

## CLRS 7

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

# Partição

**Problema:** Rearranjar um dado vetor  $A[p..r]$  e devolver um índice  $q$  tal que  $p \leq q \leq r$  e

$$A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$$

Entra:

	$p$									$r$
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

# Partição

**Problema:** Rearranjar um dado vetor  $A[p..r]$  e devolver um índice  $q$  tal que  $p \leq q \leq r$  e

$$A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$$

Entra:

	$p$								$r$	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Sai:

	$p$			$q$					$r$	
A	33	11	22	33	44	55	99	66	77	88

# Partizione

A

<i>p</i>	99	33	55	77	11	22	88	66	33	<i>r</i>	44
----------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----------	----

# Partizione

	<i>i</i>		<i>j</i>							<i>x</i>
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

# Partizione

	<i>i</i>		<i>j</i>						<i>x</i>	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

# Partizione

	<i>i</i>		<i>j</i>						<i>x</i>	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	<i>i</i>		<i>j</i>						<i>x</i>	
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

# Partizione

$i$   $j$   $x$

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$i$   $j$   $x$

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$i$   $j$   $x$

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----







# Partizione

$i$   $j$   $x$

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$i$   $j$   $x$

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$i$   $j$   $x$

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$i$   $j$   $x$

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# Partizione

*i* *j* *x*

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

# Partizione

*i* *j* *x*

A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----



# Partizione

*i* *j* *x*

A

99	33	55	77	11	22	88	66	33	44
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A

33	99	55	77	11	22	88	66	33	44
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A

33	11	55	77	99	22	88	66	33	44
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j* *x*

A

33	11	22	77	99	55	88	66	33	44
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*i* *j*

A

33	11	22	33	99	55	88	66	77	44
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

*p* *q* *r*

A

33	11	22	33	44	55	88	66	77	99
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

## Particione

Rearranja  $A[p..r]$  de modo que  $p \leq q \leq r$  e  
 $A[p..q-1] \leq A[q] < A[q+1..r]$

**PARTICIONE** ( $A, p, r$ )

1  $x \leftarrow A[r]$        $\triangleright x$  é o “pivô”

2  $i \leftarrow p-1$

3 **para**  $j \leftarrow p$  até  $r-1$  **faça**

4     **se**  $A[j] \leq x$

5         **então**  $i \leftarrow i+1$

6              $A[i] \leftrightarrow A[j]$

7  $A[i+1] \leftrightarrow A[r]$

8 **devolva**  $i+1$

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,

(i0)  $A[p..i] \leq x$       (i1)  $A[i+1..j-1] > x$       (i2)  $A[r] = x$



## Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de  $n := r - p + 1$ ?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= 2 \Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(n)$
5-6	$= 2 O(n)$
7-8	$= 2 \Theta(1)$
<b>total</b>	$= \Theta(2n + 4) + O(2n) = \Theta(n)$

**Conclusão:**

O algoritmo **PARTICIONE** consome tempo  $\Theta(n)$ .

## Particione do Sedgewick

A implementação (em C) abaixo é a mais veloz na prática.

```
int partition(int a[], int lo, int hi)
{
    int i = lo;
    int j = hi + 1;
    int v = a[lo];
    while (TRUE) {
        while (a[++i] < v)
            if (i == hi) break;
        while (v < a[--j]) ;
        if (i >= j) break;
        exch(a, i, j);
    }
    exch(a, lo, j);
    return j;
}
```

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

QUICKSORT ( $A, p, r$ )

```
1 se  $p < r$ 
2   então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )
3         QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )
4         QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )
```

	$p$								$r$	
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

QUICKSORT ( $A, p, r$ )

1 se  $p < r$

2 então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )

3 QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )

4 QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )

	$p$			$q$					$r$	
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

QUICKSORT ( $A, p, r$ )

1 se  $p < r$

2     então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )

3             QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )

4             QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )

	$p$			$q$				$r$		
A	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

QUICKSORT ( $A, p, r$ )

```
1 se  $p < r$ 
2   então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )
3         QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )
4         QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )
```

---

	$p$			$q$					$r$	
A	11	22	33	33	44	55	66	77	88	99

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

```
QUICKSORT ( $A, p, r$ )  
1  se  $p < r$   
2    então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )  
3        QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )  
4        QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )
```

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

Consumo de tempo?

