

Análise de Algoritmos

Parte destes slides são adaptações de slides
do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

18 de agosto de 2022

Análise de Algoritmos

CLRS 3.1 e 3.2

AU 3.3, 3.4 e 3.6

Notação O

Intuitivamente...

$O(f(n)) \approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$
 \approx funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ etc.

crescem todas com a **mesma velocidade**

Notação O

Intuitivamente...

$O(f(n)) \approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$
 \approx funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ etc.

crescem todas com a **mesma velocidade**

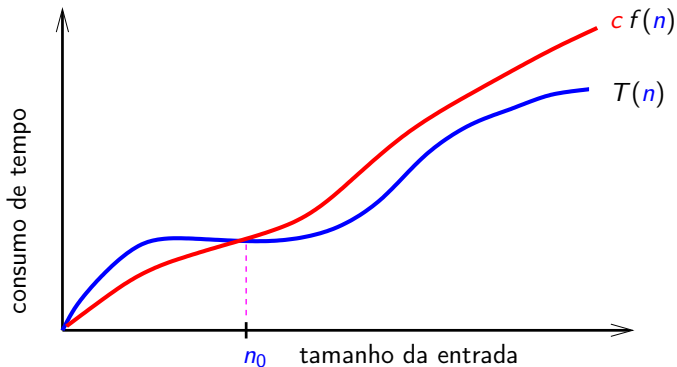
- ▶ $n^2 + 99n$ é $O(n^2)$
- ▶ $33n^2$ é $O(n^2)$
- ▶ $9n + 2$ é $O(n^2)$
- ▶ $0,00001n^3 - 200n^2$ **não é** $O(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais.
Dizemos que $T(n)$ é $O(f(n))$ se
existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq c f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Ordenação por inserção

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$        $i \leftarrow j - 1$ 
3      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
4           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$   ▷ desloca
5           $i \leftarrow i - 1$ 
6       $A[i + 1] \leftarrow chave$   ▷ insere
```

Ordenação por inserção

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$        $i \leftarrow j - 1$ 
3      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
4           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$       ▷ desloca
5           $i \leftarrow i - 1$ 
6       $A[i + 1] \leftarrow chave$       ▷ insere
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
total	?

Ordenação por inserção

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$        $i \leftarrow j - 1$ 
3      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
4           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$       ▷ desloca
5           $i \leftarrow i - 1$ 
6       $A[i + 1] \leftarrow chave$       ▷ insere
```

linha consumo de todas as execuções da linha

1 $O(n)$

2 $O(n)$

3 $O(n^2)$

4 $O(n^2)$

5 $O(n^2)$

6 $O(n)$

total $O(3n^2 + 3n) = O(n^2)$

Conclusão

O algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO consome $O(n^2)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

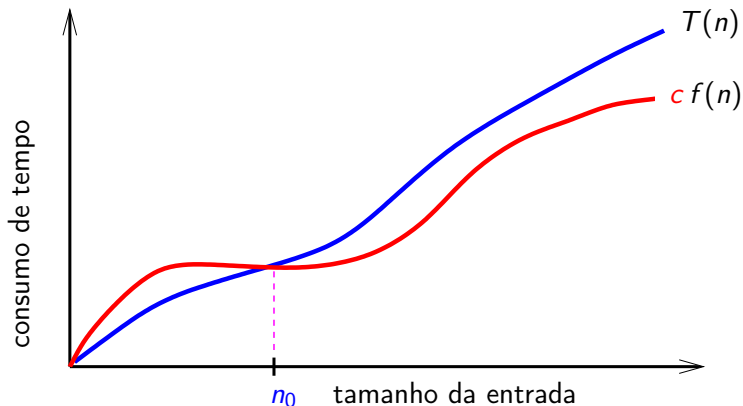
O algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$.

Notação Omega

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$c f(n) \leq T(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Prova: Aplique a definição com $c = 0.001$ e $n_0 = 8$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do **ORDENA-POR-INSERÇÃO** é $O(n^2)$ e $\Omega(n)$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do ORDENA-POR-INSERÇÃO é $O(n^2)$ e $\Omega(n)$.

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 
3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 
7       $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```


Exemplo 2

O consumo de tempo do ORDENA-POR-INSERÇÃO é $O(n^2)$ e $\Omega(n)$.

