Multiplicação de inteiros gigantescos

KT cap 5.5

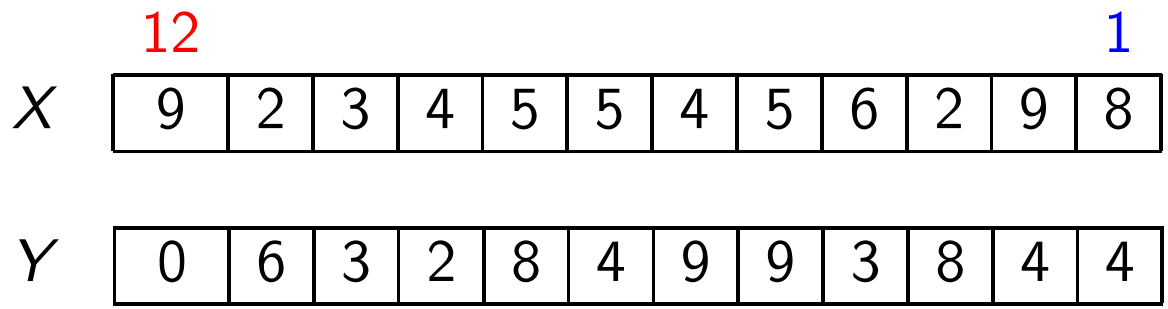
Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$, calcular o produto $X \cdot Y$.

Exemplo com $n = 12$.

Entra:



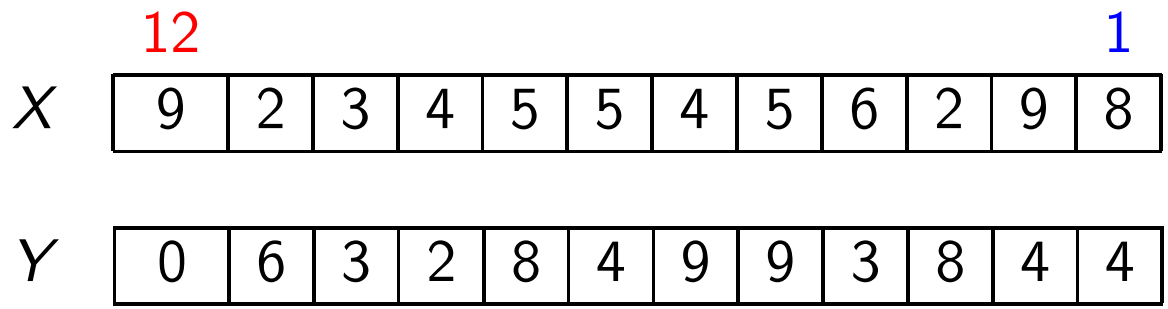
Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

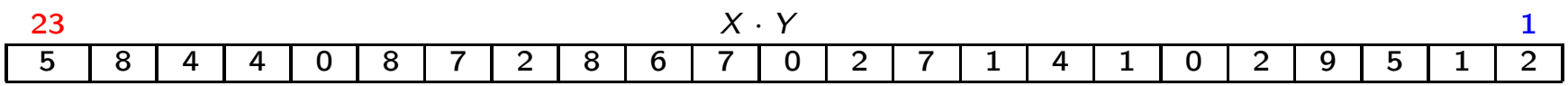
Problema: Dados dois números inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$, calcular o produto $X \cdot Y$.

Exemplo com $n = 12$.

