

Quicksort e Select Aleatorizados

CLRS Secs 7.3, 7.4 e 9.2

Relembramos o Particione

Rearranja $A[p..r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e $A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$

PARTICIONE (A, p, r)

- 1 $x \leftarrow A[r]$ $\triangleright x$ é o “pivô”
- 2 $i \leftarrow p-1$
- 3 **para** $j \leftarrow p$ até $r-1$ **faça**
- 4 **se** $A[j] \leq x$
- 5 **então** $i \leftarrow i+1$
- 6 $A[i] \leftrightarrow A[j]$
- 7 $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
- 8 **devolva** $i+1$

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,

(i0) $A[p..i] \leq x$ (i1) $A[i+1..j-1] > x$ (i2) $A[r] = x$

Relembramos o Particione

Rearranja $A[p..r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e $A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$

PARTICIONE (A, p, r)

- 1 $x \leftarrow A[r]$ $\triangleright x$ é o “pivô”
- 2 $i \leftarrow p-1$
- 3 **para** $j \leftarrow p$ até $r-1$ **faça**
- 4 **se** $A[j] \leq x$
- 5 **então** $i \leftarrow i+1$
- 6 $A[i] \leftrightarrow A[j]$
- 7 $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$
- 8 **devolva** $i+1$

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n := r - p$.

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

1 $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$

2 $A[i] \leftrightarrow A[r]$

3 **devolva** PARTICIONE(A, p, r)

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

- 1 $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 $A[i] \leftrightarrow A[r]$
- 3 **devolva** PARTICIONE(A, p, r)

QUICKSORT-ALE(A, p, r)

- 1 **se** $p < r$
- 2 **então** $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEA}(A, p, r)$
- 3 QUICKSORT-ALE($A, p, q - 1$)
- 4 QUICKSORT-ALE($A, q + 1, r$)

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

- 1 $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 $A[i] \leftrightarrow A[r]$
- 3 **devolva** PARTICIONE(A, p, r)

QUICKSORT-ALE(A, p, r)

- 1 **se** $p < r$
- 2 **então** $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEA}(A, p, r)$
- 3 QUICKSORT-ALE($A, p, q - 1$)
- 4 QUICKSORT-ALE($A, q + 1, r$)

Consumo esperado de tempo para um vetor A arbitrário?

Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

- 1 $i \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 $A[i] \leftrightarrow A[r]$
- 3 **devolva** PARTICIONE(A, p, r)

QUICKSORT-ALE(A, p, r)

- 1 **se** $p < r$
- 2 **então** $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEA}(A, p, r)$
- 3 QUICKSORT-ALE($A, p, q - 1$)
- 4 QUICKSORT-ALE($A, q + 1, r$)

Consumo esperado de tempo para um vetor A arbitrário?

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE.

Consumo esperado de tempo

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do **PARTICIONE**.

```
PARTICIONE ( $A, p, r$ )
1   $x \leftarrow A[r]$        $\triangleright x$  é o “pivô”
2   $i \leftarrow p-1$ 
3  para  $j \leftarrow p$  até  $r-1$  faça
4      se  $A[j] \leq x$ 
5          então  $i \leftarrow i+1$ 
6               $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  devolva  $i+1$ 
```


Consumo de tempo esperado

Suponha os elementos de A são distintos.

X_{ab} = número de comparações entre o a -ésimo e o b -ésimo menor na linha 4 do **PARTICIONE** do QUICKSORT-ALE;

Queremos calcular

$$\begin{aligned} X &= \text{total de comparações "A[j] \le x"} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n X_{ab} \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô que é o } i\text{-ésimo menor} \\ & \text{para } i \text{ em } \{a, \dots, b\} \text{ é o } a\text{-ésimo ou o } b\text{-ésimo menor} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô que é o } i\text{-ésimo menor} \\ & \text{para } i \text{ em } \{a, \dots, b\} \text{ é o } a\text{-ésimo ou o } b\text{-ésimo menor} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr \{X_{ab}=1\} = \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} = E[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô que é o } i\text{-ésimo menor} \\ & \text{para } i \text{ em } \{a, \dots, b\} \text{ é o } a\text{-ésimo ou o } b\text{-ésimo menor} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr \{X_{ab}=1\} = \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} = E[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n X_{ab}$$

$$E[X] = \text{????}$$

Consumo de tempo esperado

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n E[X_{ab}] \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \Pr \{X_{ab}=1\} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \frac{2}{b-a+1} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\ &< \sum_{a=1}^{n-1} 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &< 2n \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) < 2n(1 + \ln n) \end{aligned}$$

CLRS (A.7), p.1060

Conclusões

O consumo de tempo esperado
do algoritmo QUICKSORT-ALE é $O(n \log n)$.

