Aula 20

Fecho convexo 3D

Sec 4.1 do livro do O'Rourke e
Sec 3.4 do livro de Preparata e Shamos

Poliedros

Descrição vaga:
região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Poliedros

Descrição vaga:
região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Definição da página 19 do livro de Preparata & Shamos:

Um poliedro em $\mathbb{R}^3$ é a região do espaço limitada por um conjunto finito de polígonos (planos) tal que cada aresta de um destes polígonos é compartilhada por exatamente um outro polígono (polígono adjacente) e nenhum subconjunto dos polígonos tem essa mesma propriedade.

Poliedros

Descrição vaga:
região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Definição da página 19 do livro de Preparata & Shamos:

Um poliedro em $\mathbb{R}^3$ é a região do espaço limitada por um conjunto finito de polígonos (planos) tal que cada aresta de um destes polígonos é compartilhada por exatamente um outro polígono (polígono adjacente) e nenhum subconjunto dos polígonos tem essa mesma propriedade.

Os vértices e arestas dos polígonos são os vértices e arestas do poliedro; os polígonos são as faces do poliedro.

Fronteira de um poliedro

- pontos (vértices), de dimensão zero;
- segmentos (arestas), de dimensão um;
- polígonos (faces), de dimensão dois.

Às vezes é conveniente exigirmos que os polígonos sejam convexos (neste caso duas faces adjacentes podem ser coplanares).

Fronteira de um poliedro

- pontos (vértices), de dimensão zero;
- segmentos (arestas), de dimensão um;
- polígonos (faces), de dimensão dois.

Às vezes é conveniente exigirmos que os polígonos sejam convexos (neste caso duas faces adjacentes podem ser coplanares).

Em um poliedro, temos que:

- Componentes se intersectam ‘propriamente’;
- A topologia local é ‘própria’;
- A topologia global é ‘própria’.

Interseção própria das componentes

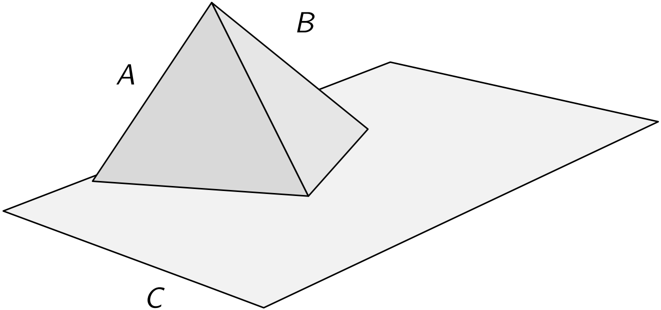
Para cada par de faces, exigimos que:

- elas sejam disjuntas, ou
- elas tenham um único vértice em comum, ou
- elas tenham dois vértices e a aresta os ligando em comum.

Interseção própria das componentes

Para cada par de faces, exigimos que:

- elas sejam disjuntas, ou
- elas tenham um único vértice em comum, ou
- elas tenham dois vértices e a aresta os ligando em comum.



As faces A e B não intersectam C propriamente.

Topologia local própria

A topologia local é como a superfície (fronteira) do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Topologia local própria

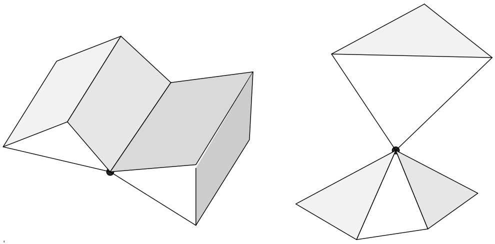
A topologia local é como a superfície (fronteira)
do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Na vizinhança de cada ponto, a superfície de um poliedro
deve ser indistinguível de um disco a menos de dobrar e esticar
a superfície como se esta fosse feita de um material moldável
(não podemos cortar a superfície).

Topologia local própria

A topologia local é como a superfície (fronteira)
do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Na vizinhança de cada ponto, a superfície de um poliedro
deve ser indistinguível de um disco a menos de dobrar e esticar
a superfície como se esta fosse feita de um material moldável
(não podemos cortar a superfície).



