Programação dinâmica

CLRS cap 15

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Algoritmo recursivo para F_n:

```
FIBO-REC (n)
1   se n ≤ 1
2       então devolva n
3       senão a ← FIBO-REC (n − 1)
4             b ← FIBO-REC (n − 2)
5             devolva a + b
```

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
1   se n ≤ 1
2       então devolva n
3       senão a ← FIBO-REC (n − 1)
4             b ← FIBO-REC (n − 2)
5             devolva a + b
```

Tempo em segundos:

n	16	32	40	41	42	43	44	45	47
tempo	0.002	0.06	2.91	4.71	7.62	12.37	19.94	32.37	84.50

$F_{47} = 2971215073$

Consumo de tempo

```
FIBO-REC (n)
1   se n ≤ 1
2       então devolva n
3       senão a ← FIBO-REC (n − 1)
4             b ← FIBO-REC (n − 2)
5             devolva a+b
```

$T(n) :=$ número de somas feitas por FIBO-REC (n)

linha	número de somas
1-2	$= 0$
3	$= T(n-1)$
4	$= T(n-2)$
5	$= 1$
$T(n)$	$= T(n-1) + T(n-2) + 1$

Recorrência

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Recorrência

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

A que classe Ω pertence $T(n)$?
A que classe O pertence $T(n)$?

Solução: $T(n) > (3/2)^n$ para $n \geq 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_n	0	0	1	2	4	7	12	20	33	54
$(3/2)^n$	1	1.5	2.25	3.38	5.06	7.59	11.39	17.09	25.63	38.44

Recorrência

Prova: $T(6) = 12 > 11.40 > (3/2)^6$ e $T(7) = 20 > 18 > (3/2)^7$.
Se $n \geq 8$, então

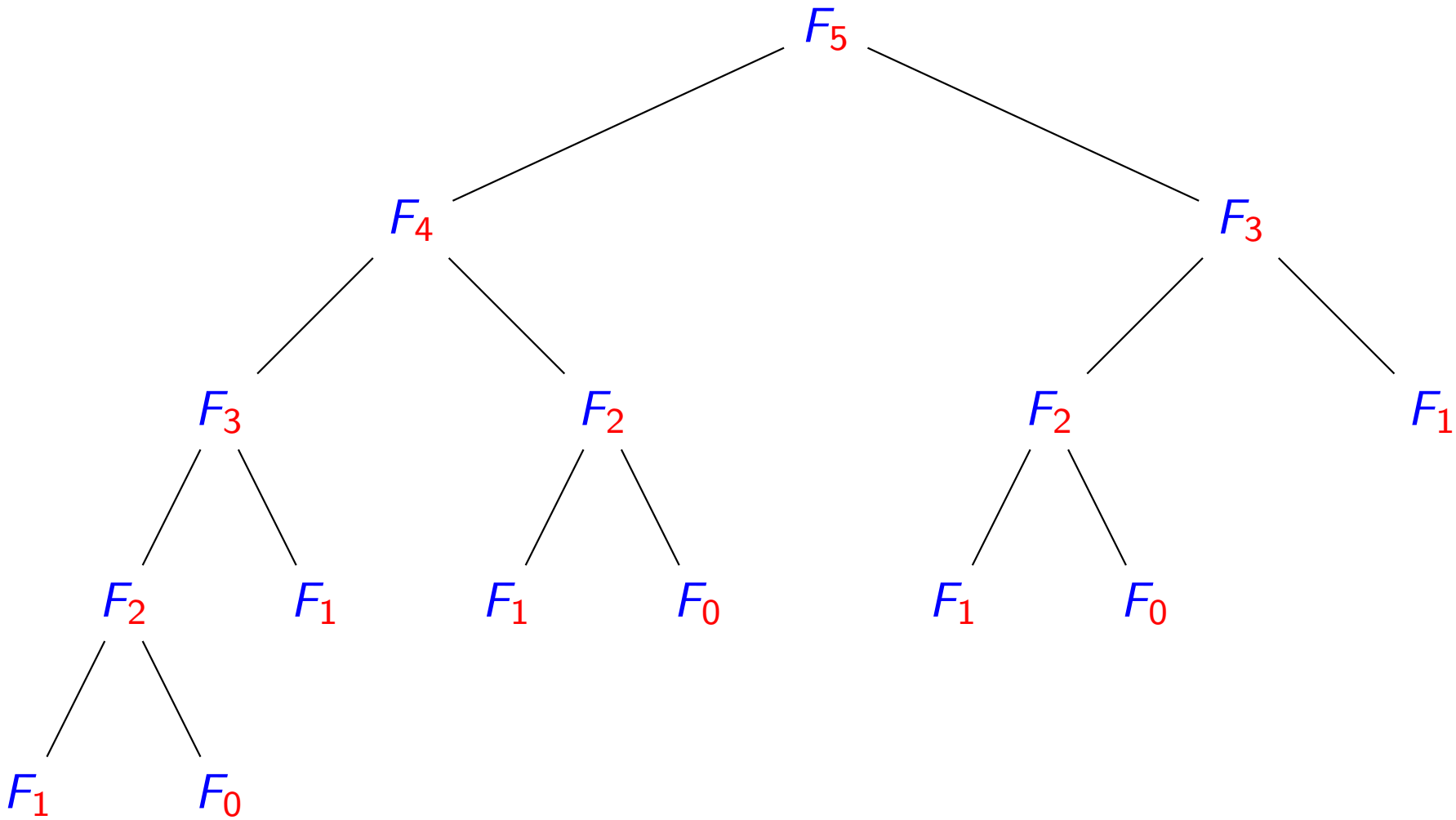
$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + 1 \\ &\overset{\text{hi}}{>} (3/2)^{n-1} + (3/2)^{n-2} + 1 \\ &= (3/2+1)\,(3/2)^{n-2} + 1 \\ &> (5/2)\,(3/2)^{n-2} \\ &> (9/4)\,(3/2)^{n-2} \\ &= (3/2)^2 (3/2)^{n-2} \\ &= (3/2)^n\,. \end{aligned}$$

Logo, $T(n)$ é $\Omega((3/2)^n)$. Verifique que $T(n)$ é $\mathrm{O}(2^n)$.

Consumo de tempo

Consumo de tempo é exponencial.

Algoritmo resolve subproblemas muitas vezes.



Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(5)
  FIBO-REC(4)
    FIBO-REC(3)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
      FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
  FIBO-REC(3)
    FIBO-REC(2)
      FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(1)
```

