

Ordenação em tempo linear

CLRS cap 8

Counting Sort

Recebe inteiros n e k , e um vetor $A[1..n]$
onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k .

Counting Sort

Recebe inteiros n e k , e um vetor $A[1..n]$
onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k .

Devolve um vetor $B[1..n]$ com
os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k , e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k .

Devolve um vetor $B[1..n]$ com os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

COUNTINGSORT(A, n)

```
1  para  $i \leftarrow 1$  até  $k$  faça
2       $C[i] \leftarrow 0$ 
3  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4       $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
5  para  $i \leftarrow 2$  até  $k$  faça
6       $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
7  para  $j \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
8       $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 
9       $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$ 
10 devolva  $B$ 
```

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$O(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$O(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$O(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$O(n)$
9	$O(n)$
10	$\Theta(1)$
total	????

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$O(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$O(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$O(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$O(n)$
9	$O(n)$
10	$\Theta(1)$
total	$\Theta(k + n)$

Counting Sort

```
COUNTINGSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 1$  até  $k$  faça
2       $C[i] \leftarrow 0$ 
3  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4       $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$ 
5  para  $i \leftarrow 2$  até  $k$  faça
6       $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
7  para  $j \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
8       $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$ 
9       $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$ 
10 devolva  $B$ 
```

Consumo de tempo: $\Theta(k + n)$

Se $k = O(n)$, o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- ▶ inteiros não-negativos com d dígitos
- ▶ cartões perfurados
- ▶ registros cuja chave tem vários campos

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- ▶ inteiros não-negativos com d dígitos
- ▶ cartões perfurados
- ▶ registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo

dígito d : mais significativo

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- ▶ inteiros não-negativos com d dígitos
- ▶ cartões perfurados
- ▶ registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo

dígito d : mais significativo

RADIXSORT(A, n, d)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até d faça
- 2 ORDENE(A, n, i)

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- ▶ inteiros não-negativos com d dígitos
- ▶ cartões perfurados
- ▶ registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo

dígito d : mais significativo

```
RADIXSORT( $A, n, d$ )  
1  para  $i \leftarrow 1$  até  $d$  faça  
2    ORDENE( $A, n, i$ )
```

ORDENE(A, n, i): ordena $A[1..n]$ pelo i -ésimo dígito dos números em A por meio de um algoritmo **estável**.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é **estável** se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é **estável** se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos **informação satélite**.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é **estável** se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos **informação satélite**.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é **estável** se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos **informação satélite**.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

- ▶ inserção direta? seleção direta? bubblesort?
- ▶ mergesort?
- ▶ quicksort?
- ▶ heapsort?
- ▶ countingsort?

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k ,
então podemos usar o **COUNTINGSORT**.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k ,
então podemos usar o COUNTINGSORT.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k + n))$.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k ,
então podemos usar o COUNTINGSORT.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k + n))$.

Se d é limitado por uma constante (ou seja, se $d = O(1)$)
e $k = O(n)$, então o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Devolve um vetor $C[1..n]$ com os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Devolve um vetor $C[1..n]$ com os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

C

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$B[0]$:	.03
$B[1]$:	.12
$B[2]$:	
$B[3]$:	.38
$B[4]$:	.47 .42
$B[5]$:	
$B[6]$:	.62
$B[7]$:	.77
$B[8]$:	.82
$B[9]$:	.93 .91

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$B[0]$:	.03
$B[1]$:	.12
$B[2]$:	
$B[3]$:	.38
$B[4]$:	.42 .47
$B[5]$:	
$B[6]$:	.62
$B[7]$:	.77
$B[8]$:	.82
$B[9]$:	.91 .93

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$B[0]$:	.03
$B[1]$:	.12
$B[2]$:	
$B[3]$:	.38
$B[4]$:	.42 .47
$B[5]$:	
$B[6]$:	.62
$B[7]$:	.77
$B[8]$:	.82
$B[9]$:	.91 .93

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Devolve um vetor $C[1..n]$ com os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1..n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Devolve um vetor $C[1..n]$ com os elementos de $A[1..n]$ em ordem crescente.

BUCKETSORT(A, n)

- 1 **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**
- 2 $B[i] \leftarrow \text{NIL}$
- 3 **para** $i \leftarrow 1$ até n **faça**
- 4 **INSIRA**($B[\lfloor nA[i] \rfloor], A[i]$)
- 5 **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**
- 6 **ORDENELISTA**($B[i]$)
- 7 $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$
- 8 **devolva** C

Bucket Sort

```
BUCKETSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
2     $B[i] \leftarrow \text{NIL}$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4    INSIRA( $B[[n - A[i]]], A[i]$ )
5  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
6    ORDENELISTA( $B[i]$ )
7   $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$ 
8  devolva  $C$ 
```

