

Aula 24

Problema do sanduiche de presunto

Cap 8 do livro de de Berg et al.

Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ bissetora S se

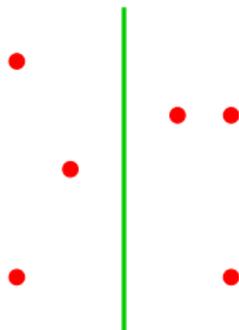
há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ bisseta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

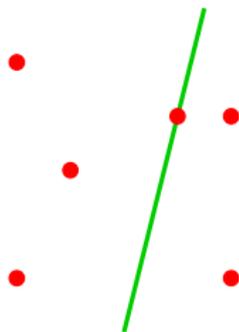


Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ bisseta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

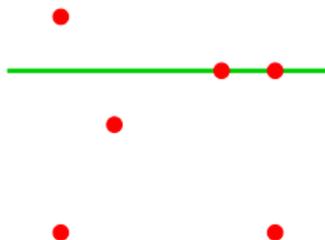


Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ bisseta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

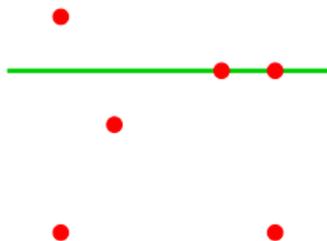


Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ **bissecta** S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .



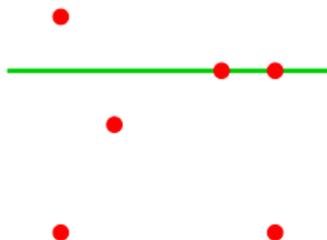
Se $|S|$ é ímpar, então ℓ sempre passa por um ponto de S .

Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ bisseta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .



Se $|S|$ é ímpar, então ℓ sempre passa por um ponto de S .

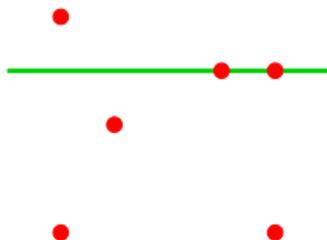
Para achar uma bissecção, podemos assumir que $|S|$ é ímpar.

Reta bissetora

S : conjunto (finito) de pontos no plano

Reta ℓ **bissecta** S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .



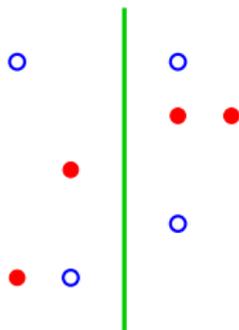
Se $|S|$ é ímpar, então ℓ sempre passa por um ponto de S .

Para achar uma bissecção, podemos assumir que $|S|$ é ímpar.

Podemos testar se uma reta é bissetora em $O(|S|)$.

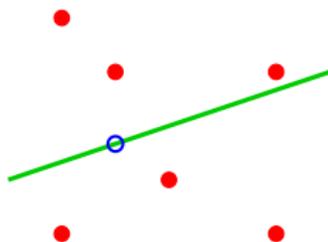
Problema (discreto) do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .



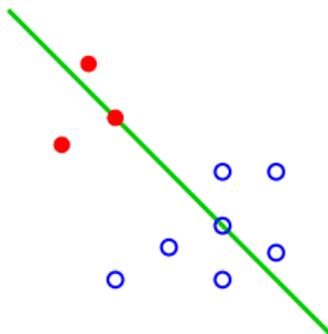
Problema (discreto) do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .



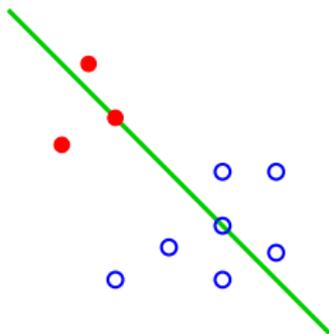
Problema (discreto) do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .



Problema (discreto) do sanduiche de presunto

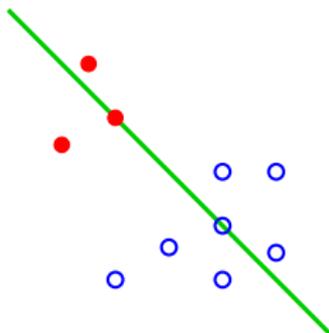
Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .



Se A e B são ímpares,
tal reta passa por um ponto de A e por um de B .

Problema (discreto) do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

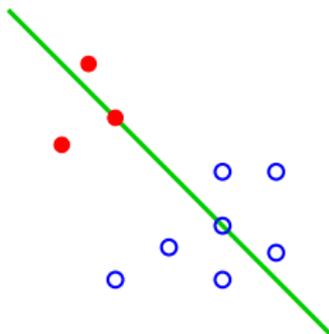


Se A e B são ímpares,
tal reta passa por um ponto de A e por um de B .

