Geometria Computacional

Aula 23

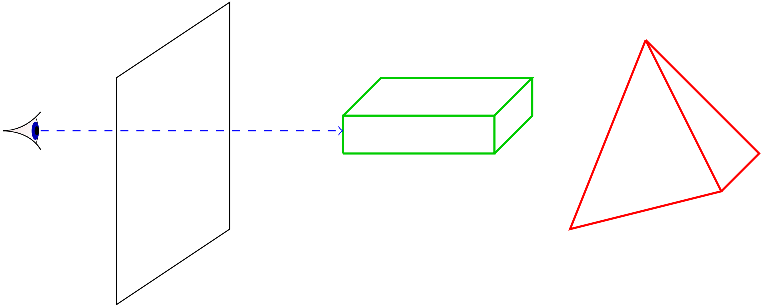
Arranjos e dualidade

Cap 8 do livro de de Berg et al.

Renderização

Processo de produzir uma imagem de um modelo 2D ou 3D.

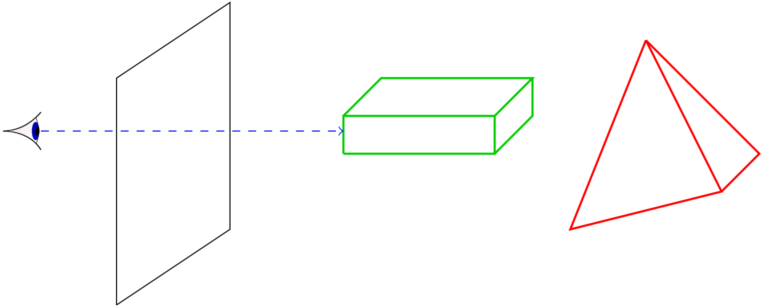
Esse processo geralmente usa ray tracing:



Renderização

Processo de produzir uma imagem de um modelo 2D ou 3D.

Esse processo geralmente usa ray tracing:



A intensidade de cada pixel da imagem é determinada pelas intensidades dos objetos que os raios que atravessam aquele pixel encontram.

Discrepância

Para evitar irregularidades perceptíveis
nas bordas da imagem (*jaggies*),

vários raios são usados por pixel, escolhidos aleatoriamente.

Discrepância

Para evitar irregularidades perceptíveis
nas bordas da imagem (*jaggies*),

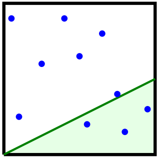
vários raios são usados por pixel, escolhidos aleatoriamente.

Uma medida da qualidade de uma particular escolha de raios
é a chamada discrepância.

Algoritmos descartam escolhas de raios com alta discrepância.

Discrepância

Para o cálculo da discrepância,
consideramos que a borda intersecta o pixel uma vez, em linha reta.



Região: interseção com semi-plano fechado.

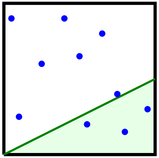
Área da região: 0,25

Área estimada pelos pontos: 0,3

Discrepância desta região: $|0{,}25 - 0{,}3| = 0{,}05$.

Discrepância

Para o cálculo da discrepância,
consideramos que a borda intersecta o pixel uma vez, em linha reta.



Região: interseção com semi-plano fechado.

Área da região: 0,25

Área estimada pelos pontos: 0,3

Discrepância desta região: $|0{,}25 - 0{,}3| = 0{,}05$.

A discrepância mede a pior região para os pontos escolhidos:
aquela que a proporção dos pontos difere
o máximo possível da área da região.

Cálculo da discrepância

S: coleção com n pontos.

Borda: reta que determina a região.

A borda que determina a discrepância sempre passa por um dos pontos de S.

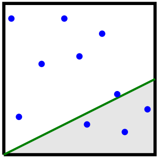
Cálculo da discrepância

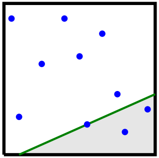
S: coleção com n pontos.

Borda: reta que determina a região.

A borda que determina a discrepância
sempre passa por um dos pontos de S.

Senão mova a borda até bater em um ponto de S:
isso só pior a razão.





