# Algoritmos gulosos (*greedy*)

KT 4.2 e CLRS 16.4

# Problema de escalonamento

Considere $n$ tarefas indicadas pelos números $1, \ldots, n$

# Problema de escalonamento

Considere $n$ tarefas indicadas pelos números $1, \ldots, n$

$t_i$: duração da tarefa $i$

$d_i$: prazo de entrega da tarefa $i$

# Problema de escalonamento

Considere $n$ tarefas indicadas pelos números $1, \ldots, n$

$t_i$: duração da tarefa $i$

$d_i$: prazo de entrega da tarefa $i$

Escalonamento: permutação de 1 a $n$
que indica a ordem em que as tarefas são executadas.

Para um escalonamento $\pi$, se $i = \pi(k)$,
então o tempo de início da tarefa $i$ é

$$s_i = \sum_{j=1}^{k-1} t_{\pi(j)}$$

(soma da duração das tarefas escalonadas antes de $i$).

# Problema de escalonamento

Considere $n$ tarefas indicadas pelos números $1, \ldots, n$

$t_i$: duração da tarefa $i$

$d_i$: prazo de entrega da tarefa $i$

Escalonamento: permutação de 1 a $n$
que indica a ordem em que as tarefas são executadas.

Para um escalonamento $\pi$, se $i = \pi(k)$,
então o tempo de início da tarefa $i$ é

$$s_i = \sum_{j=1}^{k-1} t_{\pi(j)}$$

(soma da duração das tarefas escalonadas antes de $i$).

O tempo de término da tarefa $i$ é $f_i = s_i + t_i$.

# Problema de escalonamento

Para um escalonamento $\pi$, o tempo de início da tarefa $i$ é a soma da duração das tarefas escalonadas antes de $i$.

O tempo de término da tarefa $i$ é $f_i = s_i + t_i$.

# Problema de escalonamento

Para um escalonamento $\pi$, o tempo de início da tarefa $i$ é a soma da duração das tarefas escalonadas antes de $i$.

O tempo de término da tarefa $i$ é $f_i = s_i + t_i$.

O atraso da tarefa $i$ é o número

$$\ell_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f_i \leq d_i \\ f_i - d_i & \text{se } f_i > d_i. \end{cases}$$

# Problema de escalonamento

Para um escalonamento $\pi$, o tempo de início da tarefa $i$ é a soma da duração das tarefas escalonadas antes de $i$.

O tempo de término da tarefa $i$ é $f_i = s_i + t_i$.

O atraso da tarefa $i$ é o número

$$\ell_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f_i \leq d_i \\ f_i - d_i & \text{se } f_i > d_i. \end{cases}$$

Problema: Dados $t_1, \ldots, t_n$ e $d_1, \ldots, d_n$, encontrar um escalonamento com o menor atraso máximo.

Ou seja, que minimize $L = \max_i \ell_i$.

# Exemplos

$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

# Exemplos

$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

Problema: Dados $d$ e $t$, encontrar $\pi$ cujo atraso máximo é mínimo.

# Exemplos

$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

Problema: Dados $d$ e $t$, encontrar $\pi$ cujo atraso máximo é mínimo.

Exemplo 1: $t_1 = 1$ e $d_1 = 2$, $t_2 = 2$ e $d_2 = 4$, $t_3 = 3$ e $d_3 = 6$.

# Exemplos

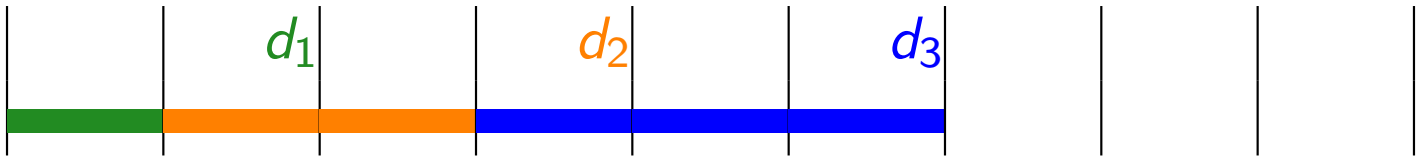
$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

Problema: Dados $d$ e $t$, encontrar $\pi$ cujo atraso máximo é mínimo.