Será que sempre existe uma tal reta?

Problema (discreto) do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .



Se A e B são ímpares,
tal reta passa por um ponto de A e por um de B .

Será que sempre existe uma tal reta?

Fácil testar em tempo $O(n^3)$, onde n é o número total de pontos.

Teste em $O(n^2 \lg n)$

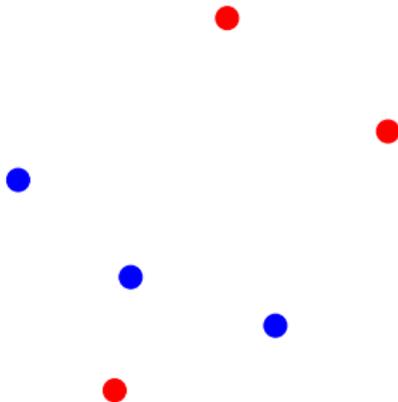
Pré-processamento:

Ordene todos os pares de pontos
pela inclinação da reta que passa por eles.

Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

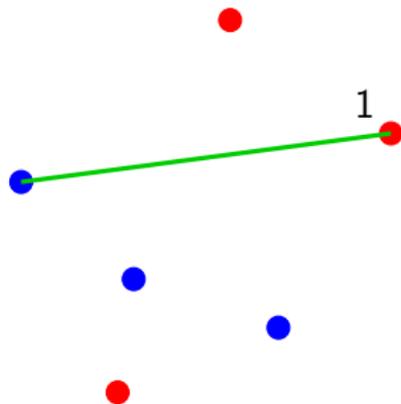
Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.



Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

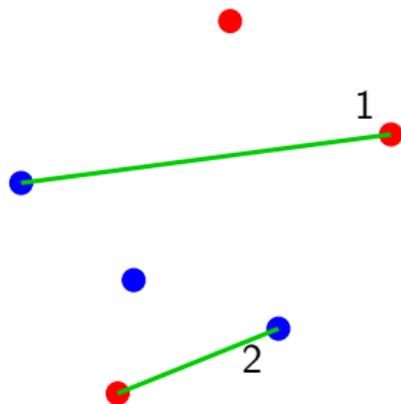
Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.



Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

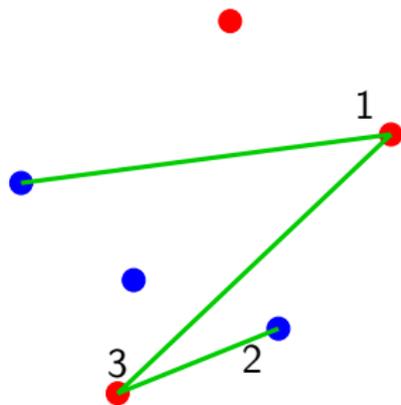
Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.



Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

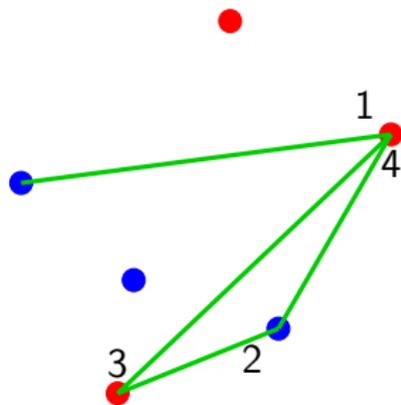
Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.



Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.

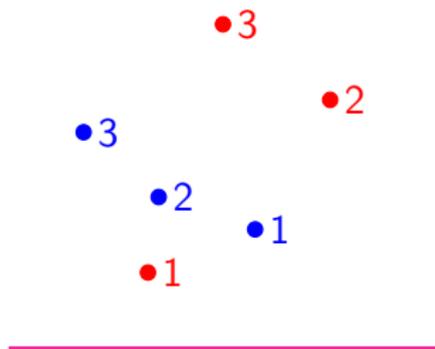


Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

Ordene os pares de pontos pela inclinação.

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y-coordenada.



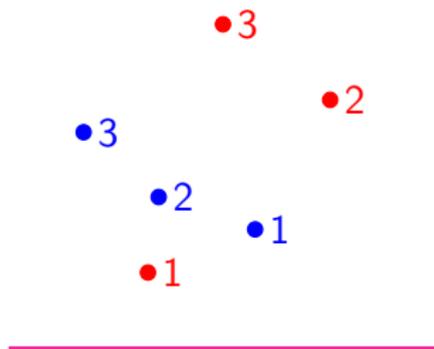
▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Teste em $O(n^2 \lg n)$

Pré-processamento:

Ordene os pares de pontos pela inclinação.

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y-coordenada.



▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça...