FIBO-REC$(5) = 5$

Resolve subproblemas muitas vezes

```
FIBO-REC(8)
  FIBO-REC(7)
    FIBO-REC(6)
      FIBO-REC(5)
        FIBO-REC(4)
          FIBO-REC(3)
            FIBO-REC(2)
              FIBO-REC(1)
              FIBO-REC(0)
            FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
```

```
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
  FIBO-REC(6)
    FIBO-REC(5)
      FIBO-REC(4)
        FIBO-REC(3)
```

```
          FIBO-REC(2)
            FIBO-REC(1)
            FIBO-REC(0)
          FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
    FIBO-REC(4)
      FIBO-REC(3)
        FIBO-REC(2)
          FIBO-REC(1)
          FIBO-REC(0)
        FIBO-REC(1)
      FIBO-REC(2)
        FIBO-REC(1)
        FIBO-REC(0)
```

Programação dinâmica

"Dynamic programming is a fancy name for divide-and-conquer with a table. Instead of solving subproblems recursively, solve them sequentially and store their solutions in a table. The trick is to solve them in the right order so that whenever the solution to a subproblem is needed, it is already available in the table. Dynamic programming is particularly useful on problems for which divide-and-conquer appears to yield an exponential number of subproblems, but there are really only a small number of subproblems repeated exponentially often. In this case, it makes sense to compute each solution the first time and store it away in a table for later use, instead of recomputing it recursively every time it is needed."