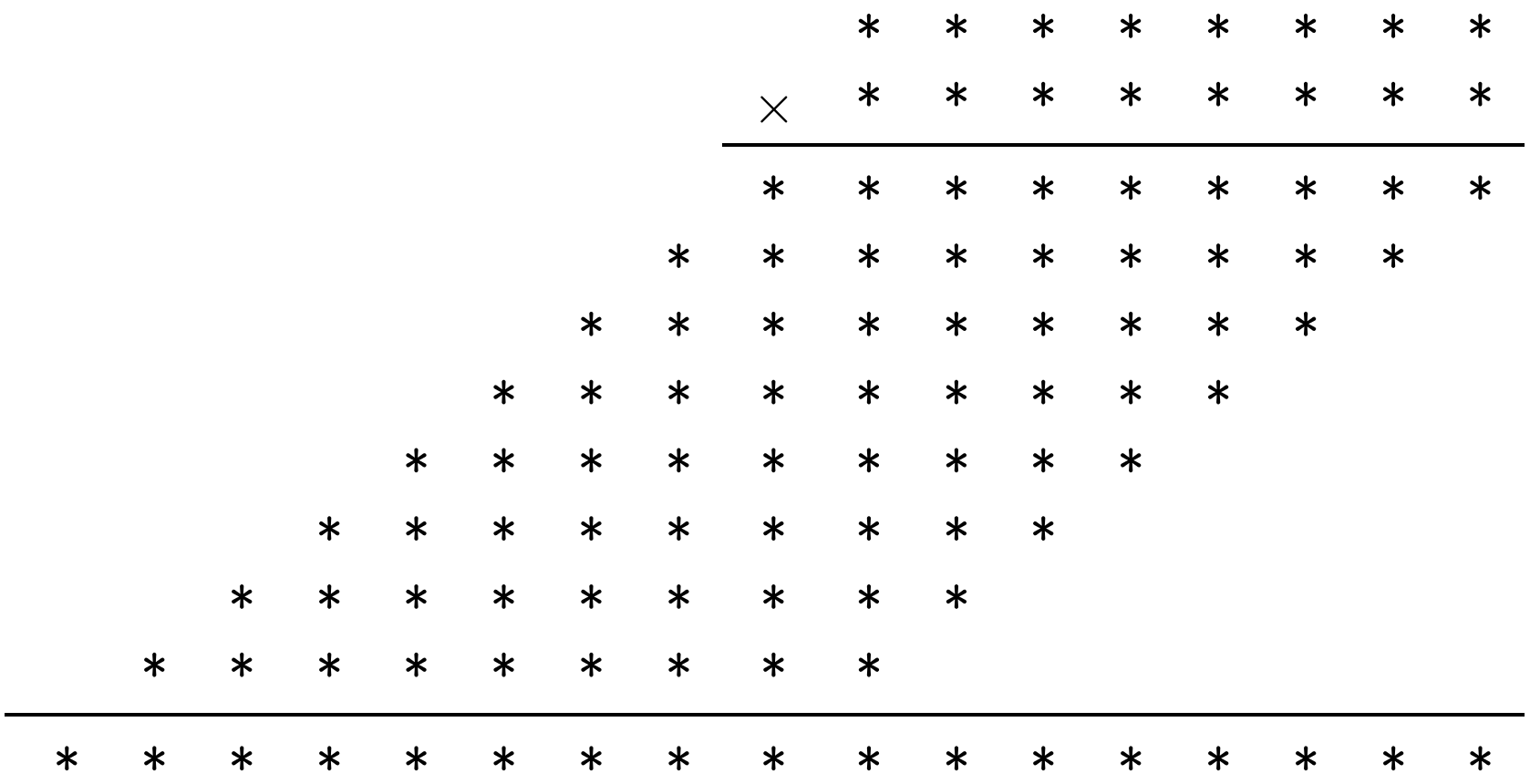
Entra:



Sai:

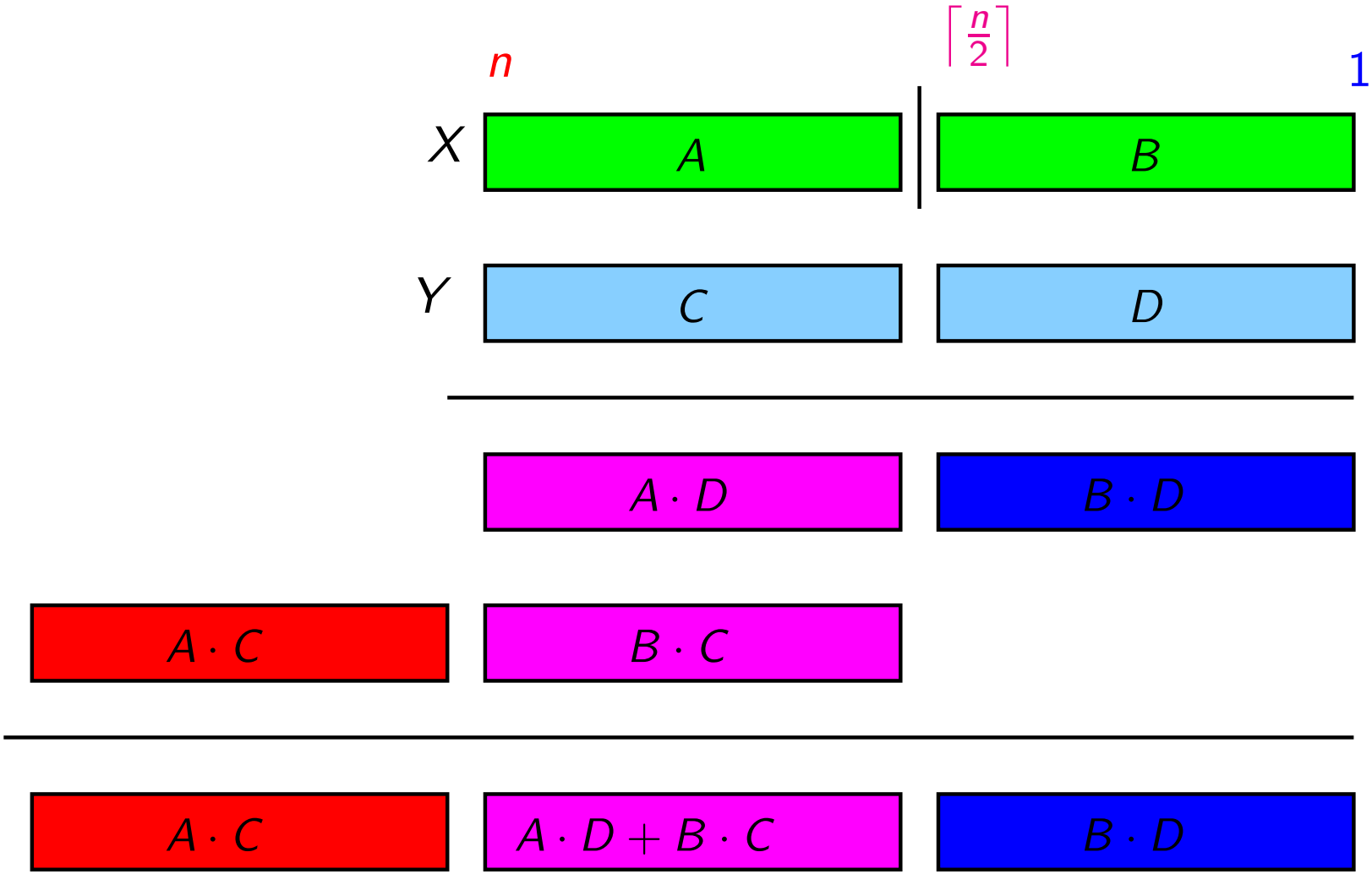


Algoritmo do ensino fundamental



O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

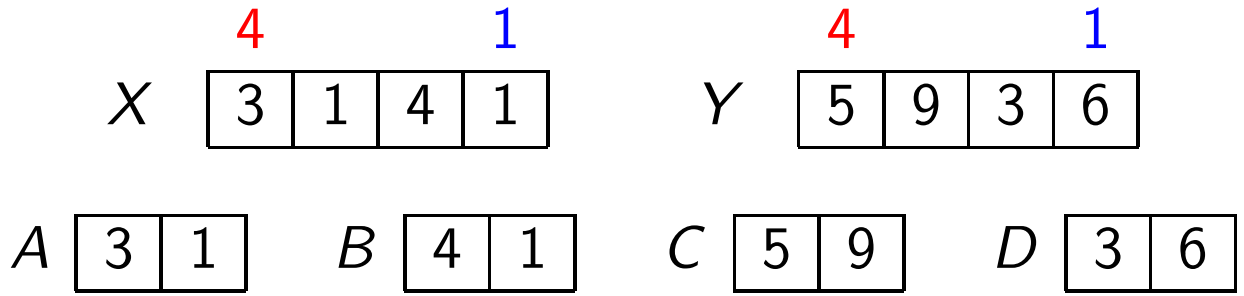
Divisão e conquista



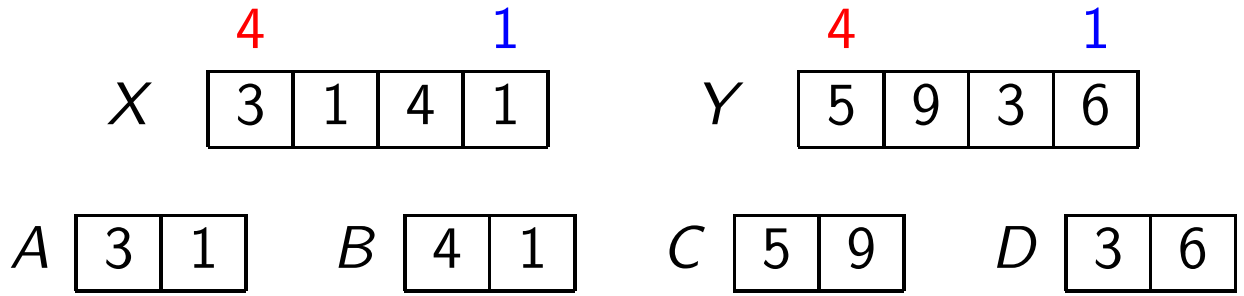
$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^{n} + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