Teste em $O(n^2 \lg n)$

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y -coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

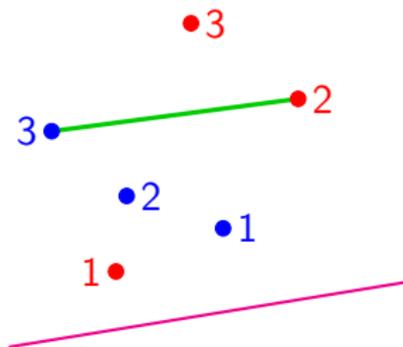
Teste em $O(n^2 \lg n)$

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y -coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas,
teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções



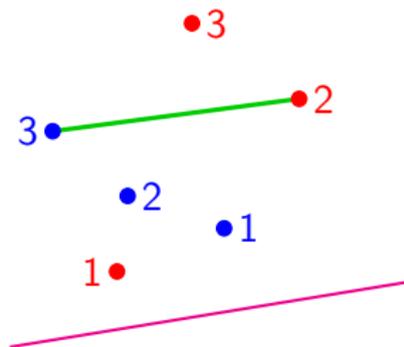
Teste em $O(n^2 \lg n)$

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y-coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas,
teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções



▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

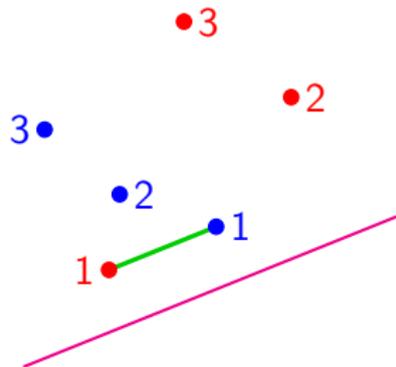
Teste em $O(n^2 \lg n)$

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y -coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas,
teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções



▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

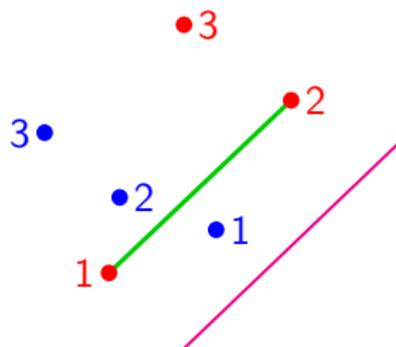
Teste em $O(n^2 \lg n)$

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas,
teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções

▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

senão inverta a ordem dos dois pontos na lista correspondente.



▷ eles são consecutivos na lista; isso mantém o invariante sobre as listas.

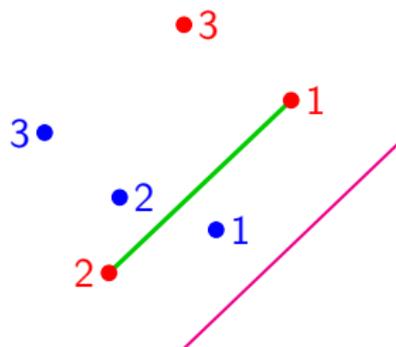
Teste em $O(n^2 \lg n)$

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas,
teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções

▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

senão inverta a ordem dos dois pontos na lista correspondente.



▷ eles são consecutivos na lista; isso mantém o invariante sobre as listas.

Teste em $O(n^2 \lg n)$

Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y -coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas, teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções

▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

senão inverta a ordem dos dois pontos na lista correspondente.

▷ eles são consecutivos na lista; isso mantém o invariante sobre as listas.

Teste em $O(n^2 \lg n)$

Ordene todos os pares de pontos pela inclinação da reta que passa por eles.

Inicialize duas listas, uma com os pontos **vermelhos** e outra com os pontos **azuis**, ordenados pela Y -coordenada.

▷ listas de pontos vermelhos e azuis estão ordenadas por 'distância' à reta corrente.

Para cada par de pontos, **na ordem da inclinação**, faça

Se os pontos têm cores distintas, teste se a reta entre eles é bissetora das duas coleções

▷ busque cada ponto do par na sua lista para ver se é a mediana.

senão inverta a ordem dos dois pontos na lista correspondente.

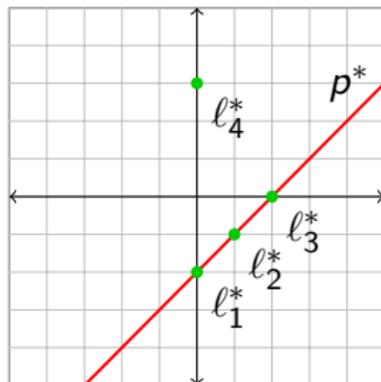
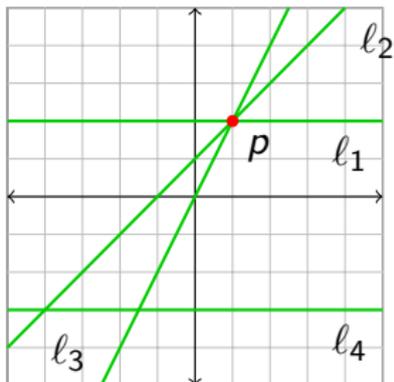
▷ eles são consecutivos na lista; isso mantém o invariante sobre as listas.

