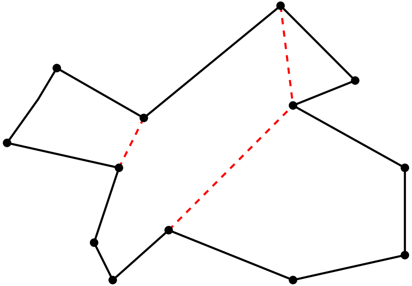
Aula 15

Partição em polígonos convexos

Sec 2.5 do O'Rourke e artigo de Keil e Snoeyink

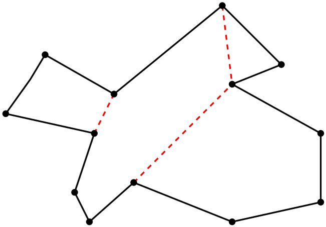
Partição em polígonos convexos

Problema: Dado um polígono P, determinar uma partição de P em um número mínimo de partes convexas.



Partição em polígonos convexos

Problema: Dado um polígono P, determinar uma partição de P em um número mínimo de partes convexas.



Dois tipos de partição:

- por diagonais de P
- por segmentos arbitrários contidos em P

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Consumo de tempo: linear, usando o algoritmo
de triangulação de Chazelle (que não vimos).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Consumo de tempo: linear, usando o algoritmo
de triangulação de Chazelle (que não vimos).

Mas a partição devolvida tem número mínimo de partes?

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais em um número mínimo de partes convexas.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais em um número mínimo de partes convexas.

Seja ϕ^* o número mínimo de partes em uma partição convexa de P, que é um a mais que o número de diagonais usadas.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais em um número mínimo de partes convexas.

Seja ϕ^* o número mínimo de partes em uma partição convexa de P, que é um a mais que o número de diagonais usadas.

Algoritmo de aproximação: produz, em tempo polinomial, uma partição convexa de P por diagonais com no máximo $\alpha\,\phi^*$ partes.

Um tal algoritmo é chamado de α-aproximação,
e α é sua razão de aproximação.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais em um número mínimo de partes convexas.

Seja ϕ^* o número mínimo de partes em uma partição convexa de P, que é um a mais que o número de diagonais usadas.

Algoritmo de aproximação: produz, em tempo polinomial, uma partição convexa de P por diagonais com no máximo $\alpha\,\phi^*$ partes.

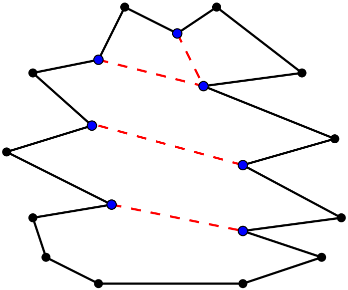
Um tal algoritmo é chamado de α-aproximação,
e α é sua razão de aproximação.

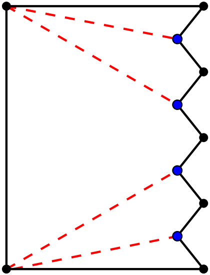
O algoritmo de Hertel e Mehlhorn produz uma partição de P por diagonais, sempre com no máximo $4\phi^*$ partes, ou seja, é uma 4-aproximação.

Partição em polígonos convexos

Teorema: Seja ϕ^* o menor número de partes convexas em que um polígono com r vértices reflexos pode ser particionado. Então

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \ \leq \ \phi^* \ \leq \ r + 1.$$

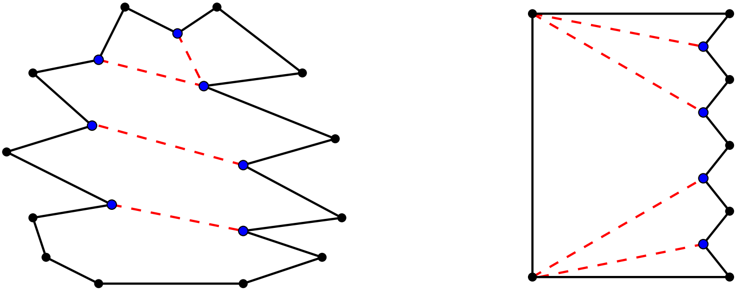




Partição em polígonos convexos

Teorema: Seja ϕ^* o menor número de partes convexas em que um polígono com r vértices reflexos pode ser particionado. Então