Do exercício 7.4-4 do CLRS temos que

O consumo de tempo esperado
do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\Theta(n \log n)$.

k -ésimo menor elemento

CLRS 9

k -ésimo menor

Problema: Encontrar o k -ésimo menor elemento de $A[1..n]$.

Suponha $A[1..n]$ sem elementos repetidos.

Exemplo: 33 é o 4o. menor elemento de:

1									10
22	99	32	88	34	33	11	97	55	66

A

1			4						10
11	22	32	33	34	55	66	88	97	99

ordenado

Mediana

Mediana é o $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ -ésimo menor ou o $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ -ésimo menor elemento.

Exemplo: a mediana é 34 ou 55:

1									10
22	99	32	88	34	33	11	97	55	66

A

1				5	6				10
11	22	32	33	34	55	66	88	97	99

ordenado

k -ésimo menor

Recebe $A[1..n]$ e k tal que $1 \leq k \leq n$
e devolve valor do k -ésimo menor elemento de $A[1..n]$.

SELECT-ORD (A, n, k)

1 **ORDENE** (A, n)

2 **devolva** $A[k]$

O consumo de tempo do **SELECT-ORD** é $\Theta(n \lg n)$.

k -ésimo menor

Recebe $A[1..n]$ e k tal que $1 \leq k \leq n$
e devolve valor do k -ésimo menor elemento de $A[1..n]$.

SELECT-ORD (A, n, k)

1 **ORDENE** (A, n)

2 **devolva** $A[k]$

O consumo de tempo do **SELECT-ORD** é $\Theta(n \lg n)$.

Dá para fazer melhor?

Menor

Recebe um vetor $A[1..n]$ e devolve o valor do **menor** elemento.

MENOR (A, n)

- 1 **menor** $\leftarrow A[1]$
- 2 **para** $k \leftarrow 2$ **até** n **faça**
- 3 **se** $A[k] < \text{menor}$
- 4 **então** **menor** $\leftarrow A[k]$
- 5 **devolva** **menor**

O consumo de tempo do algoritmo **MENOR** é $\Theta(n)$.

Segundo menor

Recebe um vetor $A[1..n]$ e devolve o valor do **segundo menor** elemento, supondo $n \geq 2$.

SEG-MENOR (A, n)

```
1  menor ← min{A[1], A[2]}
2  segmenor ← max{A[1], A[2]}
3  para  $k \leftarrow 3$  até  $n$  faça
4      se  $A[k] < \text{menor}$ 
5          então segmenor ← menor
6              menor ←  $A[k]$ 
7      senão se  $A[k] < \text{segmenor}$ 
8          então segmenor ←  $A[k]$ 
9  devolva segmenor
```

O consumo de tempo do **SEG-MENOR** é $\Theta(n)$.

Algoritmo linear?

Será que conseguimos fazer um **algoritmo linear**
para a mediana?
para o k -ésimo menor?

Algoritmo linear?

Será que conseguimos fazer um **algoritmo linear**
para a mediana?
para o k -ésimo menor?

Sim!

Usaremos o PARTICIONE do QUICKSORT!

Select aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

- 1 $k \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 $A[k] \leftrightarrow A[r]$
- 3 devolva PARTICIONE(A, p, r)

SELECT-ALEA(A, p, r, k)

- 1 se $p = r$ então devolva $A[p]$
- 2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEA}(A, p, r)$
- 3 se $k = q - p + 1$
- 4 então devolva $A[q]$
- 5 se $k < q - p + 1$
- 6 então devolva SELECT-ALEA($A, p, q - 1, k$)
- 7 senão devolva SELECT-ALEA($A, q+1, r, k - (q - p + 1)$)

Select aleatorizado

PARTICIONE-ALEA(A, p, r)

- 1 $k \leftarrow \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 $A[k] \leftrightarrow A[r]$
- 3 devolva PARTICIONE(A, p, r)

SELECT-ALEA(A, p, r, k)

- 1 se $p = r$ então devolva $A[p]$
- 2 $q \leftarrow \text{PARTICIONE-ALEA}(A, p, r)$
- 3 se $k = q - p + 1$
- 4 então devolva $A[q]$
- 5 se $k < q - p + 1$
- 6 então devolva SELECT-ALEA($A, p, q - 1, k$)
- 7 senão devolva SELECT-ALEA($A, q+1, r, k - (q - p + 1)$)

Consumo esperado de tempo?

Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p..r]$ permutação de $1..n$.

X_{ab} = número de comparações entre a e b na linha 4 do **PARTICIONE** do **SELECT-ALEA**.

Observe que X_{ab} não é a mesma de antes.

De novo, queremos calcular

$$\begin{aligned} X &= \text{total de comparações "A[j] \leq x"} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n X_{ab} \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \dots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \dots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr \{X_{ab}=1\} = \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} = E[X_{ab}]$$

Consumo de tempo esperado

Vamos supor que $k = n$.