Área cinza (definida pela borda): 0,25 $\rightarrow$ $< 0{,}25$

Área estimada pelos pontos: 0,3

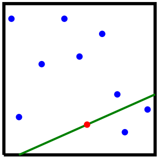
Cálculo da discrepância

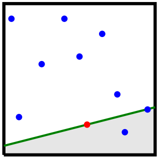
S: coleção com n pontos.

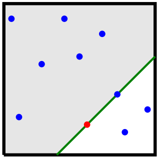
Borda: reta que determina a região.

A borda que determina a discrepância
sempre passa por um dos pontos de S.

Em geral passa por dois pontos:
gire até encostar em um outro, para o lado que piora a razão.







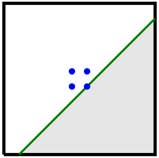
Cálculo da discrepância

S: coleção com n pontos.

Borda: reta que determina a região.

A borda que determina a discrepância
sempre passa por um dos pontos de S.

Em geral passa por dois pontos:
gire até encostar em um outro, para o lado que piora a razão.

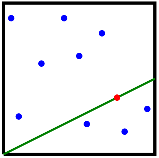


Em alguns casos, a pior borda contém só um ponto de S.

Cálculo da discrepância: caso 1

S: coleção com n pontos.

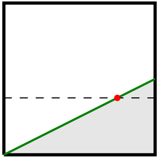
Para cada ponto p de S,
podemos calcular a pior borda que passa por p em tempo $\mathrm{O}(n)$.



Cálculo da discrepância: caso 1

S: coleção com n pontos.

Para cada ponto p de S,
podemos calcular a pior borda que passa por p em tempo $\mathrm{O}(n)$.



Para cada ponto, é possível determinar a fórmula para
a área da região em função do ângulo de inclinação da borda.

Depende das arestas do quadrado em que a reta bate.

Com isso, pode-se calcular o pior caso deste tipo
em tempo $\mathrm{O}(n^2)$ no total.

Cálculo da discrepância

S: coleção com n pontos.

Para cada par de pontos de S,
podemos calcular a pior borda que passa por eles em tempo $\mathrm{O}(n)$,
o que resultaria em $\mathrm{O}(n^3)$.

Cálculo da discrepância

S: coleção com n pontos.

Para cada par de pontos de S,
podemos calcular a pior borda que passa por eles em tempo $\mathrm{O}(n)$,
o que resultaria em $\mathrm{O}(n^3)$.

Queremos algo melhor.
Queremos determinar a discrepância em $\mathrm{O}(n^2)$.

Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

Dualidade

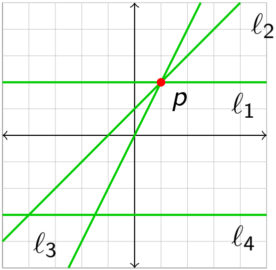
Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

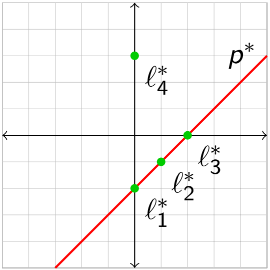
O dual da reta ℓ definida por $y = ax - b$ é o ponto $\ell^* = (a, b)$.

Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

O dual da reta ℓ definida por $y = ax - b$ é o ponto $\ell^* = (a, b)$.

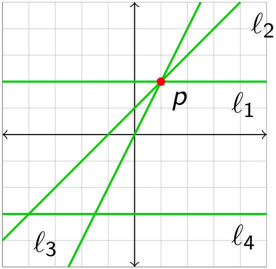


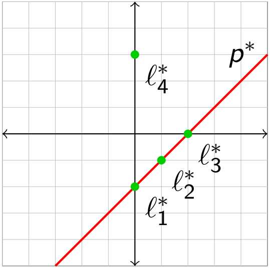


Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

O dual da reta ℓ definida por $y = ax - b$ é o ponto $\ell^* = (a, b)$.





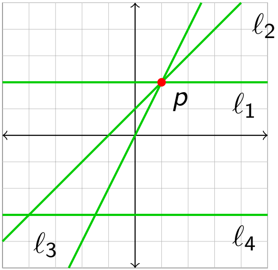
Fatos:

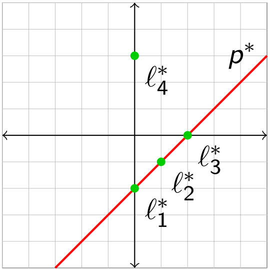
a) Ponto p está na reta ℓ sse ponto ℓ^* está na reta p^*.

Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

O dual da reta ℓ definida por $y = ax - b$ é o ponto $\ell^* = (a, b)$.





Fatos:

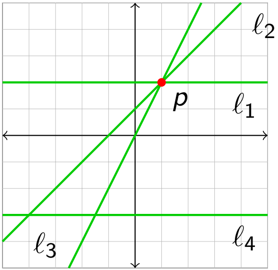
a) Ponto p está na reta ℓ sse ponto ℓ^* está na reta p^*.

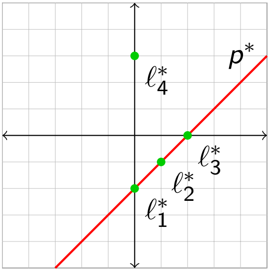
b) Ponto p está acima da reta ℓ sse ponto ℓ^* está acima da reta p^*.

Dualidade

Para um ponto $p = (a, b)$, considere a reta definida por $y = ax - b$. Essa reta é o dual de p, e é denotada por p^*.

O dual da reta ℓ definida por $y = ax - b$ é o ponto $\ell^* = (a, b)$.

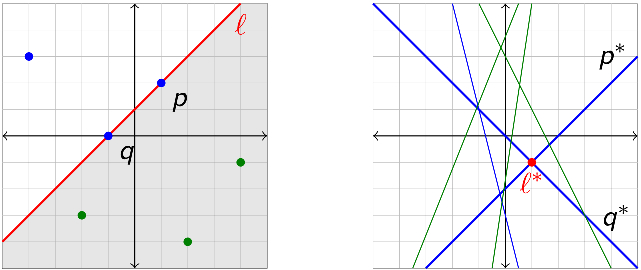




Vejamos `https://linux.ime.usp.br/~kobus/duality/` para pegar mais intuição.

Discrepância de um conjunto: problema dual

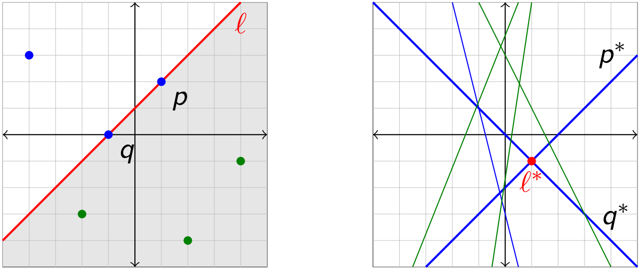
Como usar dualidade para calcular mais rapidamente a discrepância de um conjunto S de pontos?



A reta ℓ no plano primal que passa por dois pontos p e q de S corresponde à interseção ℓ^* entre as duas retas p^* e q^* de S^*.

Discrepância de um conjunto: problema dual

Como usar dualidade para calcular mais rapidamente a discrepância de um conjunto S de pontos?



A reta ℓ no plano primal que passa por dois pontos p e q de S corresponde à interseção ℓ^* entre as duas retas p^* e q^* de S^*.

Pontos de S abaixo da reta ℓ correpondem a retas de S^* acima da interseção ℓ^*.

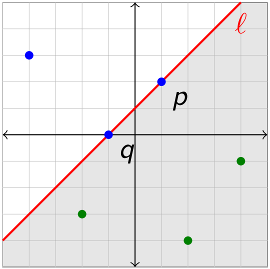
Discrepância de um conjunto: problema dual

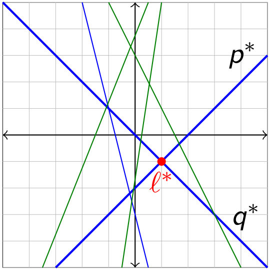
A reta ℓ no plano primal que passa por dois pontos p e q de S corresponde à interseção ℓ^* entre as duas retas p^* e q^* de S^*.

Discrepância de um conjunto: problema dual

A reta ℓ no plano primal que passa por dois pontos p e q de S corresponde à interseção ℓ^* entre as duas retas p^* e q^* de S^*.

Pontos de S abaixo de ℓ correpondem a retas de S^* acima de ℓ^*.