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \;\leq\; \phi^* \;\leq\; r + 1.$$



Esboço da prova: Há pelo menos um segmento particionador incidindo em cada vértice reverso, e cada segmento particionador acerta a situação de no máximo dois vértices reversos.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Teorema: O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Teorema: O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

Prova: O número de partes do algoritmo é

$$\leq 2r + 1 < 4(r/2 + 1) \leq 4(\lceil r/2 \rceil + 1) \leq 4\phi^*.$$

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

Os dois algoritmos são de programação dinâmica.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que
encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

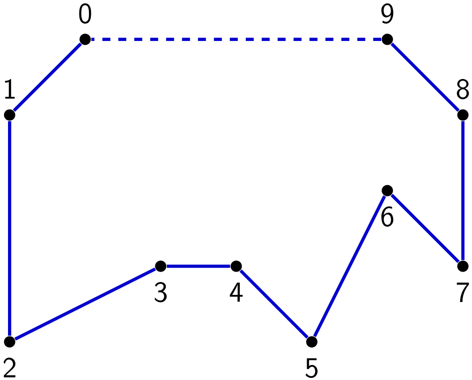
Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que
encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

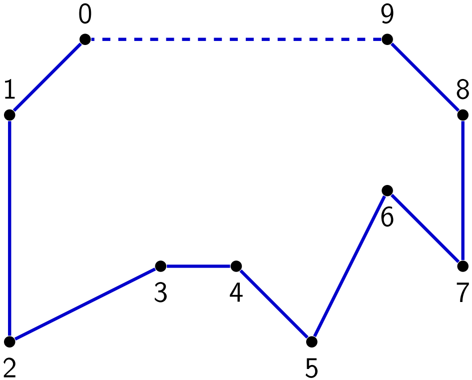
Os dois algoritmos são de programação dinâmica.

Se a partição é por segmentos, o problema fica mais complicado.
Há um algoritmo de Chazelle para este caso
que consome tempo $\mathrm{O}(n + r^3) = \mathrm{O}(n^3)$.

Ideia da PD de Greene

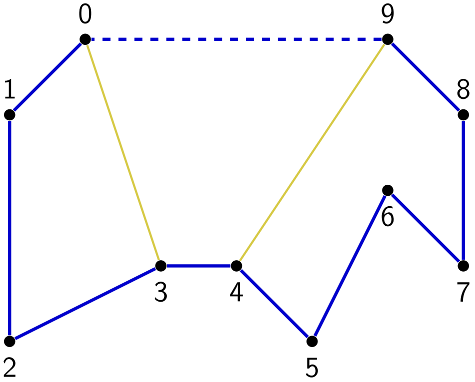


Ideia da PD de Greene



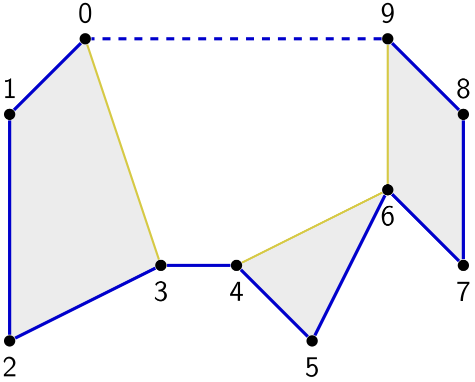
A aresta 09 estará em alguma parte convexa.
Se soubermos como é essa parte,

Ideia da PD de Greene



A aresta 09 estará em alguma parte convexa.
Se soubermos como é essa parte,
as outras teriam que ser também partições ótimas.