A superfície não é um disco na vizinhança dos pontos marcados.

Topologia global própria

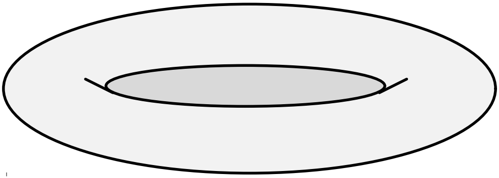
A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Topologia global própria

A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Estamos admitindo aqui que um poliedro tenha buracos (como um pneu ou donut).

O número de buracos é chamado de genus da superfície.



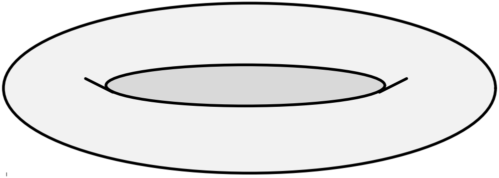
Uma superfície de genus 1: um torus.

Topologia global própria

A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Estamos admitindo aqui que um poliedro tenha buracos (como um pneu ou donut).

O número de buracos é chamado de genus da superfície.



Uma superfície de genus 1: um torus.

Poliedros de genus zero são topologicamente equivalentes a uma esfera e muitas vezes são chamados de poliedros simples.

Resumo

Fronteira de um poliedro: coleção finita de polígonos planos convexos limitados (as faces do poliedro) tal que:

- As faces se intersectam propriamente;
- A vizinhança de cada ponto é topologicamente um disco aberto;
- A superfície é conexa, ou equivalentemente o 1-esqueleto é conexo.

1-esqueleto: grafo formado pelos vértices e arestas dos polígonos.

Resumo

Fronteira de um poliedro: coleção finita de polígonos planos convexos limitados (as faces do poliedro) tal que:

- As faces se intersectam propriamente;
- A vizinhança de cada ponto é topologicamente um disco aberto;
- A superfície é conexa, ou equivalentemente o 1-esqueleto é conexo.

1-esqueleto: grafo formado pelos vértices e arestas dos polígonos.

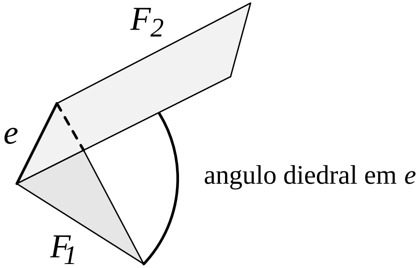
A fronteira é fechada e contém no seu interior uma porção limitada do espaço.

Cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces; essas faces são ditas adjacentes.

Poliedro convexo

P poliedro, $\quad e$ aresta de P

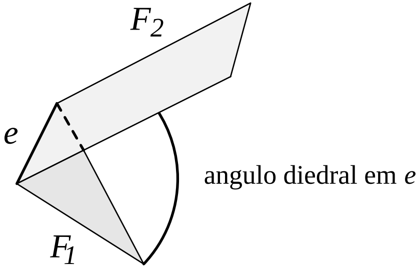
O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e.



Poliedro convexo

P poliedro, $\quad e$ aresta de P

O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e.

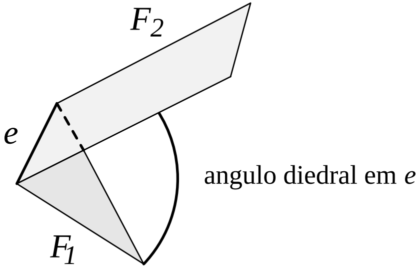


Um poliedro é convexo se
todos os seus ângulos diedrais são convexos, ou seja, no máximo π.

Poliedro convexo

P poliedro, $\quad e$ aresta de P

O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e.



Um poliedro é convexo se
todos os seus ângulos diedrais são convexos, ou seja, no máximo π.

Poliedros convexos são chamados de politopos.

Politopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Politopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Surpreendentemente, existem somente cinco politopos regulares: os chamados sólidos Platônicos.

Politopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Surpreendentemente, existem somente cinco politopos regulares: os chamados sólidos Platônicos.

Ideia da prova: ângulos internos de um polígono regular aumentam com o número de vértices, mas não existe muito espaço (no máximo 2π) para colocarmos esses ângulos ao redor de um vértice do politopo.

Análise dos ângulos

P: poliedro regular com p vértices em cada face.

Cada face é um polígono regular.

Análise dos ângulos

P: poliedro regular com p vértices em cada face.

Cada face é um polígono regular.

Soma dos ângulos internos de uma face: $(p-2)\pi$.

Logo o ângulo interno em cada vértice da face é $(1-\frac{2}{p})\pi$.

Análise dos ângulos

P: poliedro regular com p vértices em cada face.

Cada face é um polígono regular.

Soma dos ângulos internos de uma face: $(p-2)\pi$.

Logo o ângulo interno em cada vértice da face é $(1-\frac{2}{p})\pi$.

r: número de arestas incidentes a cada vértice de P.

Soma dos ângulos faciais em cada vértice é no máximo 2π. Logo,

$$\begin{aligned} r(1-\frac{2}{p})\pi < 2\pi \quad &\Rightarrow \quad r - \frac{2r}{p} < 2 \\ &\Rightarrow \quad pr - 2r < 2p \\ &\Rightarrow \quad pr - 2r - 2p + 4 < 4 \\ &\Rightarrow \quad (p-2)(r-2) < 4. \end{aligned}$$

Análise dos ângulos

P: poliedro regular com p vértices em cada face.
r: número de arestas incidentes a cada vértice de P.

$$(p-2)(r-2) < 4$$

Note que $p \geq 3$ e $r \geq 3$. Então...

Análise dos ângulos

P: poliedro regular com p vértices em cada face.
r: número de arestas incidentes a cada vértice de P.

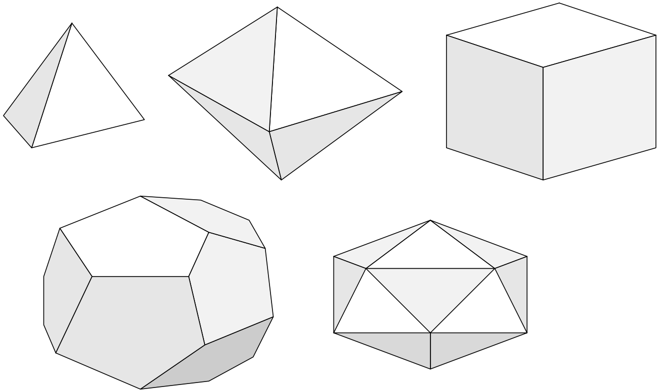
$$(p-2)(r-2) < 4$$

Note que $p \geq 3$ e $r \geq 3$. Então...

p	r	$(p-2)(r-2)$	Nome	Descrição
3	3	1	tetraedro	3 triângulos incidentes a cada vértice
4	3	2	cubo	3 quadrados incidentes a cada vértice
3	4	2	octaedro	4 triângulos incidentes a cada vértice
5	3	3	dodecaedro	3 pentágonos incidentes a cada vértice
3	5	3	icosaedro	5 triângulos incidentes a cada vértice

Politopos regulares

Os cinco sólidos Platônicos:
tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Fórmula de Euler

V: número de vértices
E: número de arestas
F: número de faces

Nome	(p, r)	V	E	F
Tetraedro	$(3, 3)$	4	6	4
Cubo	$(4, 3)$	8	12	6
Octaedro	$(3, 4)$	6	12	8
Dodecaedro	$(3, 5)$	20	30	12
Icosaedro	$(5, 3)$	12	30	20