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

Bucket Sort

```
BUCKETSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
2       $B[i] \leftarrow \text{NIL}$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      INSIRA( $B[\lfloor n A[i] \rfloor], A[i]$ )
5  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
6      ORDENELISTA( $B[i]$ )
7   $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$ 
8  devolva  $C$ 
```

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

ORDENELISTA(p): ordena a lista apontada por p

Bucket Sort

```
BUCKETSORT( $A, n$ )
1  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
2       $B[i] \leftarrow \text{NIL}$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4      INSIRA( $B[\lfloor n A[i] \rfloor], A[i]$ )
5  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
6      ORDENELISTA( $B[i]$ )
7   $C \leftarrow \text{CONCATENE}(B, n)$ 
8  devolva  $C$ 
```

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

ORDENELISTA(p): ordena a lista apontada por p

CONCATENE(B, n): devolve a lista obtida da concatenação das listas apontadas por $B[0], \dots, B[n - 1]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o **ORDENELISTA** seja o INSERTIONSORT.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o **ORDENELISTA** seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o **ORDENELISTA** seja o INSERTIONSORT.

Seja X_j o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o **ORDENELISTA** seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o **ORDENELISTA** seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$.

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$.

Logo $E[Y_i] \leq E[X_i^2] = E[(\sum_j X_{ij})^2]$.

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$.

Logo $E[Y_i] \leq E[X_i^2] = E[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} E[(\sum_j X_{ij})^2] &= E[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= E[\sum_j X_{ij}^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$.

Logo $E[Y_i] \leq E[X_i^2] = E[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} E[(\sum_j X_{ij})^2] &= E[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= E[\sum_j X_{ij}^2] + E[\sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$.

Logo $E[Y_i] \leq E[X_i^2] = E[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} E[(\sum_j X_{ij})^2] &= E[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \sum_j E[X_{ij}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} E[X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$. Ademais,

$$E[Y_i] \leq \sum_j E[X_{ij}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} E[X_{ij} X_{ik}].$$

Observe que X_{ij}^2 é uma variável aleatória binária.

Consumo de tempo

X_i : número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i : número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i^2$. Ademais,

$$E[Y_i] \leq \sum_j E[X_{ij}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} E[X_{ij} X_{ik}].$$

Observe que X_{ij}^2 é uma variável aleatória binária.

Vamos calcular sua esperança:

$$E[X_{ij}^2] = \Pr[X_{ij}^2 = 1] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}.$$

Consumo de tempo

Para calcular $E[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Consumo de tempo

Para calcular $E[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $E[X_{ij}X_{ik}] = E[X_{ij}]E[X_{ik}]$.

Consumo de tempo

Para calcular $E[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $E[X_{ij}X_{ik}] = E[X_{ij}]E[X_{ik}]$.

Ademais, $E[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Consumo de tempo

Para calcular $E[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $E[X_{ij}X_{ik}] = E[X_{ij}]E[X_{ik}]$.

Ademais, $E[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Logo,

$$\begin{aligned} E[Y_i] &\leq \sum_j \frac{1}{n} + \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n}{n} + n(n-1) \frac{1}{n^2} \\ &= 1 + (n-1) \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo **BUCKETSORT** no total.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo **BUCKETSORT** no total.

Assim $E[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do **BUCKETSORT**.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo **BUCKETSORT** no total.

Assim $E[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do **BUCKETSORT**.

Mas então $E[Y] = \sum_i E[Y_i] \leq 2n - 1 = O(n)$.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo **BUCKETSORT** no total.

Assim $E[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do **BUCKETSORT**.

Mas então $E[Y] = \sum_i E[Y_i] \leq 2n - 1 = O(n)$.

O consumo de tempo esperado do **BUCKETSORT** quando os números em $A[1..n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$ é $O(n)$.

Exercícios

Exercício 7.A

Desenhe a árvore de decisão para o `SELECTIONSORT` aplicado a $A[1..3]$ com todos os elementos distintos.

Exercício 7.B [CLRS 8.1-1]

Qual o menor profundidade (= menor nível) que uma folha pode ter em uma árvore de decisão que descreve um algoritmo de ordenação baseado em comparações?

Exercício 7.C [CLRS 8.1-2]

Mostre que $\lg(n!) = \Omega(n \lg n)$ sem usar a fórmula de Stirling.

Sugestão: Calcule $\sum_{k=n/2}^n \lg k$. Use as técnicas de CLRS A.2.

Exercícios

Exercício 7.D [CLRS 8.2-1]

Simule a execução do `COUNTINGSORT` usando como entrada o vetor $A[1..11] = \langle 7, 1, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 2, 4, 3 \rangle$.

Exercício 7.E [CLRS 8.2-2]

Mostre que o `COUNTINGSORT` é estável.

Exercício 7.F [CLRS 8.2-3]

Suponha que o **para** da linha 7 do `COUNTINGSORT` é substituído por

7 **para** $j \leftarrow 1$ até n faça

Mostre que o ainda funciona. O algoritmo resultante continua estável?