Exemplo 1: $t_1 = 1$ e $d_1 = 2$, $t_2 = 2$ e $d_2 = 4$, $t_3 = 3$ e $d_3 = 6$.

Escalonamento com atraso mínimo: $(1, 2, 3)$




Atrasos: $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$.

# Exemplos

$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

Problema: Dados $d$ e $t$, encontrar $\pi$ cujo atraso máximo é mínimo.

Exemplo 2: $t_1 = 1$ e $d_1 = 4$, $t_2 = 2$ e $d_2 = 5$, $t_3 = 3$ e $d_3 = 3$.

# Exemplos

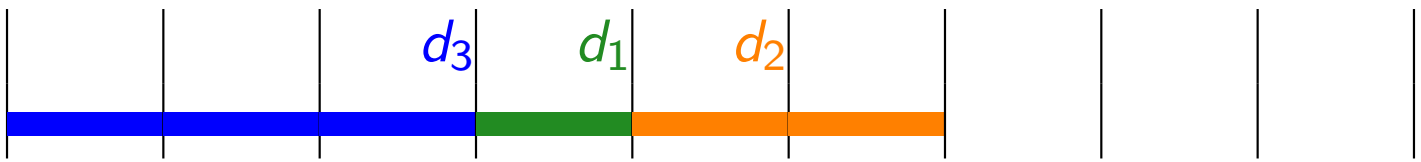
$d_i$: deadline da tarefa $i$
$t_i$: tempo de processamento da tarefa $i$

Dado escalonamento $\pi$,
$s_i$: início do processamento da tarefa $i$
$f_i$: fim do processamento da tarefa $i$
$\ell_i$: atraso da tarefa $i$

Problema: Dados $d$ e $t$, encontrar $\pi$ cujo atraso máximo é mínimo.

Exemplo 2: $t_1 = 1$ e $d_1 = 4$, $t_2 = 2$ e $d_2 = 5$, $t_3 = 3$ e $d_3 = 3$.

Escalonamento com atraso mínimo: $(3, 1, 2)$




Atrasos: $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$, e $\ell_3 = 0$.

# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona?

# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona? Não...

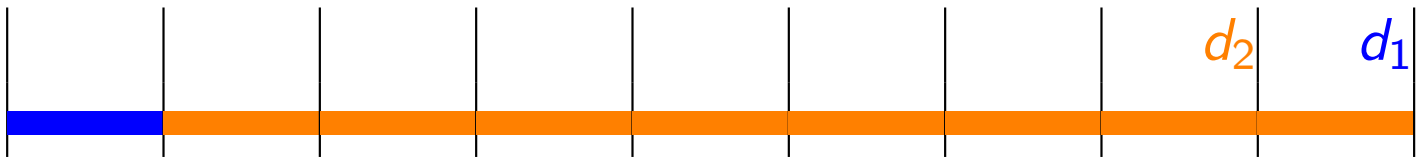
  Exemplo: $d_1 = 9$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.

# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona? Não...

  Exemplo: $d_1 = 9$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.

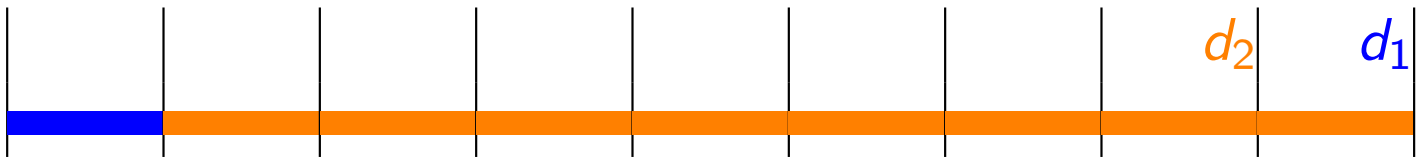


# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona? Não...

  Exemplo: $d_1 = 9$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.