Consumo de tempo: $O(n^2 \lg n)$ para ordenar, e na busca nas listas.

Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p , e é denotada por p^* .

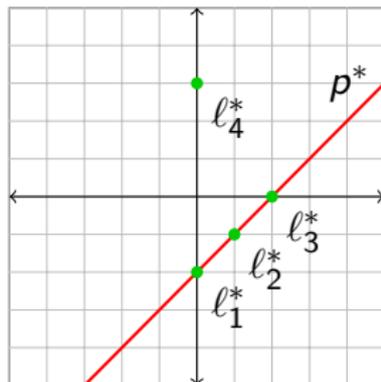
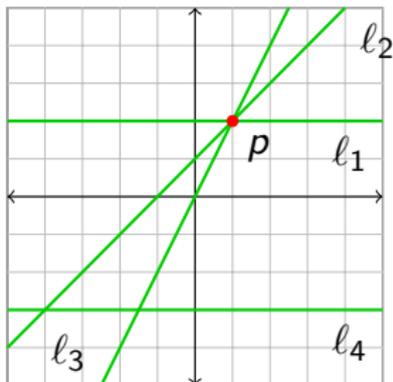
O dual da reta l definida por $y = ax - b$ é o ponto $l^* = (a, b)$.



Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p , e é denotada por p^* .

O dual da reta l definida por $y = ax - b$ é o ponto $l^* = (a, b)$.



Fatos:

- Ponto p está na reta l sse ponto l^* está na reta p^* .
- Ponto p está acima da reta l sse ponto l^* está acima da reta p^* .

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

... um ponto que... ?

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

... um ponto que... ?

... corresponda a uma reta bissetora...

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

... um ponto que... ?

... corresponda a uma reta bissetora...

O que é uma reta bissetora no dual?

Reta ℓ bissecta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

... um ponto que... ?

... corresponda a uma reta bissetora...

O que é uma reta bissetora no dual?

Reta ℓ bissecta S se

há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

Ponto ℓ^* tem no máximo $|S|/2$ retas de S^* acima e abaixo dele.

Dual do problema da bissecção

Dada uma coleção de pontos, encontrar uma reta que a bissecta.

Como isso se traduz para o plano dual?

Dada uma coleção de retas (nenhuma vertical)... o que queremos?

... um ponto que... ?

... corresponda a uma reta bissetora...

O que é uma reta bissetora no dual?

Reta ℓ bissecta S se

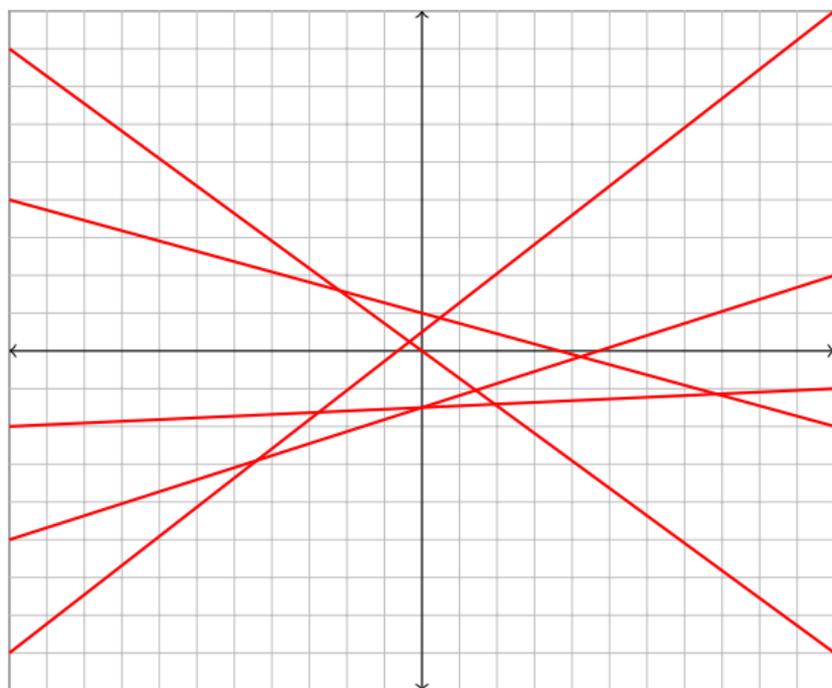
há no máximo $|S|/2$ pontos de S em cada lado da reta ℓ .

Ponto ℓ^* tem no máximo $|S|/2$ retas de S^* acima e abaixo dele.

Dada uma coleção de retas, encontrar um ponto que deixa no máximo metade da coleção acima e no máximo metade abaixo dele.