I. Parberry, *Problems on Algorithms*, Prentice Hall, 1995.

Versão recursiva com memoização

```
MEMOIZED-FIBO (f, n)
1  para i ← 0 até n faça
2      f[i] ← −1
3  devolva LOOKUP-FIBO (f, n)

LOOKUP-FIBO (f, n)
1  se f[n] ≥ 0
2      então devolva f[n]
3  se n ≤ 1
4      então f[n] ← n
5      senão f[n] ← LOOKUP-FIBO(f, n − 1)
                  + LOOKUP-FIBO(f, n − 2)
6  devolva f[n]
```

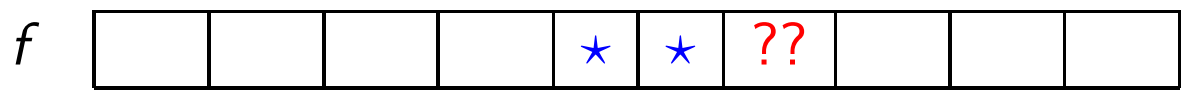
Não recalcula valores de f.

Algoritmo de programação dinâmica

Sem recursão:

```
FIBO (n)
1  f[0] ← 0
2  f[1] ← 1
3  para i ← 2 até n faça
4      f[i] ← f[i − 1] + f[i − 2]
5  devolva f[n]
```

Note a tabela $f[0\,..\,n-1]$.



Consumo de tempo (e de espaço) é $\Theta(n)$.

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
0   se n = 0 então devolva 0
1   f_ant ← 0
2   f_atual ← 1
3   para i ← 2 até n faça
4       f_prox ← f_atual + f_ant
5       f_ant ← f_atual
6       f_atual ← f_prox
7   devolva f_atual
```

Algoritmo de programação dinâmica

Versão com economia de espaço.

```
FIBO (n)
0   se n = 0 então devolva 0
1   f_ant ← 0
2   f_atual ← 1
3   para i ← 2 até n faça
4       f_prox ← f_atual + f_ant
5       f_ant ← f_atual
6       f_atual ← f_prox
7   devolva f_atual
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Consumo de espaço é $\Theta(1)$.

Corte de hastes

Hastes de aço são vendidas em pedaços de tamanho inteiro.
As usinas produzem hastes longas,
e os comerciantes cortam em pedaços para vender.

Suponha que o preço de uma haste de tamanho i
esteja tabelado como p_i.

Corte de hastes

Hastes de aço são vendidas em pedaços de tamanho inteiro.
As usinas produzem hastes longas,
e os comerciantes cortam em pedaços para vender.

Suponha que o preço de uma haste de tamanho i
esteja tabelado como p_i.

Problema: Dada uma haste de tamanho n e a tabela p de preços, qual a melhor forma de cortar a haste para maximizar o preço de venda total?

Corte de hastes

Hastes de aço são vendidas em pedaços de tamanho inteiro.
As usinas produzem hastes longas,
e os comerciantes cortam em pedaços para vender.

Suponha que o preço de uma haste de tamanho i
esteja tabelado como p_i.

Problema: Dada uma haste de tamanho n e a tabela p de preços, qual a melhor forma de cortar a haste para maximizar o preço de venda total?

Versão simplificada: qual o maior valor q_n
que se pode obter de uma haste de tamanho n?