# Quicksort

Rearranja  $A[p..r]$  em ordem crescente.

```
QUICKSORT ( $A, p, r$ )
1  se  $p < r$ 
2    então  $q \leftarrow$  PARTICIONE ( $A, p, r$ )
3          QUICKSORT ( $A, p, q - 1$ )
4          QUICKSORT ( $A, q + 1, r$ )
```

No começo da linha 3,

$$A[p..q-1] \leq A[q] \leq A[q+1..r]$$

Consumo de tempo?

$T(n) :=$  consumo de tempo no **pior caso** sendo  
 $n := r - p + 1$



## Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de  $n := r - p + 1$ ?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	=	?
2	=	?
3	=	?
4	=	?
<hr/>		
total	=	????

## Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de  $n := r - p + 1$ ?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	=	$\Theta(1)$
2	=	$\Theta(n)$
3	=	$T(k)$
4	=	$T(n - k - 1)$
<hr/>		
<b>total</b>	=	$T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n + 1)$

$$0 \leq k := q - p \leq n - 1$$

## Recorrência

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

## Recorrência

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n - 1) + \Theta(n)$$

$T(n)$  é  $\Theta(???)$ .

## Recorrência

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n - 1) + \Theta(n)$$

$T(n)$  é  $\Theta(n^2)$ .

Demonstração: ... **Exercício!**

## Recorrência cuidadosa

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

## Recorrência cuidadosa

$T(n)$  := consumo de tempo **máximo** quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

$n$	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	2 + 2	5 + 3	9 + 4	14 + 5

## Recorrência cuidadosa

$T(n)$  := consumo de tempo máximo quando  $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

$n$	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	2 + 2	5 + 3	9 + 4	14 + 5

Vamos mostrar que  $T(n) \leq n^2 + 1$  para  $n \geq 0$ .



# Demonstração

Prova: Trivial para  $n \leq 1$ . Se  $n \geq 2$  então

$$\begin{aligned} T(n) &= \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ T(k) + T(n-k-1) \right\} + n \\ &\stackrel{\text{hi}}{\leq} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ k^2 + 1 + (n-k-1)^2 + 1 \right\} + n \\ &= \dots \\ &= n^2 - n + 3 \\ &\leq n^2 + 1. \end{aligned}$$

Prove que  $T(n) \geq \frac{1}{2}n^2$  para  $n \geq 1$ .

## Algumas conclusões

$T(n)$  é  $\Theta(n^2)$ .

O consumo de tempo do QUICKSORT no pior caso é  $O(n^2)$ .

O consumo de tempo do QUICKSORT é  $O(n^2)$ .

## Quicksort no melhor caso

$M(n)$  := consumo de tempo **mínimo** quando  $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

## Quicksort no melhor caso

$M(n)$  := consumo de tempo **mínimo** quando  $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

## Quicksort no melhor caso

$M(n)$  := consumo de tempo **mínimo** quando  $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que  $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$  para  $n \geq 1$ .

## Quicksort no melhor caso

$M(n)$  := consumo de tempo **mínimo** quando  $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que  $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$  para  $n \geq 1$ .

Isto implica que **no melhor** caso o **QUICKSORT** é  $\Omega(n \lg n)$ ,

## Quicksort no melhor caso

$M(n)$  := consumo de tempo **mínimo** quando  $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n - k - 1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

Mostre que  $M(n) \geq (n + 1) \lg(n + 1)$  para  $n \geq 1$ .

Isto implica que **no melhor** caso o **QUICKSORT** é  $\Omega(n \lg n)$ ,  
que é o mesmo que dizer que o **QUICKSORT** é  $\Omega(n \lg n)$ .

## Mais algumas conclusões

$M(n)$  é  $\Theta(n \lg n)$ .

O consumo de tempo do QUICKSORT  
no melhor caso é  $\Omega(n \log n)$ .

Na verdade ...

O consumo de tempo do QUICKSORT  
no melhor caso é  $\Theta(n \log n)$ .



## Análise de caso médio do Quicksort

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser  $\Theta(n^2)$ , sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é  $O(n \lg n)$ .

Por que isso acontece?

## Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para  $n = 2, 3, 4, \dots$

Solução assintótica:  $T(n)$  é  $O(???)$ ,  $T(n)$  é  $\Theta(???)$

## Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

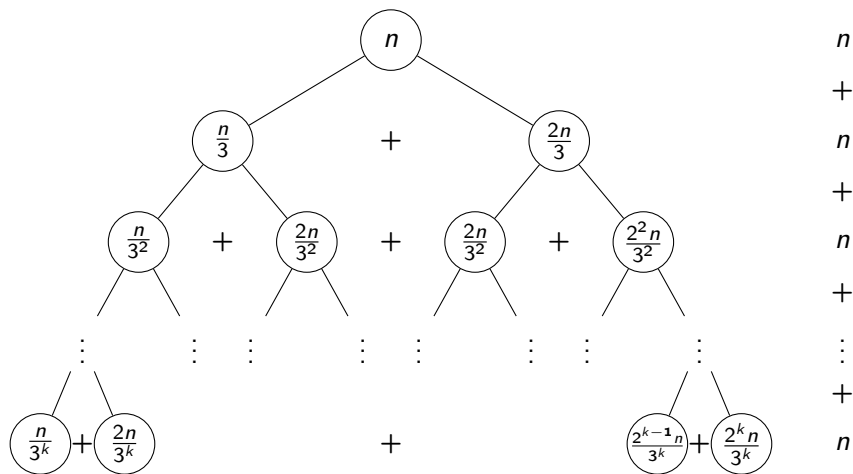
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para  $n = 2, 3, 4, \dots$

Solução assintótica:  $T(n)$  é  $O(???)$ ,  $T(n)$  é  $\Theta(???)$

Vamos olhar a **árvore da recorrência**.

# Árvore da recorrência



Os níveis da esquerda chegarão antes na base, ou seja, a árvore será inclinada para a direita.

# Árvore da recorrência

soma em cada horizontal  $\leq n$

número de “níveis”  $\leq \log_{3/2} n$

$T(n)$  = a soma de tudo

$$T(n) \leq n \log_{3/2} n + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$T(n)$  é  $O(n \lg n)$ .

## De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

$n$	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

## De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots$$

$n$	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

Vamos mostrar que  $T(n) \leq 20 n \lg n$  para  $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

## De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \dots$$

$n$	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

Vamos mostrar que  $T(n) \leq 20 n \lg n$  para  $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Para  $n = 2$  temos  $T(2) = 4 < 20 \cdot 2 \cdot \lg 2$ .

Para  $n = 3$  temos  $T(3) = 8 < 20 \cdot 3 \cdot \lg 3$ .

Suponha agora que  $n > 3$ . Então...



## Continuação da prova

$$\begin{aligned}T(n) &= T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + T(\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor) + n \\&\stackrel{\text{hi}}{\leq} 20 \lceil \frac{n}{3} \rceil \lg \lceil \frac{n}{3} \rceil + 20 \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor \lg \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + n \\&\leq 20 \frac{n+2}{3} \lceil \lg \frac{n}{3} \rceil + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\&< 20 \frac{n+2}{3} (\lg \frac{n}{3} + 1) + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\&= 20 \frac{n+2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\&= 20 \frac{n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20 \frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n\end{aligned}$$

## Continuação da continuação da prova

$$< 20n \lg \frac{2n}{3} + 14 \lg \frac{2n}{3} + n$$

$$= 20n \lg n + 20n \lg \frac{2}{3} + 14 \lg n + 14 \lg \frac{2}{3} + n$$

$$< 20n \lg n + 20n(-0.58) + 14 \lg n + 14(-0.58) + n$$

$$< 20n \lg n - 11n + 14 \lg n - 8 + n$$

$$= 20n \lg n - 10n + 14 \lg n - 8$$

$$< 20n \lg n - 10n + 7n - 8$$

$$< 20n \lg n$$

liiééééssss!

## De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

## De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

**Exercício:** Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para  $n = 2, 3, 4, \dots$  e mostre que  $T(n)$  é  $O(n \lg n)$ .

## De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

**Exercício:** Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para  $n = 2, 3, 4, \dots$  e mostre que  $T(n)$  é  $O(n \lg n)$ .

Note que, se o QUICKSORT fizer uma “boa” partição a cada, digamos, 5 níveis da recursão, o efeito geral é o mesmo, assintoticamente, que ter feito uma boa partição em todos os níveis.