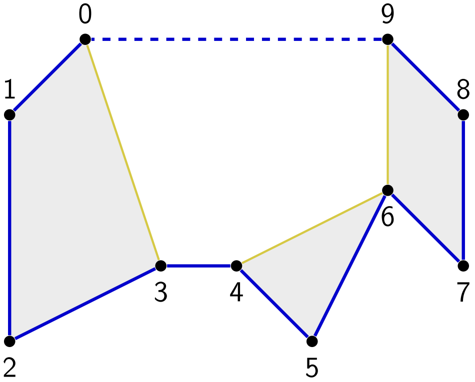
Ideia da PD de Greene



A aresta 09 estará em alguma parte convexa.
Se soubermos como é essa parte,
as outras teriam que ser também partições ótimas.

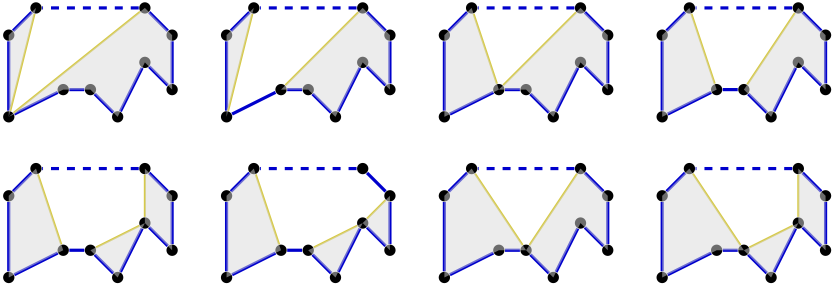
Um subproblema para cada diagonal da parte que tem a aresta 09.

Ideia da PD de Greene



De todas as possíveis partes convexas contendo a aresta 09,
escolhe uma que, com as partições ótimas dos pedaços,
usa o menor número de diagonais.

PD de Greene versus PD de Keil



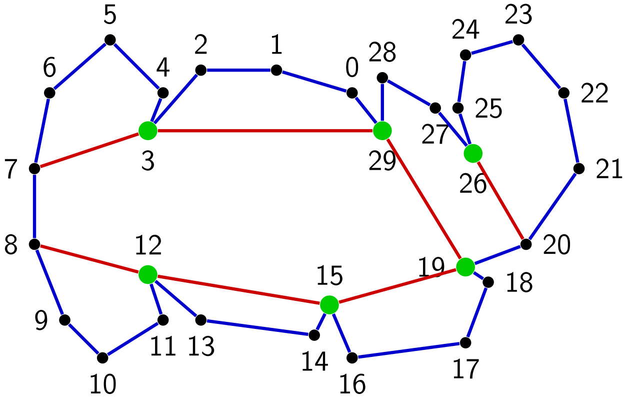
. . .

Número de possíveis partes convexas contendo uma aresta é alto.

Keil propôs um método mais enxuto

PD de Keil

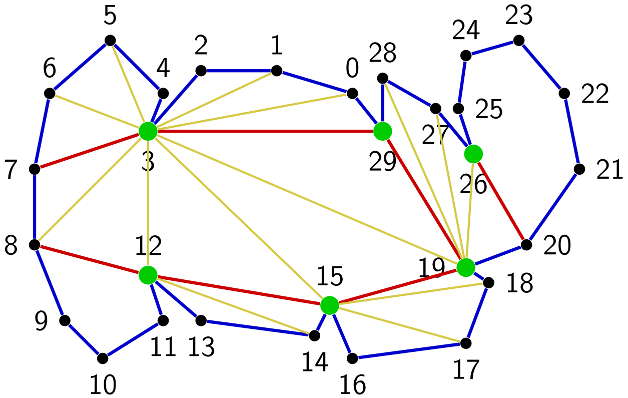
Partição ótima em partes convexas



Toda diagonal é essencial, ou seja, é incidente a um vértice reflexo.

PD de Keil

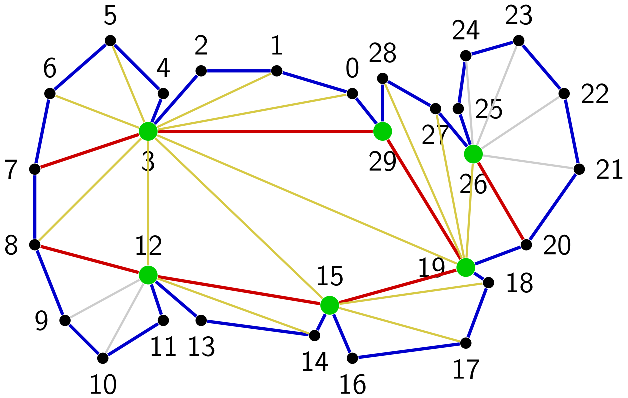
Partição ótima em partes convexas



Triangulação canônica: diagonal do menor vértice reflexo de cada parte para os maiores que ele na parte. Complete.