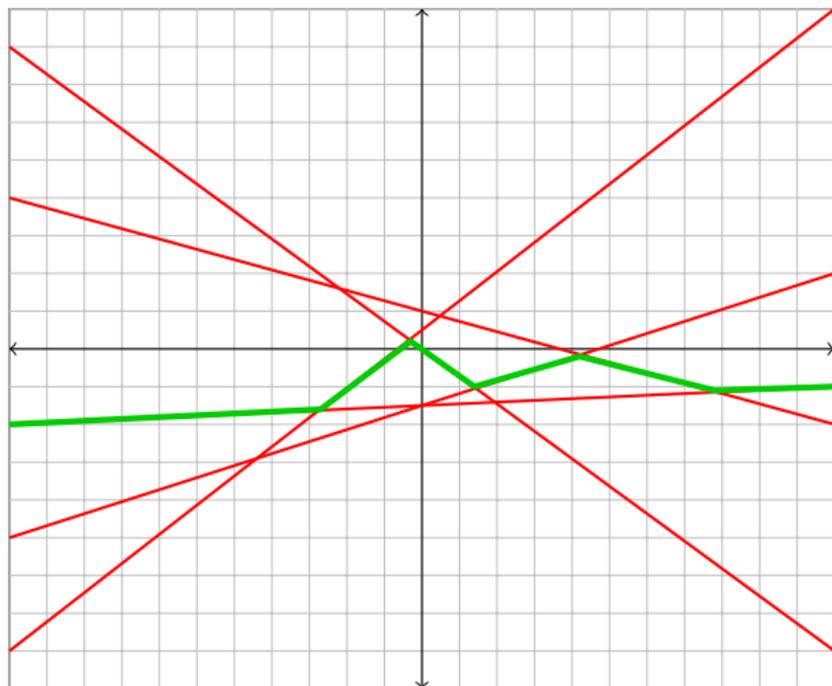
Problema com uma coleção só de retas

Dada uma **coleção ímpar de retas**, encontrar um **ponto** que deixa no máximo metade da coleção acima e no máximo metade abaixo dele.



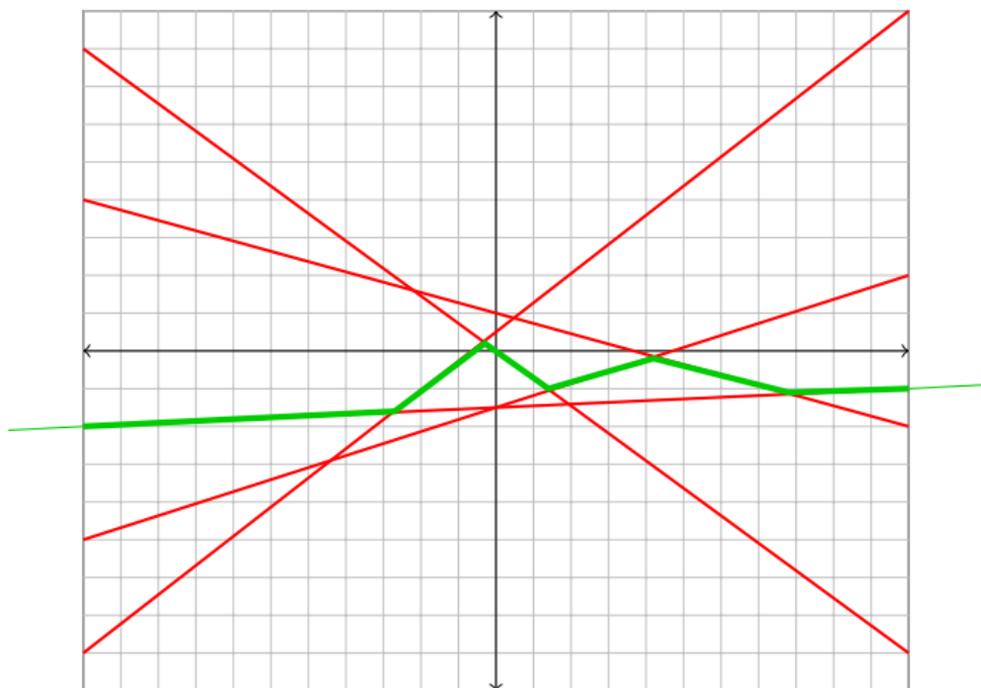
Nível mediano da coleção

Dada uma coleção ímpar de retas, encontrar um ponto que deixa no máximo metade da coleção acima e no máximo metade abaixo dele.



