Análise de Algoritmos

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

Mergesort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

```
MERGESORT (A, p, r)
se p < r
    então q ← ⌊(p + r)/2⌋
          MERGESORT (A, p, q)
          MERGESORT (A, q + 1, r)
          INTERCALA (A, p, q, r)
```

Intercalação

Problema: Dados $A[p \mathinner{.\,.} q]$ e $A[q{+}1 \mathinner{.\,.} r]$ crescentes, rearranjar $A[p \mathinner{.\,.} r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Intercalação

Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de q o problema faz sentido?

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

```
▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
para i ← p até q faça
    B[i] ← A[i]
para j ← q + 1 até r faça
    B[r + q + 1 − j] ← A[j]
i ← p
j ← r
para k ← p até r faça
    se B[i] ≤ B[j]
        então A[k] ← B[i]
              i ← i + 1
        senão A[k] ← B[j]
              j ← j − 1
```

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

```
▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
para i ← p até q faça
    B[i] ← A[i]
para j ← q + 1 até r faça
    B[r + q + 1 − j] ← A[j]
i ← p
j ← r
para k ← p até r faça
    se B[i] ≤ B[j]
        então A[k] ← B[i]
              i ← i + 1
        senão A[k] ← B[j]
              j ← j − 1
```

Essa versão do intercala não é estável. Por que?

Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
  ▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
  para i ← p até q faça
      B[i] ← A[i]
  para j ← q + 1 até r faça
      B[r + q + 1 − j] ← A[j]
  i ← p
  j ← r
  para k ← p até r faça
      se B[i] ≤ B[j] e i ≤ q            ▷ alteração
         então A[k] ← B[i]
                    i ← i + 1
         senão A[k] ← B[j]
                    j ← j − 1
```

Essa versão do intercala é estável.

Simulação

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88
B									

Simulação

	k								
A									

	i								j
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

		k							
A	11								

	i							j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

			k						
A	11	22							

		i						j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

			k						
A	11	22	33						

			i					j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

					k				
A	11	22	33	44					

			i				j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

						k			
A	11	22	33	44	55				

				i			j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

							k		
A	11	22	33	44	55	66			

				i		j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

								k	
A	11	22	33	44	55	66	77		

					i	j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

									k
A	11	22	33	44	55	66	77	88	

					i=j				
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99
					j	i			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(n)$
2	$\Theta(n)$
3	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n)$
5–6	$\Theta(1)$
7	$\Theta(n)$
8	$\Theta(n)$
9–12	$\Theta(n)$
total	$\Theta(7n + 1) = \Theta(n)$

Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome
$\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome
tempo $\Theta(n)$.

Mergesort

```
MERGESORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3               MERGESORT (A, p, q)
4               MERGESORT (A, q + 1, r)
5               INTERCALA (A, p, q, r)
```

linha	consumo máximo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Mergesort

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

.

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \end{aligned}$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n
\end{aligned}$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\bigl(2T(n/2^2) + n/2\bigr) + n \;=\; 2^2\,T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\bigl(2T(n/2^3) + n/2^2\bigr) + 2n \;=\; 2^3\,T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\bigl(2T(n/2^4) + n/2^3\bigr) + 3n \;=\; 2^4\,T(n/2^4) + 4n
\end{aligned}
$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^k T(n/2^k) + kn
\end{aligned}$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\bigl(2T(n/2^2) + n/2\bigr) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\bigl(2T(n/2^3) + n/2^2\bigr) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\bigl(2T(n/2^4) + n/2^3\bigr) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^kT(n/2^k) + kn \\
&= n + n\lg n \;=\; \Theta(n\lg n).
\end{aligned}
$$

Conclusão:
O MERGESORT consume $\Theta(n\lg n)$ unidades de tempo.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \; = \; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \quad$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Logo
$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2\,(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^k + (k-1)\,2^k + 2^k = 2^k + k\,2^k. \end{aligned}$$
$\square$

Resolução de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Resolução de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

Resolução de recorrências

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \big(T(n/2^2) + 1\big) + 1 \;=\; T(n/2^2) + 2 \\
&= \big(T(n/2^3) + 1\big) + 2 \;=\; T(n/2^3) + 3 \\
&= \big(T(n/2^4) + 1\big) + 3 \;=\; T(n/2^4) + 4 \\
&= \ldots \;=\; T(n/2^k) + k \quad \text{para } k = \lg n \\
&= T(1) + \lg n \;=\; 1 + \lg n \;=\; \Theta(\lg n).
\end{aligned}$$

Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Resolução de recorrências

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + n$ para $n \geq 2$.

Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) \;=\; T(n-1) + n$ para $n \geq 2$.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& T(n-1) + n \\
= \;& T(n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

Resolução de recorrências

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots = T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

Resolução de recorrências

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}
$$

Note que não temos restrição no n neste caso.

Só faça a conta quando
os termos que saem da recorrência são o mesmo
(como o n na recorrência do Mergesort, e o 1 na anterior).

$$T(n) \; = \; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \; 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= \; 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \; 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \;=\; 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \;=\; 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^3\left(3T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}n + n \\
&= 3^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}n + n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2\,T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T(\tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4\,T(\tfrac{n}{2^4}) + (\tfrac{3}{2})^3 n + (\tfrac{3}{2})^2 n + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \tfrac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2\,T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T(\tfrac{n}{2^3}) + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4\,T(\tfrac{n}{2^4}) + (\tfrac{3}{2})^3 n + (\tfrac{3}{2})^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \\
&= 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\Big) n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2 T(\tfrac{n}{2^2}) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k T(\frac{n}{2^k}) + (\frac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + (\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2})\, n \;=\; 3^{\lg n} + (\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1})\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1)\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1)\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n)
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2 T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \tfrac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \tfrac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big((\tfrac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= \; 3T(\tfrac{n}{2}) + n \;=\; 3^2T(\tfrac{n}{2^2}) + \tfrac{3}{2}\,n + n \\
&= \; \ldots \;=\; 3^k\,T(\tfrac{n}{2^k}) + (\tfrac{3}{2})^{k-1} n + \cdots + \tfrac{3}{2}\,n + n \quad \text{para } k = \lg n \\
&= \; 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \tfrac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,\big((\tfrac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\,n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\,n \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
&= \; 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= \; 3\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big)\,n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big)\,n \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,\Big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\Big)\,n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\,n \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
= \;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
= \;& 3\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}$$

$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big) n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\big)\, n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)\, n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,\big(2^{\lg 3}\big)^{\lg n} - 2n
\end{aligned}
$$

$$T(n) \; = \; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\, T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2} \Big) n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \Big) n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1 \big)\, n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1 \big)\, n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n \big) \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,\big(2^{\lg n} \big)^{\lg 3} - 2n \\
=\;& 3\,n^{\lg 3} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& 3^{\lg n}\,T(1) + \Big(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\Big)n \;=\; 3^{\lg n} + \Big(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\Big)n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\Big((\frac{3}{2})^{\lg n} - 1\Big)n \;=\; 3^{\lg n} + 2\,\Big(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\Big)n \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,\big(3^{\lg n} - n\big) \\
=\;& 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,3^{\lg n} - 2n \\
=\;& 3\,\big(2^{\lg n}\big)^{\lg 3} - 2n \\
=\;& 3\,n^{\lg 3} - 2n \\
=\;& \Theta(n^{\lg 3}).
\end{aligned}$$

Resolução de recorrências

$$T(n) \;=\; 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

Resolução de recorrências

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

Você consegue resolver?

Resolução de recorrências

$$T(n) \ = \ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$$

Você consegue resolver?

Exercício!