PD de Keil

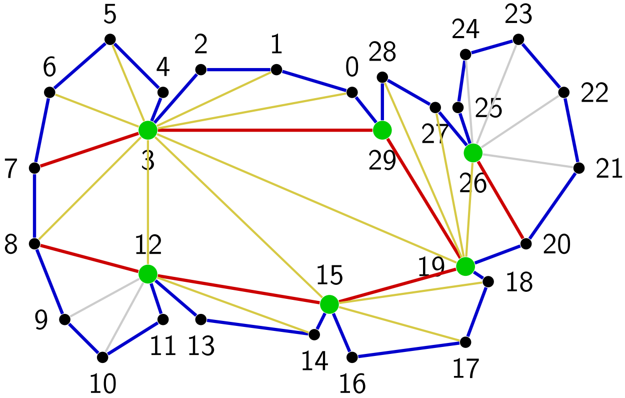
Partição ótima em partes convexas



Triangulação canônica: diagonal do menor vértice reflexo de cada parte para os maiores que ele na parte. Complete.

PD de Keil

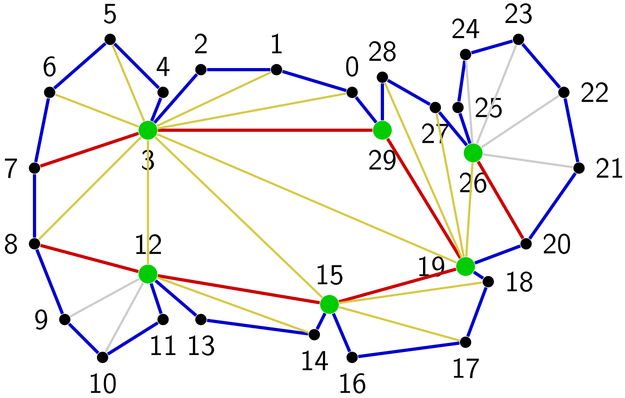
Partição ótima em partes convexas



Se precisou completar, o vértice com maior índice na parte é reflexo.

PD de Keil

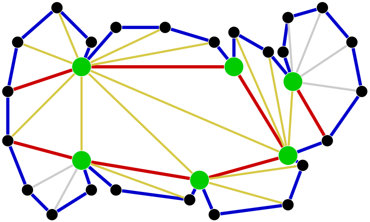
Partição ótima em partes convexas



Se precisou completar, o vértice com maior índice na parte é reflexo.

Toda diagonal tem pelo menos um extremo reflexo.

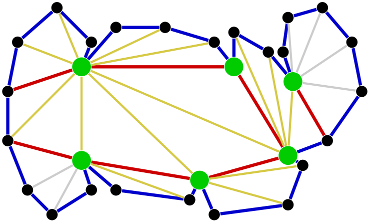
Propriedades



Para cada diagonal d_{ik} da triangulação canônica, com $i < k$:

- Diagonais com pontas em P_{ik} definem triangulação canônica de P_{ik}.

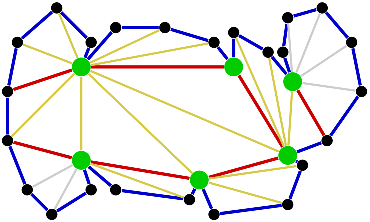
Propriedades



Para cada diagonal d_{ik} da triangulação canônica, com $i < k$:

- Diagonais com pontas em P_{ik} definem triangulação canônica de P_{ik}.
- Se p_i é reflexo em P, então o triângulo adjacente $\triangle p_i p_j p_k$ com $i < j < k$ ou é tal que $j = k - 1$ ou d_{jk} é uma diagonal da partição em covexos.