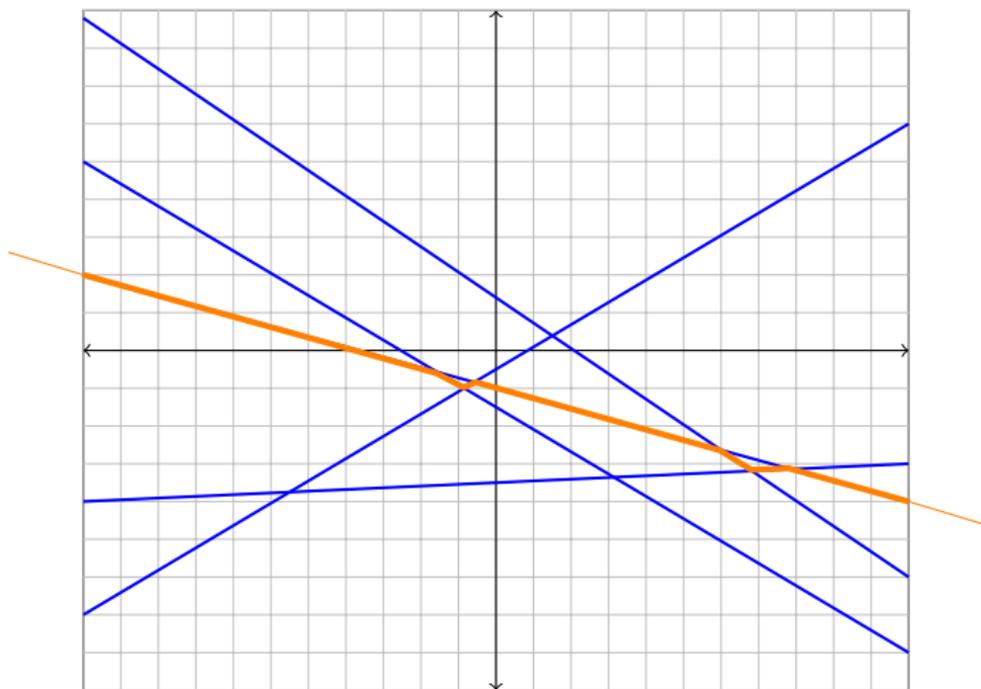
Nível mediano: começa e termina na mesma reta

Dada uma coleção ímpar de retas, encontrar um ponto que deixa no máximo metade da coleção acima e no máximo metade abaixo dele.



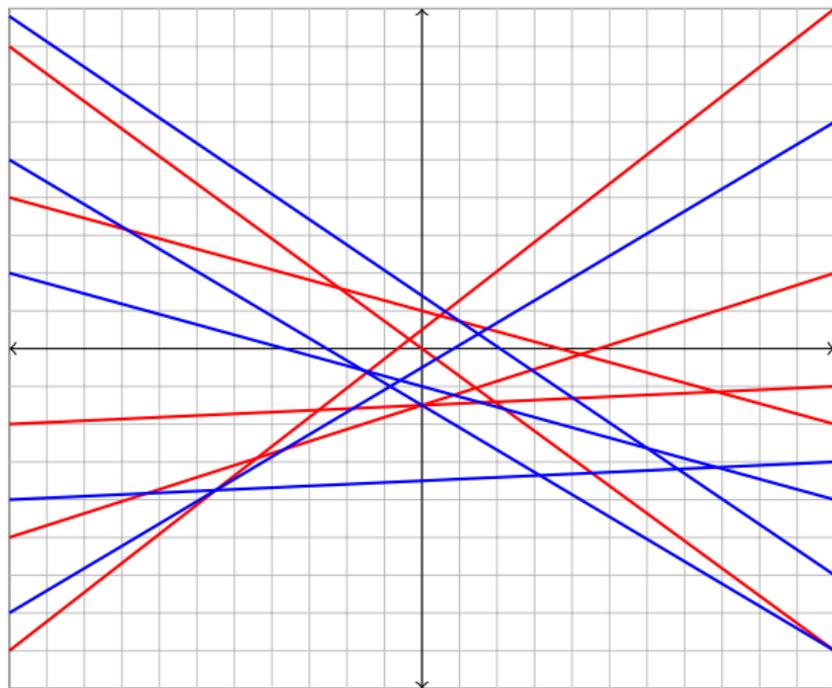
Segunda coleção e seu nível mediano

Dada uma coleção ímpar de retas, encontrar um ponto que deixa no máximo metade da coleção acima e no máximo metade abaixo dele.