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \dots, n\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de X_{ab} valer 1?

$$\Pr \{X_{ab}=1\} = \frac{1}{n-a+1} + \frac{1}{n-a+1} = E[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n X_{ab}$$

$$E[X] = \text{????}$$

Consumo de tempo esperado

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n E[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \Pr\{X_{ab}=1\} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \frac{2}{n-a+1} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\ &< \sum_{a=1}^{n-1} 2 < 2n. \end{aligned}$$

Consumo de tempo esperado

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n E[X_{ab}] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \Pr\{X_{ab}=1\} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n \frac{2}{n-a+1} \\ &= \sum_{a=1}^{n-1} \frac{2(n-a)}{n-a+1} \\ &< \sum_{a=1}^{n-1} 2 < 2n. \end{aligned}$$

Exercício: Refaça os cálculos para um k arbitrário.

Conclusões

O consumo de tempo esperado
do algoritmo **SELECT-ALEA** é $O(n)$.

Conclusões

O consumo de tempo esperado
do algoritmo **SELECT-ALEA** é $O(n)$.

Será que existe algoritmo de ordenação
cujo consumo de tempo é melhor que $\Theta(n \lg n)$?

Conclusões

O consumo de tempo esperado
do algoritmo **SELECT-ALEA** é $O(n)$.

Será que existe algoritmo de ordenação
cujo consumo de tempo é melhor que $\Theta(n \lg n)$?

Por exemplo,
será que existe algoritmo de ordenação linear?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $O(n \lg n)$.

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $O(n \lg n)$.

Existe algoritmo **assintoticamente** melhor?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $O(n \lg n)$.

Existe algoritmo **assintoticamente** melhor?

NÃO, se o algoritmo é baseado em **comparações**.

Prova?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $O(n \lg n)$.

Existe algoritmo **assintoticamente** melhor?

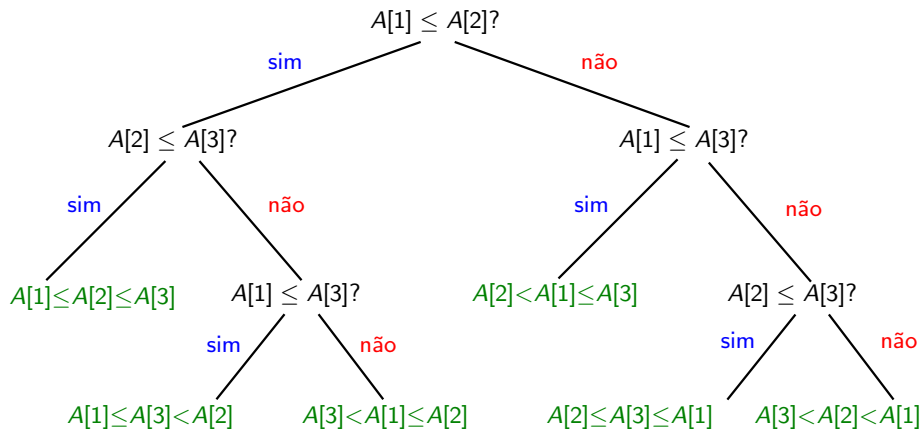
NÃO, se o algoritmo é baseado em **comparações**.

Prova?

Qualquer algoritmo baseado em comparações é uma “**árvore de decisão**”.

Exemplo

ORDENA-POR-INSERÇÃO ($A[1..3]$):



Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1 \dots n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h . A afirmação vale para $h = 0$.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h . A afirmação vale para $h = 0$.

Suponha que a afirmação vale

para toda árvore binária de altura menor que h , para $h \geq 1$.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h . A afirmação vale para $h = 0$.

Suponha que a afirmação vale

para toda árvore binária de altura menor que h , para $h \geq 1$.

Número de folhas de árvore de altura h é a soma do

número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.

Limite inferior

Considere uma **árvore de decisão** para $A[1..n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Resposta: **altura**, h , da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \dots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h . A afirmação vale para $h = 0$.

Suponha que a afirmação vale

para toda árvore binária de altura menor que h , para $h \geq 1$.

Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.

Logo, o número de folhas de uma árvore de altura h é

$$\leq 2 \times 2^{h-1} = 2^h.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$$

Portanto,

$$h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n \lg n.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$$

Portanto,

$$h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$$

Portanto,

$$h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n \lg n.$$

Alternativamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Disso, temos que $h \geq \lg(n!) \geq \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n = n(\lg n - \lg e)$.

Conclusão

Todo algoritmo de ordenação
baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

Conclusão

Todo algoritmo de ordenação baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

Aula que vem:

Algoritmos de ordenação lineares! Como assim???