Propriedades



Para cada diagonal d_{ik} da triangulação canônica, com $i < k$:

- Diagonais com pontas em P_{ik} definem triangulação canônica de P_{ik}.
- Se p_i é reflexo em P, então o triângulo adjacente $\triangle p_i p_j p_k$ com $i < j < k$ ou é tal que $j = k - 1$ ou d_{jk} é uma diagonal da partição em covexos.
- Se p_i não é reflexo em P, então p_k deve ser. O triângulo adjacente $\triangle p_i p_j p_k$ com $i < j < k$ ou é tal que $j = i + 1$ ou d_{ij} é uma diagonal da partição em covexos.

PD de Keil

Ideia:

Seja w_{ik} o número de diagonais em uma partição ótima de P_{ik}.

PD de Keil

Ideia:

Seja w_{ik} o número de diagonais em uma partição ótima de P_{ik}.

Pares estreitos:

Possivelmente existe um número exponencial de decomposições convexas de P_{ik} com w_{ik} diagonais.

Keil propôs agrupar tais decomposições em classes de equivalência, armazenando apenas um representante de cada classe.

PD de Keil

Ideia:

Seja w_{ik} o número de diagonais em uma partição ótima de P_{ik}.

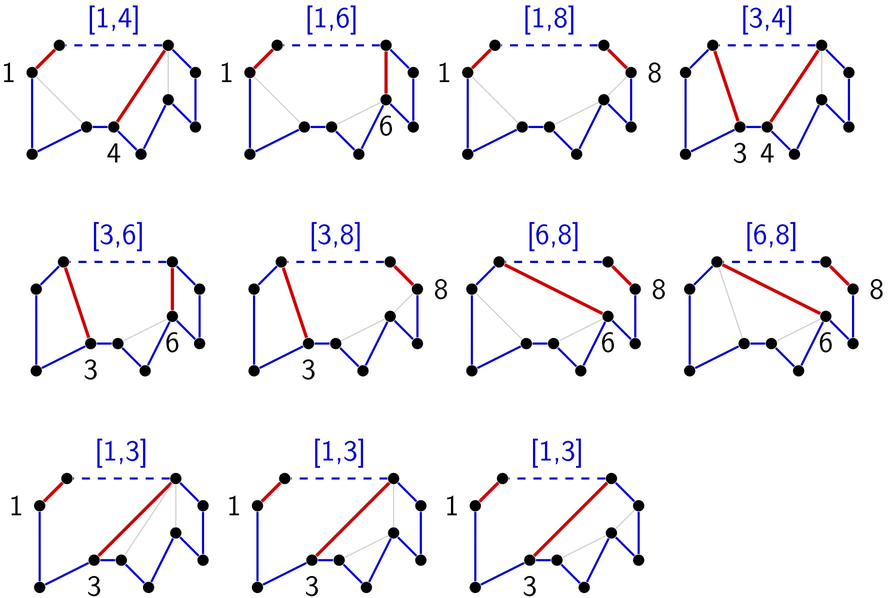
Pares estreitos:

Possivelmente existe um número exponencial de decomposições convexas de P_{ik} com w_{ik} diagonais.

