Caminhos mais curtos

CLRS Secs 24.3 e 25.2

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- Para vértices u e v, a distância de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v.

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- Para vértices u e v, a distância de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v.

Problema 1: Dados G, c e um vértice s de G,
encontrar a distância de s a cada vértice de G.

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- Para vértices u e v, a distância de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v.

Problema 1: Dados G, c e um vértice s de G,
encontrar a distância de s a cada vértice de G.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- Para vértices u e v, a distância de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v.

Problema 1: Dados G, c e um vértice s de G,
encontrar a distância de s a cada vértice de G.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Algoritmo de Dijkstra: comprimentos não negativos

Caminhos mais curtos

Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ e
uma função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

- O comprimento de um caminho é a soma dos comprimentos de suas arestas.
- Para vértices u e v, a distância de u a v é o menor comprimento de um caminho de u a v.

Problema 1: Dados G, c e um vértice s de G,
encontrar a distância de s a cada vértice de G.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Algoritmo de Dijkstra: comprimentos não negativos

Algoritmo de Floyd-Warshall: sem circuitos negativos

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v, a distância de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v, a distância de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v, a distância de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Poderíamos dar “voltas” num circuito negativo, cada vez obtendo um “caminho” de comprimento menor.

Circuitos negativos

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Para vértices u e v, a distância de u a v é o comprimento de um caminho entre u e v de comprimento mínimo.

Quando há um circuito de comprimento negativo no grafo, a distância entre certos vértices pode ficar mal-definida.

Poderíamos dar “voltas” num circuito negativo, cada vez obtendo um “caminho” de comprimento menor.

Assim definimos a distância $\delta(u, v)$ como
$-\infty$, caso exista circuito negativo alcançavel de u,
e o comprimento de um caminho mais curto de u a v c.c.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:
Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:
Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:
Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Corolário: Para G e c, se o último arco de um caminho mais curto de s a t é o arco ut, então $\delta(s,t) = \delta(s,u) + c(ut)$.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:
Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Corolário: Para G e c, se o último arco de um caminho mais curto de s a t é o arco ut, então $\delta(s,t) = \delta(s,u) + c(ut)$.

Lema: Para G, c e s,

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + c(uv) \text{ para todos os arcos } uv.$$

Algoritmo de Dijkstra

π: representa os caminhos mínimos até s

d: guarda estimativa da distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$
$s.d \leftarrow 0$
$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
    $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
        se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
            então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
devolva π e d

Algoritmo de Dijkstra

π: representa os caminhos mínimos até s

d: guarda estimativa da distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \text{nil}$
$s.d \leftarrow 0$
$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
    $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    para cada $v \in \text{adj}(u)$ **faça**
        se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
            então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
devolva π e d

$u.d$: comprimento de um caminho mínimo de s a u
cujos vértices internos estão fora de Q

Algoritmo de Dijkstra

π: representa os caminhos mínimos até s

d: guarda estimativa da distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$

$s.d \leftarrow 0$

$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**

  $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

  para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**

    se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$

      então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$

devolva π e d

Invariantes: $u.d = \delta(s,u)$ se $u \notin Q$ e $u.d \geq \delta(s,u)$ se $u \in Q$

Algoritmo de Dijkstra

π: representa os caminhos mínimos até s

d: guarda estimativa da distância de s ao vértice

DIJKSTRA (G, c, s)

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$
$s.d \leftarrow 0$
$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
  $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
  para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
    se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
      então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
devolva π e d

Invariantes: $u.d = \delta(s, u)$ se $u \notin Q$ e $u.d \geq \delta(s, u)$ se $u \in Q$

Onde usamos que não há arestas de comprimento negativo?

Arestas de comprimento negativo

Seja v o vértice de Q com $\delta(s, v)$ mínimo.

Seja u tal que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + c(uv)$.

Arestas de comprimento negativo

Seja v o vértice de Q com $\delta(s, v)$ mínimo.

Seja u tal que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + c(uv)$.

Como $c(uv) > 0$, temos que $\delta(s, u) < \delta(s, v)$.
Logo, pela escolha de v, vale que $u \notin Q$ e $d(u) = \delta(s, u)$.

Arestas de comprimento negativo

Seja v o vértice de Q com $\delta(s, v)$ mínimo.

Seja u tal que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + c(uv)$.