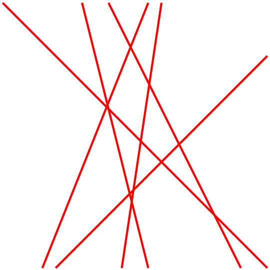




Portanto, se soubermos,
para cada interseção ℓ^* de retas no plano dual,
quantas retas de S^* ficam abaixo ou acima de ℓ^*,
podemos calcular a discrepância da reta ℓ.

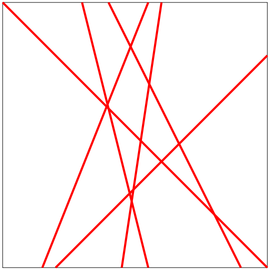
Arranjos

Dado um conjunto (finito) S de retas,
o arranjo de S é a partição do plano induzida por S.



Arranjos

Dado um conjunto (finito) S de retas,
o arranjo de S é a partição do plano induzida por S.

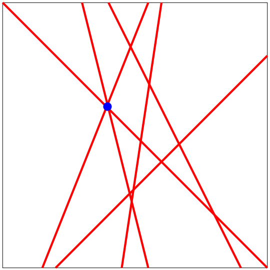


Um arranjo pode ser armazenado em uma DCEL.

Em geral, adiciona-se uma borda quadrada
para evitar arestas infinitas na DCEL.

Arranjos simples

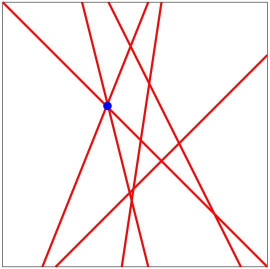
Um arranjo é simples se não têm retas paralelas e não tem três retas passando por um mesmo ponto.



O arranjo acima não é simples, pois
há três retas se intersectando num mesmo ponto.

Arranjos simples

Um arranjo é simples se não têm retas paralelas e não tem três retas passando por um mesmo ponto.

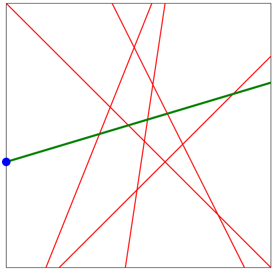


O arranjo acima não é simples, pois há três retas se intersectando num mesmo ponto.

Arranjos simples de n retas têm tamanho $\Theta(n^2)$ e podem ser construídos incrementalmente em tempo $\Theta(n^2)$.

Construção incremental

Suponha que temos a DCEL das $i-1$ primeiras retas do arranjo.

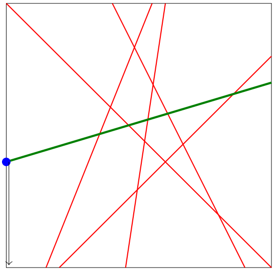


A reta i atravessa faces que devem ser divididas:

começa-se da aresta da borda pela qual a reta entra no quadrado; percorrendo esta face, chega-se a segunda aresta atravessada por i; neste ponto dividimos esta primeira face da DCEL.

Construção incremental

Suponha que temos a DCEL das $i - 1$ primeiras retas do arranjo.

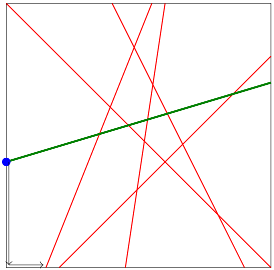


A reta i atravessa faces que devem ser divididas:

começa-se da aresta da borda pela qual a reta entra no quadrado;
percorrendo esta face, chega-se a segunda aresta atravessada por i;
neste ponto dividimos esta primeira face da DCEL.

Construção incremental

Suponha que temos a DCEL das $i-1$ primeiras retas do arranjo.

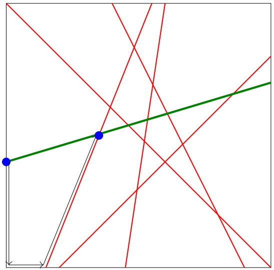


A reta i atravessa faces que devem ser divididas:

começa-se da aresta da borda pela qual a reta entra no quadrado; percorrendo esta face, chega-se a segunda aresta atravessada por i; neste ponto dividimos esta primeira face da DCEL.

Construção incremental

Suponha que temos a DCEL das $i - 1$ primeiras retas do arranjo.