- LST - least slack time (menor $d_i - t_i$ primeiro)

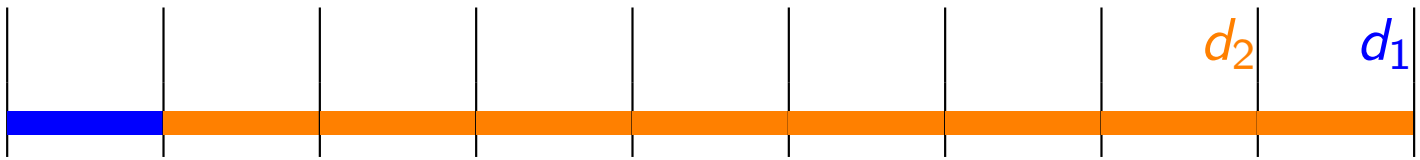
  Funciona?

# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona? Não...

  Exemplo: $d_1 = 9$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.




- LST - least slack time (menor $d_i - t_i$ primeiro)

  Funciona? Também não...

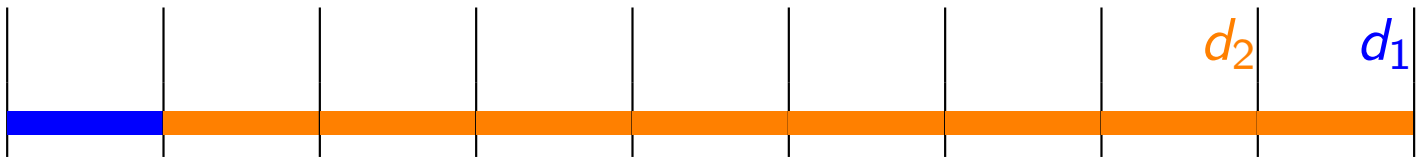
  Exemplo: $d_1 = 2$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.

# Possíveis critérios gulosos

- SPT - shortest processing time (menor $t_i$ primeiro)

  Funciona? Não...

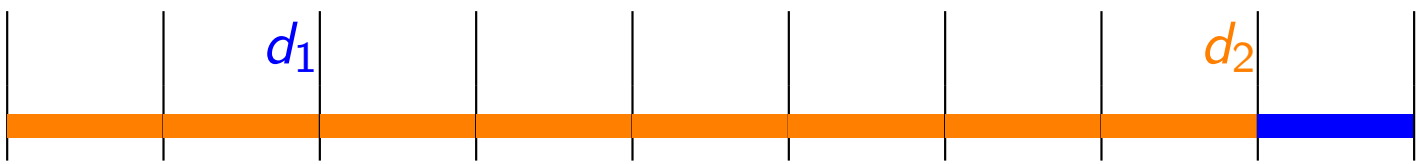
  Exemplo: $d_1 = 9$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.




- LST - least slack time (menor $d_i - t_i$ primeiro)

  Funciona? Também não...

  Exemplo: $d_1 = 2$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.

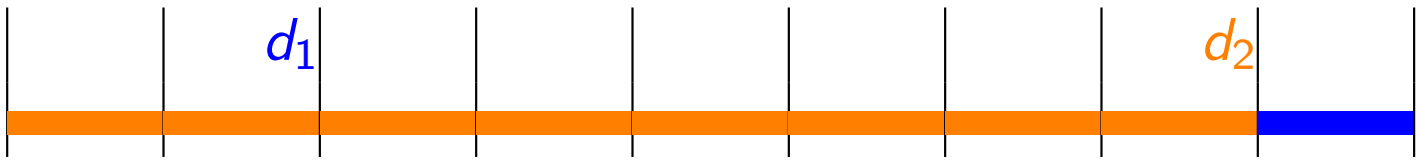


# Possíveis critérios gulosos

- LST - least slack time (menor $d_i - t_i$ primeiro)

  Funciona? Também não...

  Exemplo: $d_1 = 2$ e $t_1 = 1$, $d_2 = 8$ e $t_2 = 8$.




- EDD - earliest due date (menor $d_i$ primeiro)

  Funciona?