Como $c(uv) > 0$, temos que $\delta(s, u) < \delta(s, v)$.
Logo, pela escolha de v, vale que $u \notin Q$ e $d(u) = \delta(s, u)$.

Se $c(uv) < 0$, então o vértice u pode estar em Q,
e o valor de $d(v)$ quando o removemos de Q pode não ser $\delta(s, v)$.

Este valor seria o comprimento de um caminho
mínimo de s a v cujos nós internos estão todos em Q.

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

$\textsc{Dijkstra}\ (G, c, s)$

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$

$s.d \leftarrow 0$

$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$

enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**

  $u \leftarrow \textsc{Extract-Min}(Q)$

  para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**

    se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$

      então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$

devolva π e d

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

```
DIJKSTRA (G, c, s)
1  para v ∈ V(G) faça    v.d ← ∞    v.π ← nil
2  s.d ← 0
3  Q ← V(G)    ▷ fila de prioridade: chave de v é v.d
4  enquanto Q ≠ ∅ faça
5      u ← EXTRACT-MIN(Q)
6      para cada v ∈ adj(u) faça
7          se v ∈ Q e v.d > u.d + c(uv)
8              então    v.π ← u    v.d ← u.d + c(uv)
9  devolva π e d
```

Se Q for uma lista simples:

Linha 3 e EXTRACT-MIN : $\Theta(n)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$

2 $s.d \leftarrow 0$

3 $Q \leftarrow V(G)$ ▷ fila de prioridade: chave de v é $v.d$

4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**

5 $\quad u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

6 $\quad$ **para cada** $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**

7 $\quad\quad$ **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$

8 $\quad\quad\quad$ **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$

9 **devolva** π e d

Se Q for uma lista simples:

Linha 3 e EXTRACT-MIN : $\Theta(n)$

Consumo de tempo do Dijkstra: $\Theta(n^2)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

para $v \in V(G)$ **faça** $\quad v.d \leftarrow \infty \quad v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$
$s.d \leftarrow 0$
$Q \leftarrow V(G)$ $\quad \triangleright$ fila de prioridade: chave de v é $v.d$
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
 $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
 para cada $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**
  se $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$
   então $\quad v.\pi \leftarrow u \quad v.d \leftarrow u.d + c(uv)$
devolva π e d

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

DIJKSTRA (G, c, s)

1 **para** $v \in V(G)$ **faça** $v.d \leftarrow \infty$ $v.\pi \leftarrow \mathrm{nil}$

2 $s.d \leftarrow 0$

3 $Q \leftarrow V(G)$ ▷ fila de prioridade: chave de v é $v.d$

4 **enquanto** $Q \neq \emptyset$ **faça**

5 $\quad u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

6 $\quad$ **para cada** $v \in \mathrm{adj}(u)$ **faça**

7 $\quad\quad$ **se** $v \in Q$ e $v.d > u.d + c(uv)$

8 $\quad\quad\quad$ **então** $v.\pi \leftarrow u$ $v.d \leftarrow u.d + c(uv)$

9 **devolva** π e d

Se Q for implementada com um heap:

Inicialização: $\Theta(n)$ EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY : $\mathrm{O}(\lg n)$

DECREASE-KEY : linha 8

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

```
DIJKSTRA (G, c, s)
para v ∈ V(G) faça    v.d ← ∞    v.π ← nil
s.d ← 0
Q ← V(G)    ▷ fila de prioridade: chave de v é v.d
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← EXTRACT-MIN(Q)
    para cada v ∈ adj(u) faça
        se v ∈ Q e v.d > u.d + c(uv)
            então    v.π ← u    v.d ← u.d + c(uv)
devolva π e d
```

Consumo de tempo do Dijkstra: $\mathrm{O}(m \lg n)$

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade:

```
DIJKSTRA (G, c, s)
para v ∈ V(G) faça    v.d ← ∞    v.π ← nil
s.d ← 0
Q ← V(G)    ▷ fila de prioridade: chave de v é v.d
enquanto Q ≠ ∅ faça
    u ← EXTRACT-MIN(Q)
    para cada v ∈ adj(u) faça
        se v ∈ Q e v.d > u.d + c(uv)
            então    v.π ← u    v.d ← u.d + c(uv)
devolva π e d
```

Consumo de tempo do Dijkstra: $\mathrm{O}(m \lg n)$
Consumo de tempo com Fibonacci heap: $\mathrm{O}(m + n \lg n)$

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Hipótese:

Não há circuito de comprimento negativo em G.