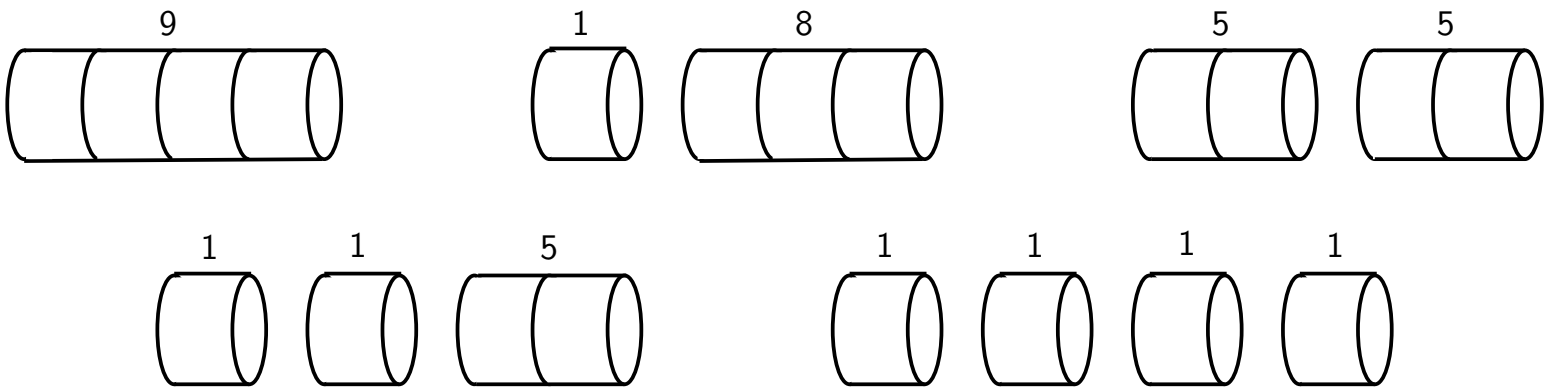
Exemplo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	1	5	8	9	10	17	17	20	24

Exemplo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	1	5	8	9	10	17	17	20	24

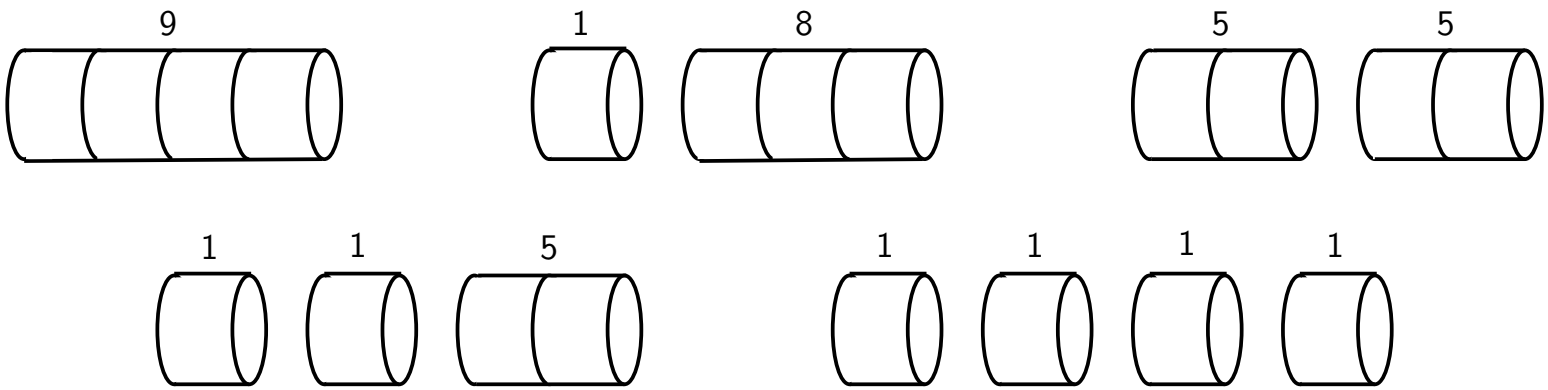
Possíveis cortes para $n = 4$:



Exemplo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	1	5	8	9	10	17	17	20	24

Possíveis cortes para $n = 4$:



Melhor corte (de maior lucro): o terceiro, com valor 10.