Fórmula de Euler

V: número de vértices
E: número de arestas
F: número de faces

Nome	(p, r)	V	E	F
Tetraedro	$(3, 3)$	4	6	4
Cubo	$(4, 3)$	8	12	6
Octaedro	$(3, 4)$	6	12	8
Dodecaedro	$(3, 5)$	20	30	12
Icosaedro	$(5, 3)$	12	30	20

$$V - E + F = 2.$$

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

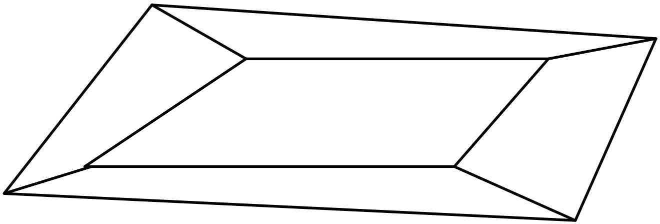
- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G.



Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G.

Indução:

Se G é uma árvore, então $V = E + 1$.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G.

Indução:

Se G é uma árvore, então $V = E + 1$.

Senão G tem um circuito C.
Seja e uma aresta de C, e seja $G' = G - e$.

G' é conexo e tem V vértices, $E - 1$ arestas e $F - 1$ faces.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- Um teorema para árvores.
- Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G.

Indução:

Se G é uma árvore, então $V = E + 1$.

Senão G tem um circuito C.
Seja e uma aresta de C, e seja $G' = G - e$.

G' é conexo e tem V vértices, $E - 1$ arestas e $F - 1$ faces.

Por indução, $V - (E - 1) + (F - 1) \ = \ 2 \ = \ V - E + F$. $\square$

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = \mathrm{O}(n)$ e $F = \mathrm{O}(n)$.

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = \mathrm{O}(n)$ e $F = \mathrm{O}(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.
Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = \mathrm{O}(n)$ e $F = \mathrm{O}(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.
Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Aplicando a Fórmula de Euler,

$$
\begin{aligned}
V - E + F = 2 \quad &\Rightarrow \quad V - E + 2E/3 \;=\; 2 \\
&\Rightarrow \quad V - 2 \;=\; E/3 \\
&\Rightarrow \quad E \;=\; 3V - 6 \;=\; \mathrm{O}(n)
\end{aligned}
$$

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = \mathrm{O}(n)$ e $F = \mathrm{O}(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.
Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Aplicando a Fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} V - E + F = 2 \quad \Rightarrow \quad V - E + 2E/3 &= 2 \\ \Rightarrow \quad V - 2 &= E/3 \\ \Rightarrow \quad E &= 3V - 6 = \mathrm{O}(n) \end{aligned}$$

e

$$F = 2E/3 \Rightarrow 2V - 4 = \mathrm{O}(n).$$

Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares em um plano π.

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O produto vetorial $a \times b$ é normal a π e definido por

Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares em um plano π.

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O produto vetorial $a \times b$ é normal a π e definido por

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$

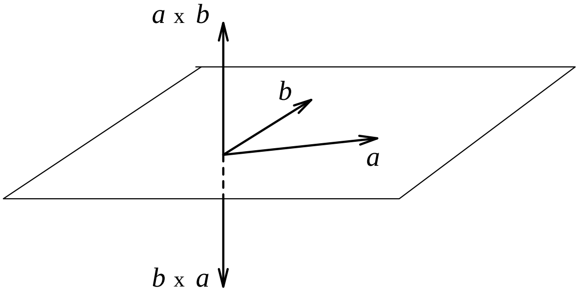
Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares em um plano π.

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O produto vetorial $a \times b$ é normal a π e definido por

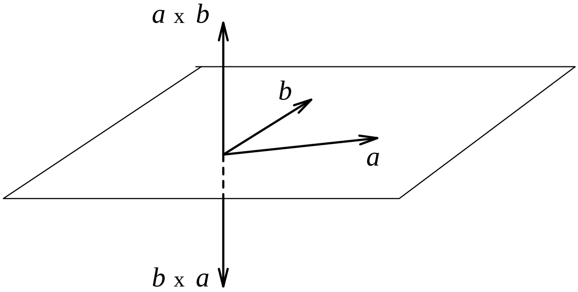
$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$



Primitiva

O produto vetorial $a \times b$ é normal a π e definido por

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$



O comprimento do produto vetorial $||a \times b||$ é a área do parelelogramo com vértices $0, a, b$ e $a + b$.

Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares.

π: o plano que contém estes pontos.

Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares.

π: o plano que contém estes pontos.

Semi-espaço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$:
lado de π apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Semi-espaço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$:
lado de π oposto ao apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Primitiva

p_0, p_1, p_2: três pontos não-colineares.

π: o plano que contém estes pontos.

Semi-espaço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$:
lado de π apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Semi-espaço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$:
lado de π oposto ao apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Sejam $a := p_1 - p_0$ e $b := p_2 - p_0$.

Ponto p_3 está no semi-espaço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$
se $c \cdot (a \times b) > 0$, onde $c := p_3 - p_0$.

Ponto p_3 está no semi-espaço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$
se $c \cdot (a \times b) < 0$.

Primitiva

Dados pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em $\mathbb{R}^3$, a operação primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)
(ou Esquerda(p_0, p_1, p_2, p_3))

decide em qual semi-espaço do plano orientado π
do triângulo (orientado) $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ o ponto p_3 está.

Primitiva

Dados pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em $\mathbb{R}^3$, a operação primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)
(ou Esquerda(p_0, p_1, p_2, p_3))

decide em qual semi-espaço do plano orientado π
do triângulo (orientado) $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ o ponto p_3 está.

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então
o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

decide em qual semi-espaço do plano orientado π está p_3.

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então
o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto deste determinte é 6 vezes
o volume sinalizado do tetraedro cujos vértices são p_0, p_1, p_2, p_3.

Primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

decide em qual semi-espaço do plano orientado π está p_3.

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então
o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto deste determinte é 6 vezes
o volume sinalizado do tetraedro cujos vértices são p_0, p_1, p_2, p_3.

Chamamos de Volume6 a função que devolve
o valor deste determinante (em analogia à função Área2).

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no $\mathbb{R}^3$, encontrar o fecho convexo $\mathrm{conv}(P)$ dos pontos em P.

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no $\mathbb{R}^3$, encontrar o fecho convexo $\mathrm{conv}(P)$ dos pontos em P.

- Listas de faces
- Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- Estrutura de dados *winged-edge* (arestas aladas)

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no $\mathbb{R}^3$, encontrar o fecho convexo $\mathrm{conv}(P)$ dos pontos em P.

- Listas de faces
- Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- Estrutura de dados *winged-edge* (arestas aladas)

Listas de faces:
lista com a representação como um polígono de cada face.

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no $\mathbb{R}^3$, encontrar o fecho convexo $\mathrm{conv}(P)$ dos pontos em P.

- Listas de faces
- Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- Estrutura de dados *winged-edge* (arestas aladas)

Listas de faces:
lista com a representação como um polígono de cada face.

Desvantagens:
informação de adjacência de um só tipo
(entre vértices vizinhos em uma face).
Caro determinar por exemplo se duas faces são adjacentes.

Poliedros simpliciais

Suas faces são triangulares.

ED para poliedros simpliciais:

- registros para vértices, arestas e faces.
- lista de vértices numa ordem arbitrária.
- arestas apontam para seus vértices extremos
  e as faces que separam.
- faces apontam para seus três vértices e arestas.

Poliedros simpliciais

Suas faces são triangulares.

ED para poliedros simpliciais:

- registros para vértices, arestas e faces.
- lista de vértices numa ordem arbitrária.
- arestas apontam para seus vértices extremos
  e as faces que separam.
- faces apontam para seus três vértices e arestas.

Vantagem: mais fácil de manipular.

Arestas aladas

Proposta por Baumgart em 1975,
é a mais popular para representar a superfície de um poliedro.

Seu foco são as arestas.

Lembra a DCEL, ED que vimos para mapas planares.

Arestas aladas

Proposta por Baumgart em 1975,
é a mais popular para representar a superfície de um poliedro.

Seu foco são as arestas.

Lembra a DCEL, ED que vimos para mapas planares.

Aula que vem...