# Exemplo

$n = 5$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 6 | 2 | 1 | 2 | 4 |
| $d_i$ | 8 | 3 | 5 | 12 | 10 |

# Exemplo

$n = 5$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 6 | 2 | 1 | 2 | 4 |
| $d_i$ | 8 | 3 | 5 | 12 | 10 |

Para $\pi = (2, 3, 1, 5, 4)$, temos $L = 3$:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 9 | 2 | 3 | 15 | 13 |
| $\ell_i$ | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |

# Exemplo

$n = 5$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 6 | 2 | 1 | 2 | 4 |
| $d_i$ | 8 | 3 | 5 | 12 | 10 |

Para $\pi = (2, 3, 1, 5, 4)$, temos $L = 3$:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 9 | 2 | 3 | 15 | 13 |
| $\ell_i$ | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |

Será que tem escalonamento melhor?

# Algoritmo guloso

Devolve escalonamento com atraso máximo mínimo.

ESCALONAMENTO $(t, d, n)$

1 seja $\pi$ a permutação de 1 a $n$ tal que

$$d[\pi[1]] \leq d[\pi[2]] \leq \cdots \leq d[\pi[n]]$$

2 **devolva** $\pi$

# Algoritmo guloso

Devolve escalonamento com atraso máximo mínimo.

ESCALONAMENTO $(t, d, n)$

1 seja $\pi$ a permutação de 1 a $n$ tal que

$$d[\pi[1]] \leq d[\pi[2]] \leq \cdots \leq d[\pi[n]]$$

2 **devolva** $\pi$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

# Algoritmo guloso

Devolve escalonamento com atraso máximo mínimo.

ESCALONAMENTO $(t, d, n)$

1 seja $\pi$ a permutação de 1 a $n$ tal que

$$d[\pi[1]] \leq d[\pi[2]] \leq \cdots \leq d[\pi[n]]$$

2 **devolva** $\pi$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Na aula, vimos a prova de que este algoritmo está correto (devolve um escalonamento com atraso máximo mínimo).

# Ingredientes da prova

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

# Ingredientes da prova

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Mostre que dois escalonamentos sem inversões têm o mesmo atraso máximo.

# Ingredientes da prova

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é
um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Mostre que dois escalonamentos sem inversões
têm o mesmo atraso máximo.

Mostre que se um escalonamento tem uma inversão,
então ele tem uma inversão do tipo $(i, i + 1)$.

# Ingredientes da prova

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Mostre que dois escalonamentos sem inversões têm o mesmo atraso máximo.

Mostre que se um escalonamento tem uma inversão, então ele tem uma inversão do tipo $(i, i + 1)$.

Mostre então que, se trocarmos $\pi[i]$ e $\pi[i + 1]$, obteremos um escalomento com atraso máximo não superior ao atraso máximo de $\pi$.

# Primeiro passo

Afirmação: Dois escalonamentos sem inversões têm o mesmo atraso máximo.

# Primeiro passo

Afirmação: Dois escalonamentos sem inversões
têm o mesmo atraso máximo.

Prova: Escalonamento sem inversões:
sequência de blocos $B_j$ de tarefas com o mesmo prazo $P_j$.

# Primeiro passo

Afirmação: Dois escalonamentos sem inversões
têm o mesmo atraso máximo.

Prova: Escalonamento sem inversões:
sequência de blocos $B_j$ de tarefas com o mesmo prazo $P_j$.

O término da última tarefa do bloco $B_j$ é o mesmo,
digamos, $F_j$, independente da ordem das tarefas do bloco.

Assim a tarefa mais atrasada de cada bloco é a última,
e seu atraso é o mesmo, independente da ordem das tarefas
do bloco, pois todas as tarefas do bloco têm o mesmo prazo.

O atraso $L_j$ da última tarefa em $B_j$ é
zero se $F_j \leq P_j$, e $F_j - P_j$ se $F_j > P_j$.

# Primeiro passo

Afirmação: Dois escalonamentos sem inversões
têm o mesmo atraso máximo.

Prova: Escalonamento sem inversões:
sequência de blocos $B_j$ de tarefas com o mesmo prazo $P_j$.

O término da última tarefa do bloco $B_j$ é o mesmo,
digamos, $F_j$, independente da ordem das tarefas do bloco.

Assim a tarefa mais atrasada de cada bloco é a última,
e seu atraso é o mesmo, independente da ordem das tarefas
do bloco, pois todas as tarefas do bloco têm o mesmo prazo.