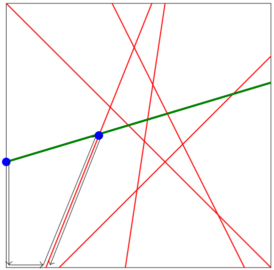


A reta i atravessa faces que devem ser divididas:

começa-se da aresta da borda pela qual a reta entra no quadrado;
percorrendo esta face, chega-se a segunda aresta atravessada por i;
neste ponto dividimos esta primeira face da DCEL.

Construção incremental

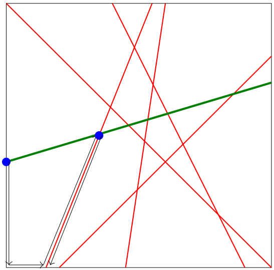
Suponha que temos a DCEL das $i-1$ primeiras retas do arranjo.



Pulamos para a gêmea desta segunda aresta e repetimos o processo.

Construção incremental

Suponha que temos a DCEL das $i-1$ primeiras retas do arranjo.



Pulamos para a gêmea desta segunda aresta e repetimos o processo.

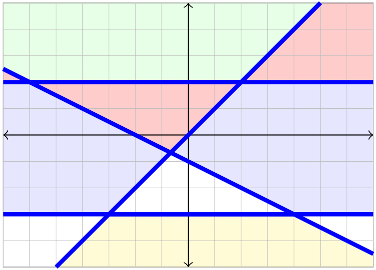
No total, o tempo consumido é $O(n)$ por reta do arranjo.

Níveis

Dado um arranjo simples de retas não-verticais,
o nível de um ponto do plano é
o número de retas do arranjo estritamente acima do ponto.

Níveis

Dado um arranjo simples de retas não-verticais,
o nível de um ponto do plano é
o número de retas do arranjo estritamente acima do ponto.



verde indica os pontos com nível 0,
vermelho indica os pontos com nível 1,
azul indica os pontos com nível 2,
branco indica os com nível 3, e laranja os com nível 4.

Níveis e discrepância

Queremos um algoritmo eficiente para, dada a DCEL do arranjo, calcular o nível de todos os vértices do arranjo.

Níveis e discrepância

Queremos um algoritmo eficiente para, dada a DCEL do arranjo, calcular o nível de todos os vértices do arranjo.

Podemos fazer isso fazendo o seguinte para cada reta.

Níveis e discrepância

Queremos um algoritmo eficiente para, dada a DCEL do arranjo, calcular o nível de todos os vértices do arranjo.

Podemos fazer isso fazendo o seguinte para cada reta.

Primeiro calculamos
o nível da primeira interseção na reta da esquerda para a direita.

Para cada reta, isso leva tempo $\mathrm{O}(n)$.

Níveis e discrepância

Queremos um algoritmo eficiente para, dada a DCEL do arranjo, calcular o nível de todos os vértices do arranjo.

Podemos fazer isso fazendo o seguinte para cada reta.

Primeiro calculamos
o nível da primeira interseção na reta da esquerda para a direita.

Para cada reta, isso leva tempo $\mathrm{O}(n)$.

Depois, processamos uma a uma cada interseção na reta,
da esquerda para a direita, ajustando o nível
um para cima ou um para baixo, dependendo da interseção.

Níveis e discrepância

Queremos um algoritmo eficiente para, dada a DCEL do arranjo, calcular o nível de todos os vértices do arranjo.

Podemos fazer isso fazendo o seguinte para cada reta.

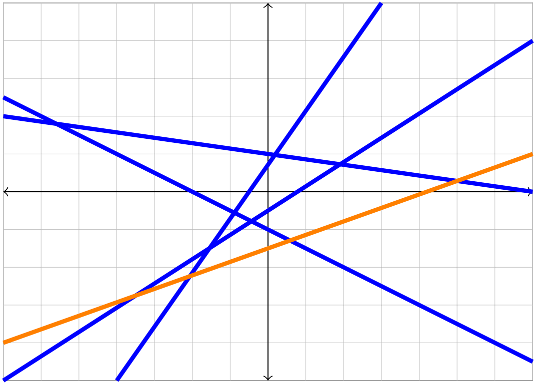
Primeiro calculamos
o nível da primeira interseção na reta da esquerda para a direita.