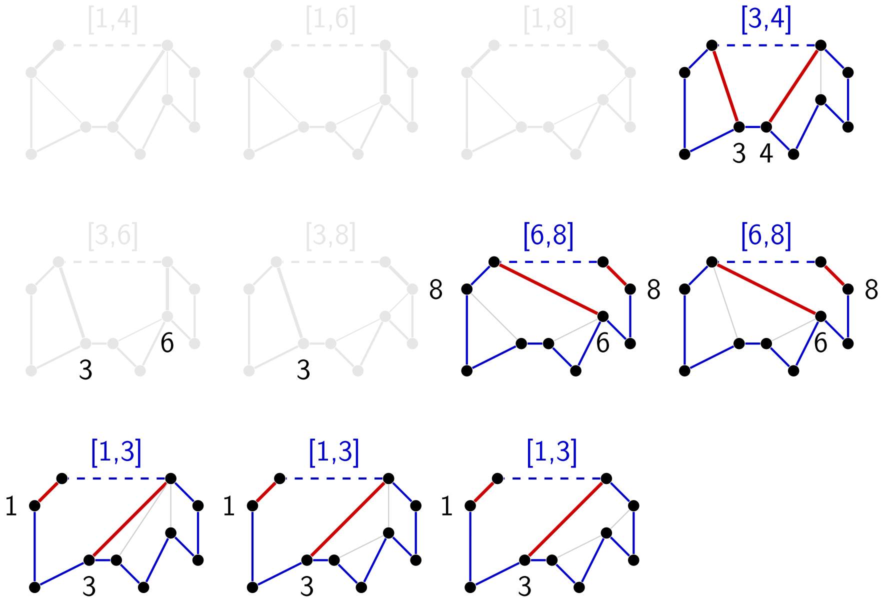
Keil propôs agrupar tais decomposições em classes de equivalência, armazenando apenas um representante de cada classe.

Associa-se um par de índices $[a, b]$ a cada decomposição de P_{ik}, onde a, i, k, b aparecem consecutivamente, em sentido horário, na fronteira da parte que tem d_{ik} na fronteira.

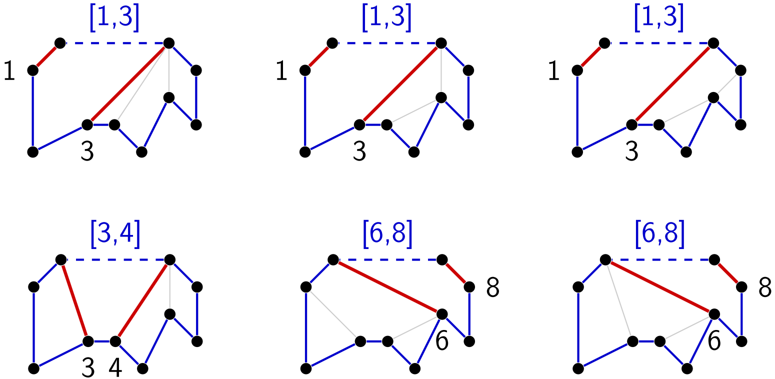
Pares estreitos



Pares estreitos

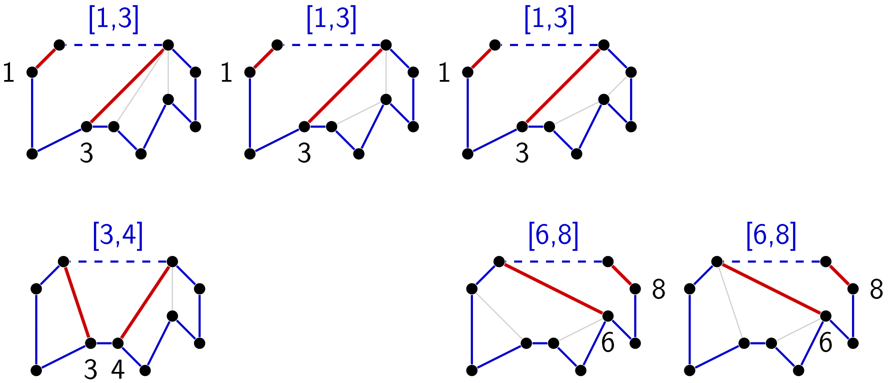


Soluções para pares estreitos são suficientes



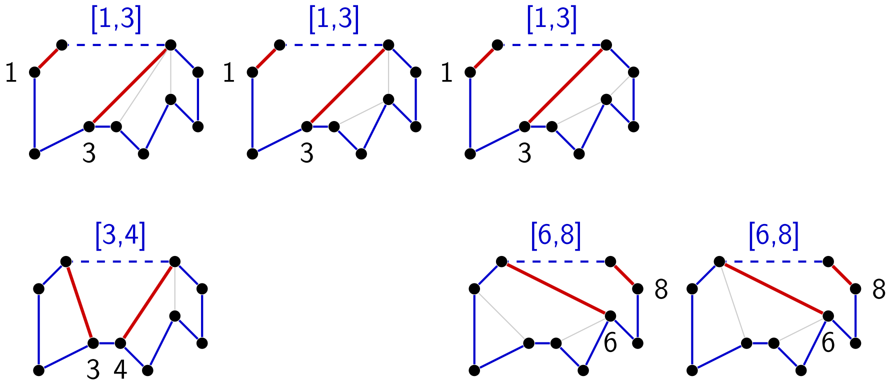
Keil mostrou que soluções para pares estreitos bastam para compor decomposições convexas mínimas.