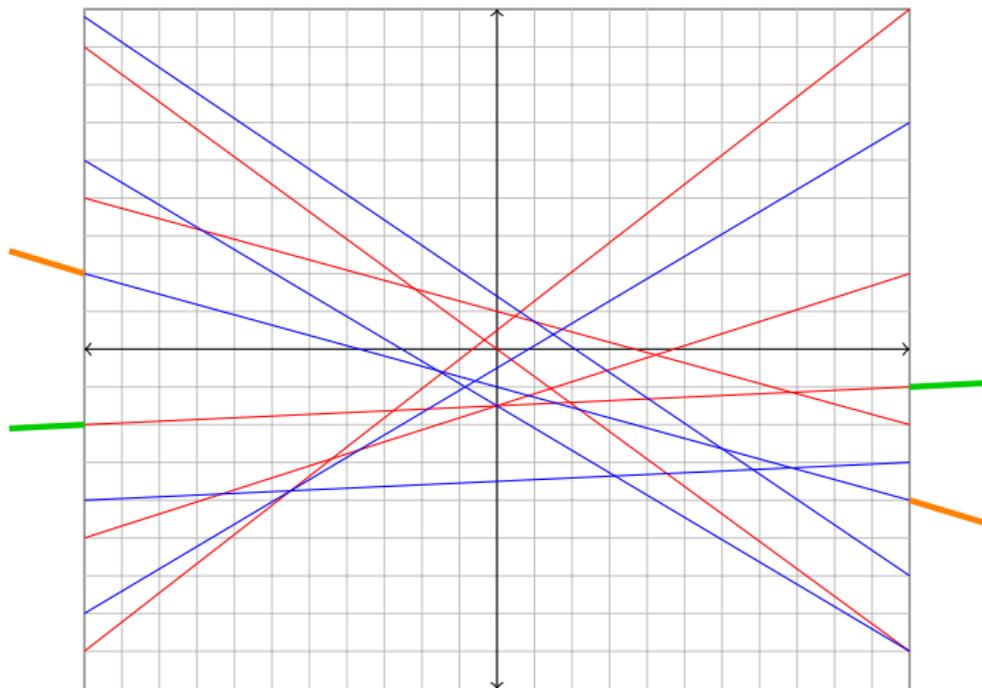
Problema com duas coleções de retas

Dadas coleções ímpares de retas **vermelhas** e **azuis**, encontrar um **ponto** que deixa no máximo metade da coleção vermelha e azul acima e no máximo metade abaixo dele.



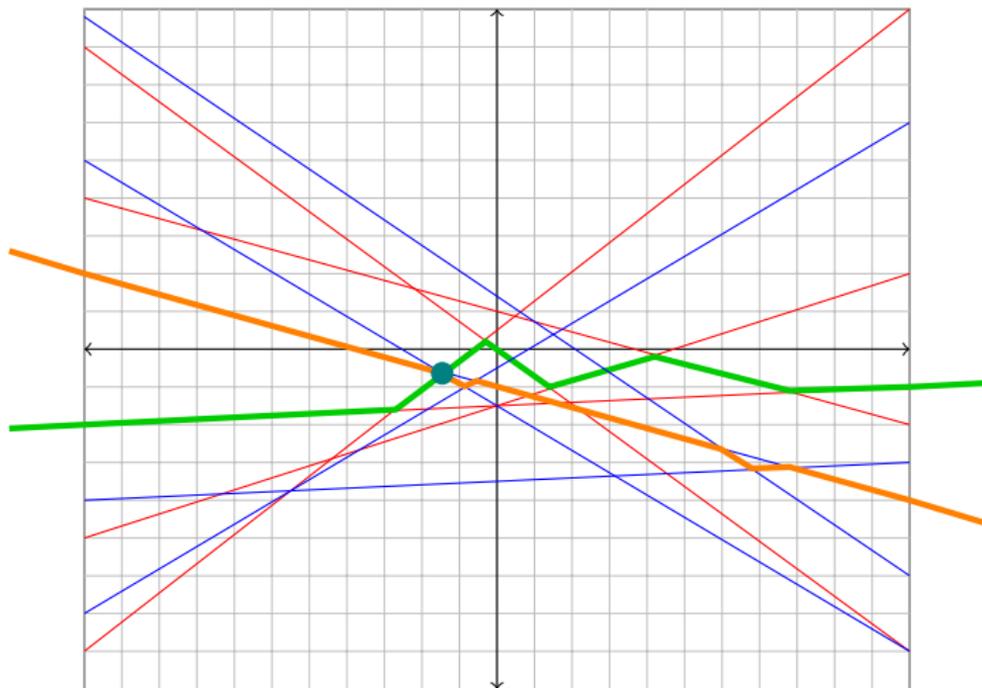
Níveis medianos sempre se cruzam!

Dadas coleções ímpares de retas **vermelhas** e **azuis**, encontrar um **ponto** que deixa no máximo metade da coleção vermelha e azul acima e no máximo metade abaixo dele.



Uma interseção é uma solução!

Dadas coleções ímpares de retas **vermelhas** e **azuis**, encontrar um **ponto** que deixa no máximo metade da coleção vermelha e azul acima e no máximo metade abaixo dele.



Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Como achar uma tal interseção?

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Como achar uma tal interseção?

Encontramos os níveis das interseções para cada coleção, como na aula passada.

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Como achar uma tal interseção?