Para cada reta, isso leva tempo $\mathrm{O}(n)$.

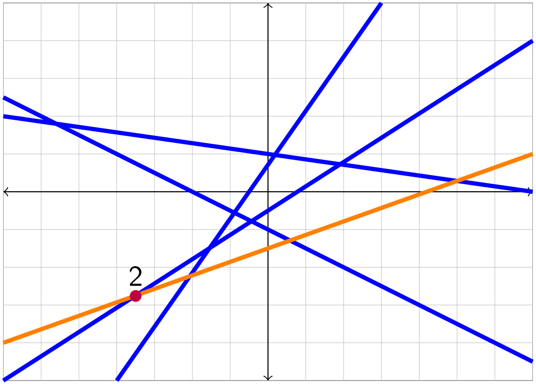
Depois, processamos uma a uma cada interseção na reta,
da esquerda para a direita, ajustando o nível
um para cima ou um para baixo, dependendo da interseção.

Por reta, isso leva $\mathrm{O}(n)$, totalizando $\mathrm{O}(n^2)$.
Conjuntamente podemos calcular a discrepância de cada interseção.

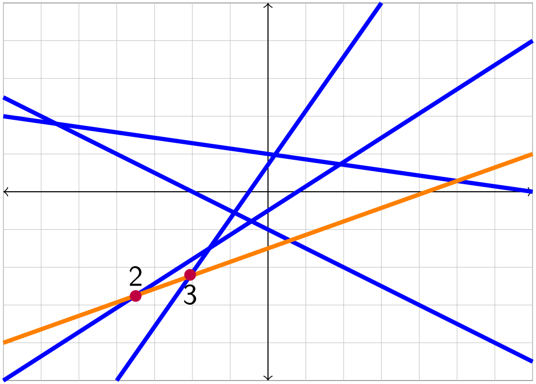
Simulação



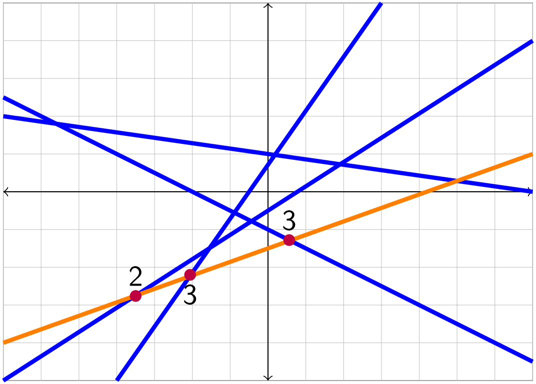
Simulação



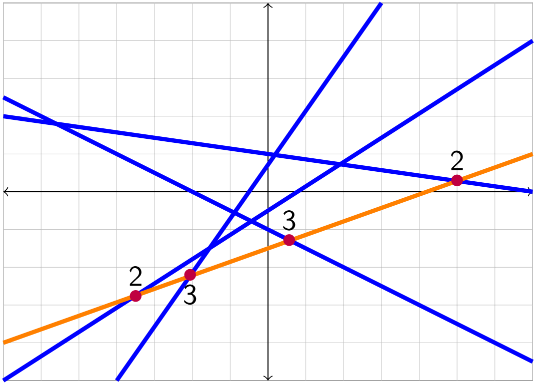
Simulação



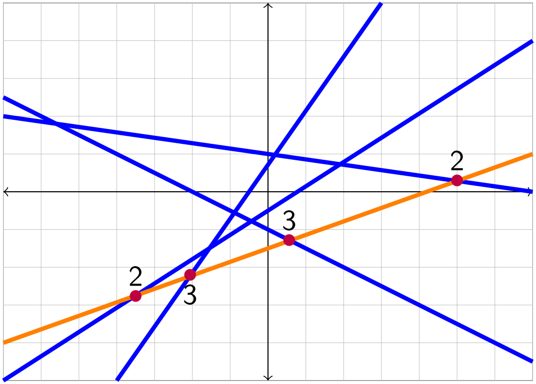
Simulação



Simulação



Simulação



Exercício: Pense no que ocorre quando o arranjo não é simples.

Próxima aula

Versão discreta do Teorema do Sanduíche de Presunto!