Exemplo



Exemplo



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\quad (A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

$A \cdot C$	1	8	2	9	0	0	0	0
$(A \cdot D + B \cdot C)$			3	5	3	5	0	0
$B \cdot D$					1	4	7	6
$X \cdot Y =$	1	8	6	4	4	9	7	6

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1..n]$ $\quad$ $B \leftarrow X[1..q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1..n]$ $\quad$ $D \leftarrow Y[1..q]$
5 $E \leftarrow \text{MULT}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow \text{MULT}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow \text{MULT}(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
8 $H \leftarrow \text{MULT}(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
9 $R \leftarrow E \times 10^n + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	=	$\Theta(1)$
2	=	$\Theta(1)$
3	=	$\Theta(n)$
4	=	$\Theta(n)$
5	=	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
8	=	$T(\lceil n/2 \rceil)$
9	=	$\Theta(n)$
10	=	$\Theta(1)$
total	=	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 4\,T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada ...
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.

Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.

Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.

Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos (n=2).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.

Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata? Gauss faz por R$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

X		a	b
Y		c	d
		ad	bd
	ac	bc	
$X \cdot Y$	ac	$ad + bc$	bd

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$
$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$

$g = (a + b)(c + d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$

$$X \cdot Y \ \text{(por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\
ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ?
\end{array}
$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 1 \quad Y = 3 \quad X \cdot Y = 3$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 21 & Y = & 23 & X \cdot Y = & 483 \\ ac = & 4 & bd = & 3 & (a+b)(c+d) = & 15 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 33 & Y = & 12 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 33 & Y = & 12 & X \cdot Y = & 396 \\ ac = & 3 & bd = & 6 & (a+b)(c+d) = & 18 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & ? & bd = & ? & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} X = & 54 & Y = & 35 & X \cdot Y = & 1890 \\ ac = & 15 & bd = & 20 & (a+b)(c+d) = & 72 \end{array}$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\
ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & 4931496 \\
ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890
\end{array}
$$

Algoritmo Multi

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

1 **se** $n \leq 3$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $B \leftarrow X[1\,..\,q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
5 $E \leftarrow \text{KARATSUBA}(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow \text{KARATSUBA}(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow \text{KARATSUBA}(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
8 $H \leftarrow G - F - E$
9 $R \leftarrow E \times 10^n + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$=$	$\Theta(n)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n)$

Consumo de tempo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 3T'(n/2) + n$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$
$(1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585)$.

Mais conclusões

Consumo de tempo de
algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância	$\Theta(n\,10^n)$
Ensino fundamental	$\Theta(n^2)$
Karatsuba e Ofman'60	$\mathrm{O}(n^{1.585})$
Toom e Cook'63	$\mathrm{O}(n^{1.465})$
(divisão e conquista; generaliza o acima)	
Schönhage e Strassen'71	$\mathrm{O}(n \lg n \lg\lg n)$
(FFT em aneis de tamanho específico)	
Fürer'07	$\mathrm{O}(n \lg n\, 2^{\mathrm{O}(\log^* n)})$
Harvey e van der Hoeven'20	$\mathrm{O}(n \log n)$
(Gaussian ressampling, multidimensional DFT, Nussbaumer's fast polynomial transforms)	

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^3 segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$, calcular o produto $X \cdot Y$.