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 
3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$   $\triangleright$  desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 
7       $A[i + 1] \leftarrow chave$   $\triangleright$  insere
```

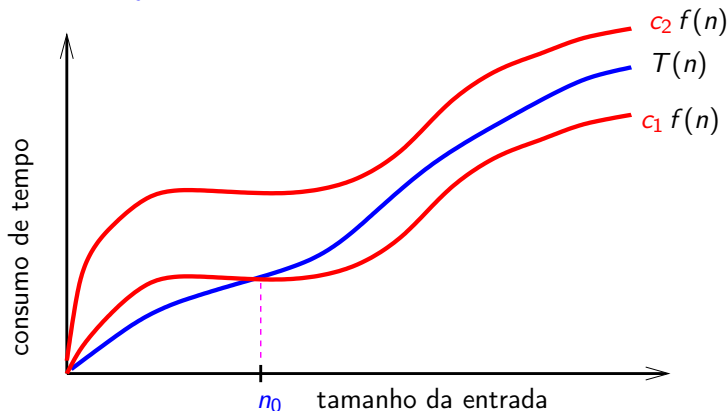
linha	todas as execuções da linha
1	= n
2-3	= $n - 1$
4	$\geq n - 1$
5-6	≥ 0
7	= $n - 1$
total	$\geq 4n - 3 = \Omega(n)$

Notação Theta

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Intuitivamente

Comparação **assintótica**, ou seja, para n **ENORME**.

comparação	comparação assintótica
$T(n) \leq f(n)$	$T(n)$ é $O(f(n))$
$T(n) \geq f(n)$	$T(n)$ é $\Omega(f(n))$
$T(n) = f(n)$	$T(n)$ é $\Theta(f(n))$

Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome 1 microsegundo ($1\mu s$).

consumo de tempo (μs)	Tamanho máximo de problemas (n)		
	1 segundo	1 minuto	1 hora
$400n$	2500	150000	9000000
$20n \lceil \lg n \rceil$	4096	166666	7826087
$2n^2$	707	5477	42426
n^4	31	88	244
2^n	19	25	31

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia,
Projeto de Algoritmos, Bookman.

Crescimento de algumas funções

n	$\lg n$	\sqrt{n}	$n \lg n$	n^2	n^3	2^n
2	1	1,4	2	4	8	4
4	2	2	8	16	64	16
8	3	2,8	24	64	512	256
16	4	4	64	256	4096	65536
32	5	5,7	160	1024	32768	4294967296
64	6	8	384	4096	262144	$1,8 \cdot 10^{19}$
128	7	11	896	16384	2097152	$3,4 \cdot 10^{38}$
256	8	16	1048	65536	16777216	$1,1 \cdot 10^{77}$
512	9	23	4608	262144	134217728	$1,3 \cdot 10^{154}$
1024	10	32	10240	1048576	$1,1 \cdot 10^9$	$1,7 \cdot 10^{308}$

Nomes de classes Θ

classe	nome
$\Theta(1)$	constante
$\Theta(\log n)$	logarítmica
$\Theta(n)$	linear
$\Theta(n \log n)$	$n \log n$
$\Theta(n^2)$	quadrática
$\Theta(n^3)$	cúbica
$\Theta(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\Theta(2^n)$	exponencial
$\Theta(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Palavras de Cautela

Suponha que \mathcal{A} e \mathcal{B} são algoritmos para um mesmo problema.

Suponha que o consumo de tempo de \mathcal{A} é “essencialmente” $100n$

e que o consumo de tempo de \mathcal{B} é “essencialmente” $n \log_{10} n$.

Palavras de Cautela

Suponha que \mathcal{A} e \mathcal{B} são algoritmos para um mesmo problema.
Suponha que o consumo de tempo de \mathcal{A} é “essencialmente” $100n$
e que o consumo de tempo de \mathcal{B} é “essencialmente” $n \log_{10} n$.

$100n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Logo, \mathcal{A} é **assintoticamente** mais eficiente que \mathcal{B} .

Palavras de Cautela

Suponha que A e B são algoritmos para um mesmo problema.
Suponha que o consumo de tempo de A é “essencialmente” $100n$
e que o consumo de tempo de B é “essencialmente” $n \log_{10} n$.

$100n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.

Logo, A é **assintoticamente** mais eficiente que B .

A é mais eficiente que B para $n \geq 10^{100}$.

10^{100} = um *googol*

\approx número de átomos no universo observável

= número **ENORME**

Palavras de Cautela

Conclusão:

Lembre das constantes e termos de baixa ordem que estão “escondidos” na notação assintótica.

Em geral um algoritmo que consome tempo $\Theta(n \lg n)$, e com fatores constantes razoáveis, é bem eficiente.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(n^2)$ pode, algumas vezes, ser satisfatório.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(2^n)$ é dificilmente aceitável.

Do ponto de vista de AA, eficiente = polinomial.

Análise do caso médio

Consideremos que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida com probabilidade uniforme.

Análise do caso médio

Consideremos que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida com probabilidade uniforme.

Qual é o número esperado de execuções da **linha 4**?

Análise do caso médio

Consideremos que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida com probabilidade uniforme.

Qual é o número esperado de execuções da **linha 4**?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 
3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 
7       $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```

Análise do caso médio

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2     $chave \leftarrow A[j]$ 
3     $i \leftarrow j - 1$ 
4    enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5       $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6       $i \leftarrow i - 1$ 
7     $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Análise do caso médio

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2       $chave \leftarrow A[j]$ 
3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6           $i \leftarrow i - 1$ 
7       $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Análise do caso médio

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2     $chave \leftarrow A[j]$ 
3     $i \leftarrow j - 1$ 
4    enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > chave$  faça
5       $A[i + 1] \leftarrow A[i]$     ▷ desloca
6       $i \leftarrow i - 1$ 
7     $A[i + 1] \leftarrow chave$     ▷ insere
```

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$. (Explicação na aula.)

Análise do caso médio

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$.

Análise do caso médio

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$.

Portanto o número esperado de execuções da linha 4 é

$$\sum_{t=1}^j t \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{t=1}^j t = \frac{1}{j} \frac{(j+1)j}{2} = \frac{j+1}{2}.$$

Análise do caso médio

Para cada valor de j , a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$.

Portanto o número esperado de execuções da linha 4 é

$$\sum_{t=1}^j t \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{t=1}^j t = \frac{1}{j} \frac{(j+1)j}{2} = \frac{j+1}{2}.$$

E o número esperado de execuções da linha 4 no total é

$$\sum_{j=2}^n \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (j+1) = \frac{(n+4)(n-1)}{4} = \Theta(n^2).$$

Ordenação

$A[1..n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

Ordenação

$A[1..n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$ no pior caso e $\Theta(n^2)$ no caso médio.

Ordenação

$A[1 \dots n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1 \dots n]$ de modo que ele fique crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$ no pior caso e $\Theta(n^2)$ no caso médio.

Conseguimos fazer melhor?

Ordenação

$A[1..n]$ é **crescente** se $A[1] \leq \dots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$ no pior caso e $\Theta(n^2)$ no caso médio.

Conseguimos fazer melhor?

Sim! Usando **divisão e conquista!**