O atraso $L_j$ da última tarefa em $B_j$ é
zero se $F_j \leq P_j$, e $F_j - P_j$ se $F_j > P_j$.

Assim, o atraso máximo $L$ é o máximo
dos atrasos $L_j$ das últimas tarefas dos blocos.

# Segundo passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se um escalonamento tem uma inversão então ele tem uma inversão do tipo $(i, i + 1)$.

# Segundo passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é
um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se um escalonamento tem uma inversão
então ele tem uma inversão do tipo $(i, i + 1)$.

Prova: Se $d[\pi[i]] \leq d[\pi[i + 1]]$ para todo $i$,
então $\pi$ está ordenado e não tem inversões.

# Terceiro passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se $(i, i+1)$ é uma inversão e trocarmos $\pi[i]$ e $\pi[i+1]$, obteremos um escalomento com atraso máximo não superior ao atraso máximo de $\pi$.

# Terceiro passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se $(i, i+1)$ é uma inversão e trocarmos $\pi[i]$ e $\pi[i+1]$, obteremos um escalomento com atraso máximo não superior ao atraso máximo de $\pi$.

Prova: Quando invertemos as tarefas $i$ e $i+1$ de ordem, isso não afeta o término de nenhuma das outras tarefas.

# Terceiro passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é
um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se $(i, i+1)$ é uma inversão e trocarmos $\pi[i]$
e $\pi[i+1]$, obteremos um escalomento com atraso máximo
não superior ao atraso máximo de $\pi$.

Prova: Quando invertemos as tarefas $i$ e $i+1$ de ordem,
isso não afeta o término de nenhuma das outras tarefas.

Como $(i, i+1)$ é uma inversão, $d[\pi[i]] > d[\pi[i+1]]$.

Se $i+1$ não está atrasada, então $i$ também não está atrasada,
e inverter a ordem de $i$ e $i+1$ não as torna atrasadas.

# Terceiro passo

Uma inversão em um escalonamento $\pi$ é
um par $(i, j)$ tal que $i < j$ e $d[\pi[i]] > d[\pi[j]]$.

Afirmação: Se $(i, i+1)$ é uma inversão e trocarmos $\pi[i]$
e $\pi[i+1]$, obteremos um escalomento com atraso máximo
não superior ao atraso máximo de $\pi$.

Prova: Quando invertemos as tarefas $i$ e $i+1$ de ordem,
isso não afeta o término de nenhuma das outras tarefas.

Como $(i, i+1)$ é uma inversão, $d[\pi[i]] > d[\pi[i+1]]$.

Se $i+1$ não está atrasada, então $i$ também não está atrasada,
e inverter a ordem de $i$ e $i+1$ não as torna atrasadas.

Se $i+1$ está atrasada, então está mais atrasada que $i$.
Ao invertermos $i$ e $i+1$, a tarefa $i+1$ fica menos atrasada
e a tarefa $i$ fica menos atrasada do que $i+1$ estava.

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.
(subconjuntos de conjuntos em $\mathcal{C}$ estão em $\mathcal{C}$)

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário $w_e$ para cada $e$ de $U$, encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário $w_e$ para cada $e$ de $U$, encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

GULOSO $(U, w, \mathcal{C})$

1 $U_1 \leftarrow \{e \in U : w_e = 1\}$ $\qquad$ $S \leftarrow \emptyset$

2 **enquanto** existe $e$ em $U_1$ tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{C}$ **faça**

3 $\quad S \leftarrow S \cup \{e\}$

4 **devolva** $S$

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Problema 1: Dado um peso binário $w_e$ para cada $e$ de $U$, encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

GULOSO $(U, w, \mathcal{C})$
1 $U_1 \leftarrow \{e \in U : w_e = 1\}$ $S \leftarrow \emptyset$
2 **enquanto** existe $e$ em $U_1$ tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{C}$ **faça**
3 $S \leftarrow S \cup \{e\}$
4 **devolva** $S$

GULOSO encontra um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso maximal.

$\mathcal{C}$ é um matroide se
todo conjunto de $\mathcal{C}$ de peso maximal tem o mesmo tamanho.