Solução recursiva

Corta-se um primeiro pedaço de tamanho i e o pedaço restante, de tamanho $n - i$, do melhor jeito possível. O valor desse corte é

$$p_i + q_{n-i}.$$

Solução recursiva

Corta-se um primeiro pedaço de tamanho i e o pedaço restante, de tamanho $n - i$, do melhor jeito possível. O valor desse corte é

$$p_i + q_{n-i}.$$

A questão é escolher o melhor i; o que maximiza a expressão acima:

$$q_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + q_{n-i}\}.$$

$$q_0 = 0.$$

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
1  se n = 0
2      então devolva 0
3  q ← −∞
4  para i ← 1 até n
5      q ← max{q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i)}
6  devolva q
```

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
1  se n = 0
2      então devolva 0
3  q ← −∞
4  para i ← 1 até n
5      q ← max{q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i)}
6  devolva q
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; n \;+ \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
1  se n = 0
2      então devolva 0
3  q ← −∞
4  para i ← 1 até n
5      q ← max{q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i)}
6  devolva q
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; n \;+ \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Para simplificar, subtraia $T(n-1) \;=\; n-1 \;+ \sum_{i=0}^{n-2} T(i)$ do acima, obtendo $T(n) = 2T(n-1) + 1$, que é mais fácil de resolver.

Primeiro código

```
CORTA-HASTE (p, n)
1  se n = 0
2      então devolva 0
3  q ← −∞
4  para i ← 1 até n
5      q ← max{q, p[i] + CORTA-HASTE(p, n − i)}
6  devolva q
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; 2T(n-1)+1 \;=\; 2^{n+1}-1.$$

Com memoização

Note que r funciona como variável global.

CORTA-HASTE-MEMOIZADO (p, n)
1 $r[0] \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n
3 $\quad r[i] \leftarrow -\infty$
4 **devolva** CORTA-HASTE-MEMOIZADO-REC (p, n, r)

Com memoização

Note que r funciona como variável global.

```
CORTA-HASTE-MEMOIZADO (p, n)
1  r[0] ← 0
2  para i ← 1 até n
3      r[i] ← −∞
4  devolva CORTA-HASTE-MEMOIZADO-REC (p, n, r)

CORTA-HASTE-MEMOIZADO-REC (p, n, r)
1  se r[n] ≥ 0
2      devolva r[n]
3  senão q ← −∞
4      para i ← 1 até n
5          q ← max{q, p[i] + Corta-Haste-Memoizado-Rec(p, n − i, r)}
6      r[n] ← q
7      devolva q
```

Bottom up

```
CORTA-HASTE-BOTTOM-UP (p, n)
1  r[0] ← 0
2  para j ← 1 até n
3      q ← −∞
4      para i ← 1 até j
5          q ← max{q, p[i] + r[j − i]}
6      r[j] ← q
7  devolva q
```

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0				

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1			

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	2		

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5		

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	6	

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	6	

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	9

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	10

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	10

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	10

Recuperando o melhor corte

```
CORTA-HASTE-BOTTOM-UP-COMPLETO (p, n)
1  r[0] ← 0
2  para j ← 1 até n
3      q ← −∞
4      para i ← 1 até j
5          se q < p[i] + r[j − i]
6              q ← p[i] + r[j − i]
7              d[j] ← i
8      r[j] ← q
9  devolva q e d
```

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1			
d_n		1			

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	2		
d_n		1	1		

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5		
d_n		1	2		

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	6	
d_n		1	2	1	

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	
d_n		1	2	3	

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	9
d_n		1	2	3	1

Exemplo

n	1	2	3	4
p_n	1	5	8	9

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	5	8	10
d_n		1	2	3	2

Listando os cortes

(usando concatenação de listas, estilo python)

```
LISTA-CORTES(d, n)
1  se n = 0 ou d[n] = n
2      devolva [ ]    ▷ lista vazia
3  senão
4      devolva [ d[n] ] .LISTA-CORTES(d, n − d[n])
```

Listando os cortes

(usando concatenação de listas, estilo python)

```
LISTA-CORTES(d, n)
1  se n = 0 ou d[n] = n
2      devolva [ ]    ▷ lista vazia
3  senão
4      devolva [ d[n] ] .LISTA-CORTES(d, n − d[n])
```

Consumo de tempo: $O(n)$