Problema 2

Dados:

$G = (V, E)$: grafo dirigido

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Função c que atribui um comprimento $c(e)$ para cada $e \in E$.

Problema 2: Dados G e c,
encontrar a distância entre todo par de vértices de G.

Hipótese:

Não há circuito de comprimento negativo em G.

Algoritmo de Floyd-Warshall: programação dinâmica

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Vamos identificar $V = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Para $k \in [n]$, seja P um caminho mais curto de s a t cujos vértices internos estão todos em $[k]$.

Propriedades

P: caminho mais curto de s a t

Subestrutura ótima:

Subcaminhos de P são caminhos mais curtos.

Lema: Dados G e c, seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho mais curto em G de v_1 a v_k. Para todo $1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{ij} := \langle v_i, \ldots, v_j \rangle$ é um caminho mais curto de v_i a v_j.

Vamos identificar $V = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Para $k \in [n]$, seja P um caminho mais curto de s a t cujos vértices internos estão todos em $[k]$.

Floyd-Warshall: Usa caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Se P não usa k como vértice intermediário,
então P é um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k-1]$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Usa caminhos mínimos
com vértices intermediários em $[k-1]$ para obter
caminhos mínimos com vértices intermediários em $[k]$.

Seja P um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k]$.

Se P não usa k como vértice intermediário,
então P é um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k-1]$.
senão $P = P' \cdot P''$ onde
P' é um caminho mínimo de i a k em G
com vértices intermediários em $[k-1]$ e
P'' é um caminho mínimo de k a j em G
com vértices intermediários em $[k-1]$.

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

A matrix D^n tem a resposta ao Problema 2.

Recorrência

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k]$.

$$D^k[i,j] = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

A matrix D^n tem a resposta ao Problema 2.

Algoritmo de Floyd-Warshall: calcula D^n pela recorrência.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL (G, c)

$n \leftarrow |V(G)|$
$D^0 \leftarrow c$
para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
        para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
            $D^k[i,j] \leftarrow \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\}$
devolva D^n

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k-1]$.

```
FLOYD-WARSHALL (G, c)
n ← |V(G)|
D^0 ← c
para k ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n faça
        para j ← 1 até n faça
            D^k[i,j] ← min{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]}
devolva D^n
```

Consumo de tempo: $\Theta(n^3)$

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

FLOYD-WARSHALL (G, c)

$n \leftarrow |V(G)|$
$D^0 \leftarrow c$
para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
      $D^k[i,j] \leftarrow \min\{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]\}$
devolva D^n

Consumo de tempo: $\Theta(n^3)$

Dijkstra: $\mathrm{O}(nm \lg n)$
$\mathrm{O}(n(m + n \lg n))$ com Fibonacci heap.

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G
com vértices intermediários em $[k-1]$.

```
FLOYD-WARSHALL (G, c)
n ← |V(G)|
D^0 ← c
para k ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n faça
        para j ← 1 até n faça
            D^k[i,j] ← min{D^{k-1}[i,j], D^{k-1}[i,k] + D^{k-1}[k,j]}
devolva D^n
```

E os caminhos mais curtos?

Algoritmo de Floyd-Warshall

$D^k[i,j]$: comprimento de um caminho mínimo de i a j em G com vértices intermediários em $[k-1]$.

```
FLOYD-WARSHALL (G, c)
n ← |V(G)|
D^0 ← c
para k ← 1 até n faça
    para i ← 1 até n faça
        para j ← 1 até n faça
            D^k[i,j] ← min{D^{k−1}[i,j], D^{k−1}[i,k] + D^{k−1}[k,j]}
devolva D^n
```

E os caminhos mais curtos?

Guarde informação durante o processo acima para obter um caminho mais curto entre quaisquer dois vértices de G.

Simulação

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & {\color{red}5} & -5 & 0 & {\color{red}-2} \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \color{red}{4} & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \color{red}{5} & \color{red}{11} \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

$$D^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Simulação

Distâncias:

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obter os caminhos?

Simulação

Distâncias:

$$D^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obter os caminhos?

Exercício!