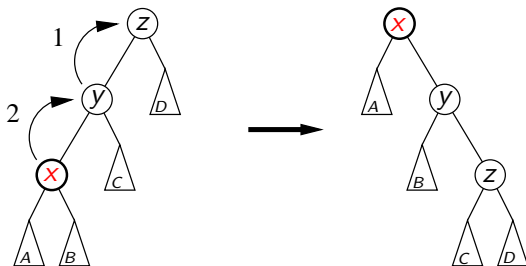
Custo real: 2

Alteração no potencial:

$$\begin{aligned}\Phi_i - \Phi_{i-1} &= \sum_w r_i(w) - \sum_w r_{i-1}(w) = \sum_w (r_i(w) - r_{i-1}(w)) \\ &= (r_i(x) - r_{i-1}(x)) + (r_i(y) - r_{i-1}(y)) + (r_i(z) - r_{i-1}(z)) \\ &= (r_i(y) + r_i(z)) - (r_{i-1}(x) + r_{i-1}(y)) \\ &< r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)\end{aligned}$$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.

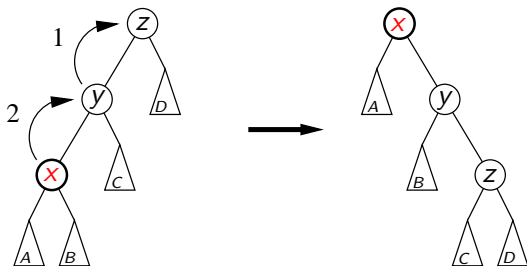


Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



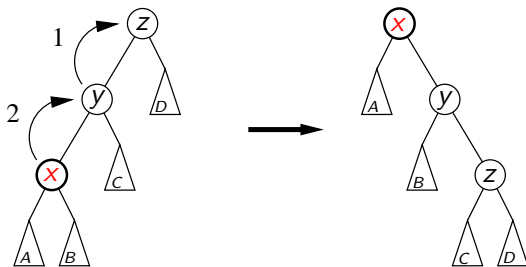
Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i < 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Análise amortizada dos splay steps

Caso do **rr splay step**.



Custo real: 2

Alteração no potencial: $\Phi_i - \Phi_{i-1} < r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Custo amortizado: $\hat{c}_i < 2 + r_i(y) + r_i(z) - 2r_{i-1}(x)$

Queremos uma delimitação que dependa apenas de x .