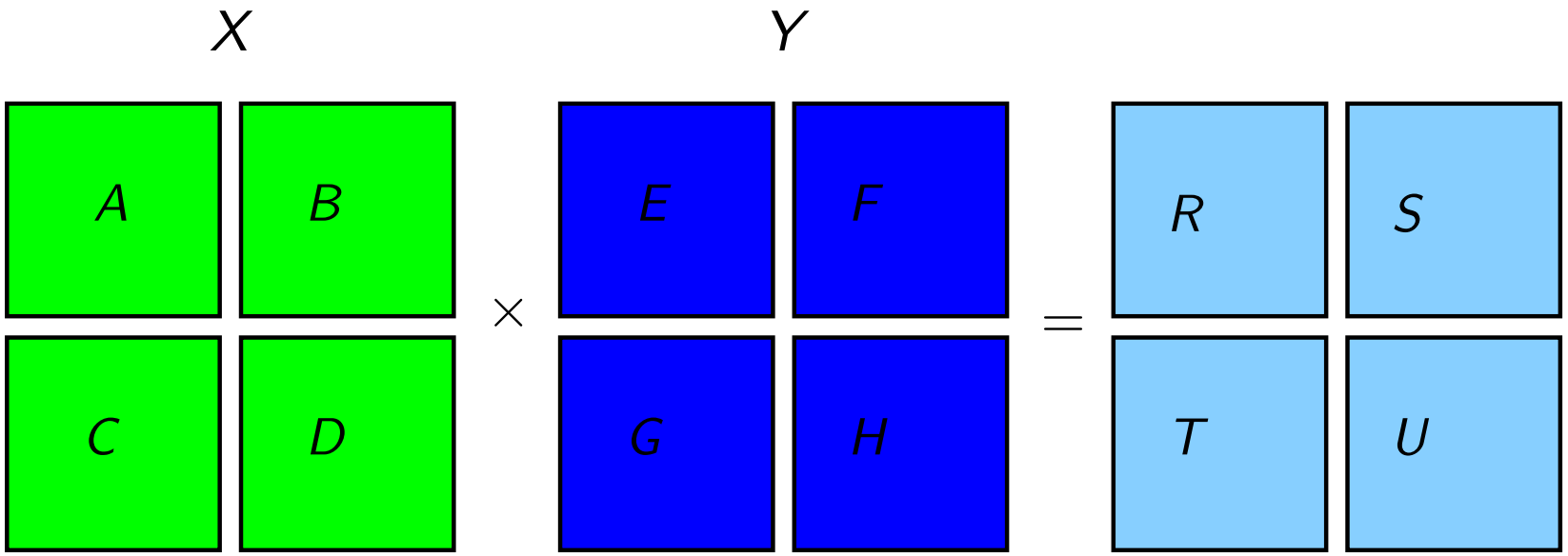
O algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dg \\ u &= cf + dh \end{aligned} \tag{1}$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista



$$R = AE + BG$$
$$S = AF + BH$$
$$T = CE + DG$$
$$U = CF + DH$$

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ e devolve $X \cdot Y$.

```
MULTI-M (X, Y, n)
 1  se n = 1 devolva X · Y
 2  (A, B, C, D) ← PARTICIONE(X, n)
 3  (E, F, G, H) ← PARTICIONE(Y, n)
 4  R ← MULTI-M(A, E, n/2) + MULTI-M(B, G, n/2)
 5  S ← MULTI-M(A, F, n/2) + MULTI-M(B, H, n/2)
 6  T ← MULTI-M(C, E, n/2) + MULTI-M(D, G, n/2)
 7  U ← MULTI-M(C, F, n/2) + MULTI-M(D, H, n/2)
 8  P ← CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
 9  devolva P
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo
para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	=	$\Theta(1)$
2	=	$\Theta(n^2)$
3	=	$\Theta(n^2)$
4	=	$T(n/2) + T(n/2)$
5	=	$T(n/2) + T(n/2)$
6	=	$T(n/2) + T(n/2)$
7	=	$T(n/2) + T(n/2)$
8	=	$\Theta(n^2)$
9	=	$\Theta(n^2)$
total	=	$8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 8\,T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	33488896

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é $\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cf
\end{aligned}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a(f-h) = af - ah \\
p_2 &= (a+b)h = ah + bh \\
p_3 &= (c+d)e = ce + de \\
p_4 &= d(g-e) = dg - de \\
p_5 &= (a+d)(e+h) = ae + ah + de + dh \\
p_6 &= (b-d)(g+h) = bg + bh - dg - dh \\
p_7 &= (a-c)(e+f) = ae + af - ce - cfd
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg \\
s &= p_1 + p_2 = af + bh \\
t &= p_3 + p_4 = ce + dg \\
u &= p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n)

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
3 $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
4 $P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
5 $P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
6 $P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
7 $P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
8 $P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
9 $P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
10 $P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
11 $R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
12 $S \leftarrow P_1 + P_2$
13 $T \leftarrow P_3 + P_4$
14 $U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
15 **devolva** $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2-3	$=$	$\Theta(n^2)$
4-10	$=$	$7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$=$	$\Theta(n^2)$
15	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$7\ T(n/2) + \Theta(n^2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugere que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$T'(n) = 7\,T'(n/2) + n^2$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

Logo $T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$
$(2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81)$.

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen (1969)	$\mathrm{O}(n^{2.807})$
$\vdots$	$\vdots$
Coppersmith e Winograd (1987)	$\mathrm{O}(n^{2.3755})$
Stothers (2010)	$\mathrm{O}(n^{2.3736})$
Williams (2013)	$\mathrm{O}(n^{2.3728642})$
Le Gall (2014)	$\mathrm{O}(n^{2.3728639})$
Alman e Williams (2020)	$\mathrm{O}(n^{2.3728596})$