Encontramos os níveis das interseções para cada coleção, como na aula passada.

Percorremos o nível mediano das duas simultaneamente, em busca de um vértice comum.

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Como achar uma tal interseção?

Encontramos os níveis das interseções para cada coleção, como na aula passada.

Percorremos o nível mediano das duas simultaneamente, em busca de um vértice comum.

Consumo de tempo: $O(n^2)$

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Encontramos os níveis das interseções para cada coleção, como na aula passada.

Percorremos o nível mediano das duas simultaneamente, em busca de um vértice comum.

Consumo de tempo: $O(n^2)$

Problema do sanduiche de presunto

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Encontramos os níveis das interseções para cada coleção, como na aula passada.

Percorremos o nível mediano das duas simultaneamente, em busca de um vértice comum.

Consumo de tempo: $O(n^2)$

Daria para fazer também com linha de varredura, em $O(n^2 \log n)$.

Corresponde ao algoritmo do teste $O(n^2 \log n)$ no primal!

Curiosidades

Problema: Dados dois conjuntos A e B de pontos no plano, determinar uma reta que bissecta simultaneamente A e B .

Problema dual: Dados dois conjuntos A e B de retas no plano, determinar uma interseção dos níveis medianos dos dois conjuntos.

Existe algoritmo **linear** para esses problemas!

Esse foi o tema do TCC da Giovanna Kobus.

Uma versão do TCC dela com algumas correções se encontra aqui:

https://www.ime.usp.br/~cris/aulas/22_1_331/slides/TCC-Kobus.pdf

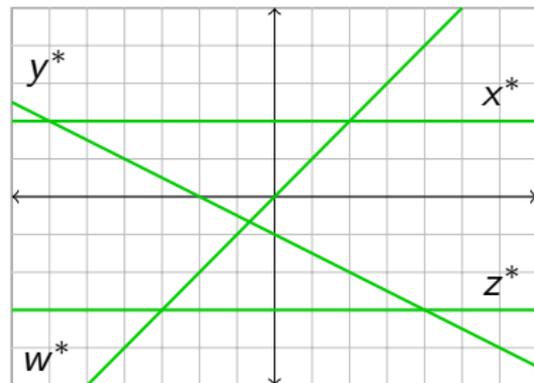
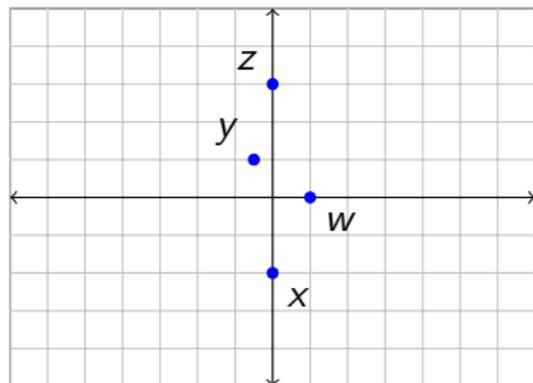
Exercício

Problema: Dada uma coleção de pontos, encontrar o fecho convexo da coleção.

Exercício

Problema: Dada uma coleção de pontos, encontrar o fecho convexo da coleção.

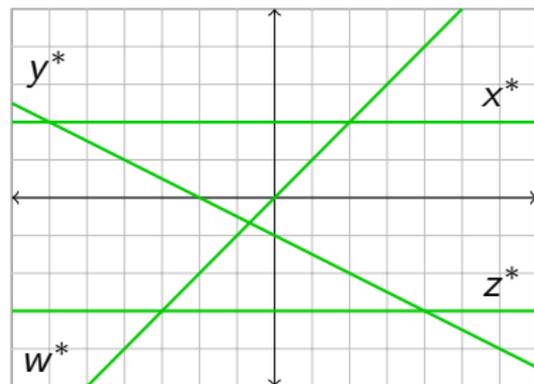
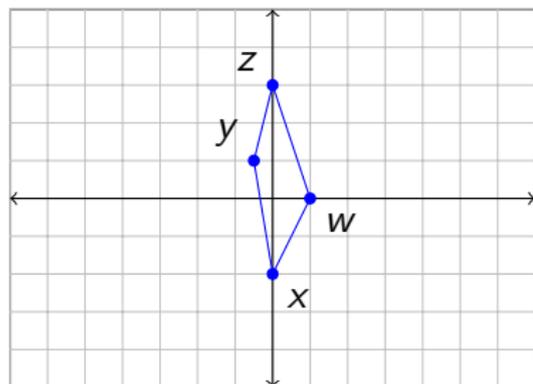
O que é este problema no plano dual?



Exercício

Problema: Dada uma coleção de pontos, encontrar o fecho convexo da coleção.

O que é este problema no plano dual?



Exercício

Problema: Dada uma coleção de pontos, encontrar o fecho convexo da coleção.

Envelope superior e inferior!