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito.
$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Pesos positivos para os elementos de $U$.

Problema 2: Encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito.
$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Pesos positivos para os elementos de $U$.

Problema 2: Encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

```
GULOSO (U, w, C)
1  (e_1, ..., e_n) ← ORDENE(U, w)      ▷ ordem dos pesos
2  S ← ∅
3  para i ← 1 até n faça
4      se S ∪ {e_i} ∈ C
5          então S ← S ∪ {e_i}
6  devolva S
```

# Matroides e o método guloso

$U$: conjunto finito.
$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

Pesos positivos para os elementos de $U$.

Problema 2: Encontrar um conjunto de $\mathcal{C}$ de peso máximo.

```
GULOSO (U, w, C)
1  (e_1, ..., e_n) ← ORDENE(U, w)      ▷ ordem dos pesos
2  S ← ∅
3  para i ← 1 até n faça
4      se S ∪ {e_i} ∈ C
5          então S ← S ∪ {e_i}
6  devolva S
```

Teorema: Se $\mathcal{C}$ é um matroide,
então o algoritmo acima resolve o Problema 2.

# Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

# Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Dado um grafo $G$, a coleção de arestas de todas as florestas de $G$ é um matroide.

# Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Dado um grafo $G$, a coleção de arestas de todas as florestas de $G$ é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.
$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.
$M_U$ é um matroide.

# Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Dado um grafo $G$, a coleção de arestas de todas as florestas de $G$ é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.
$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.
$M_U$ é um matroide.

$M_V$: a coleção análoga com $V$ no lugar de $U$.

Claro que $M_V$ também é um matroide.

# Exemplos de matroides

Dado um espaço vetorial, a coleção de todos os conjuntos de vetores LI deste espaço é um matroide.

Dado um grafo $G$, a coleção de arestas de todas as florestas de $G$ é um matroide.

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.
$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.
$M_U$ é um matroide.

$M_V$: a coleção análoga com $V$ no lugar de $U$.

Claro que $M_V$ também é um matroide.

E $M_U \cap M_V$? É ou não é um matroide?

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em $G$?

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em $G$?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um emparelhamento em $G$.

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em $G$?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um emparelhamento em $G$.

Esta coleção é ou não é um matroide?

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

O que é $M_U \cap M_V$?

O que é um conjunto da coleção $M_U \cap M_V$ em $G$?

Cada conjunto de $M_U \cap M_V$ é um emparelhamento em $G$.

Esta coleção é ou não é um matroide?

Não é... (nem todo emparelhamento maximal é máximo)
Mas é a interseção de dois matroides.

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

$M_U \cap M_V$ é a coleção dos emparelhamentos de $G$.

Esta coleção não é um matroide.

Mas é a interseção de dois matroides.

# Exemplos de matroides

Grafo bipartido $G = (U \times V, E)$.

$M_U$: todos os conjuntos $S$ de arestas de $G$ tq no máximo uma aresta de $S$ é incidente a cada vértice de $U$.

$M_V$: a coleção analoga com $V$ no lugar de $U$.

$M_U$ e $M_V$ são matroides.

$M_U \cap M_V$ é a coleção dos emparelhamentos de $G$.

Esta coleção não é um matroide.

Mas é a interseção de dois matroides.

Existe algoritmo polinomial para encontrar um conjunto (de peso) máximo na interseção de dois matroides.

# Definição alternativa de matroides

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

# Definição alternativa de matroides

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

$\mathcal{C}$ é um matroide se, para todo par $A$, $B$ de conjuntos de $\mathcal{C}$ para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

# Definição alternativa de matroides

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

$\mathcal{C}$ é um matroide se, para todo par $A$, $B$ de conjuntos de $\mathcal{C}$ para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Esta é a definição do CLRS.

# Definição alternativa de matroides

$U$: conjunto finito arbitrário.

$\mathcal{C}$: família não vazia de subconjuntos de $U$ hereditária.

$\mathcal{C}$ é um matroide se, para todo par $A$, $B$ de conjuntos de $\mathcal{C}$ para os quais $|A| < |B|$, existe $e \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Esta é a definição do CLRS.

Exercício: Mostre que esta definição é análoga a anterior.