Classes de equivalência de pares estreitos



Classes de soluções equivalentes para os pares estreitos: basta guardar uma delas para cada par.

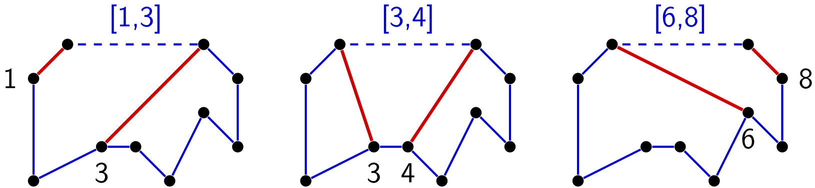
Classes de equivalência de pares estreitos



Classes de soluções equivalentes para os pares estreitos: basta guardar uma delas para cada par.

Pares $[a, b]$ ordenados por a, ficam também ordenadas por b.

Pares estreitos



Pares estreitos $[a, b]$ ordenados por a e por b.

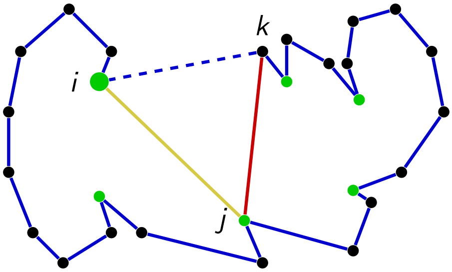
Para cada subproblema P_{ik}, guardamos em uma pilha S_{ik} as soluções dos pares estreitos, ordenadas como acima.

Recorrência da PD de Keil

Para calcular w_{ik} a partir dos w_{xy} "menores":

Caso 1: p_i é reflexo

$$w_{ik} = \min_{i<j<k} \begin{cases} w_{ij} + w_{jk} + 2 & \text{se } d_{ij} \text{ é necessária} \\ w_{ij} + w_{jk} + 1 & \text{se } d_{ij} \text{ não é necessária} \end{cases}$$



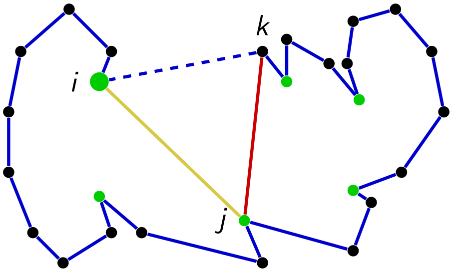
Se p_k não é reflexo, só precisamos considerar p_j's reflexos, de modo que d_{jk} possa ser essencial.

Recorrência da PD de Keil

Para calcular w_{ik} a partir dos w_{xy} "menores":

Caso 1: p_i é reflexo

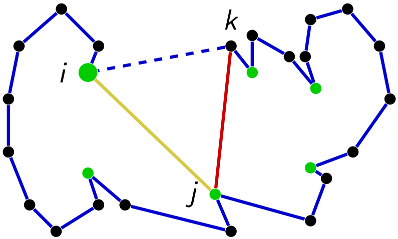
$$w_{ik} = \min_{i<j<k} \begin{cases} w_{ij} + w_{jk} + 2 & \text{se } d_{ij} \text{ é necessária} \\ w_{ij} + w_{jk} + 1 & \text{se } d_{ij} \text{ não é necessária} \end{cases}$$



Para cada j, desempilhamos de S_{ij} os pares estreitos até o último que não forma ângulo reflexo com d_{jk}.

Caso 1: p_i é reflexo

$$w_{ik} = \min_{i<j<k} \begin{cases} w_{ij} + w_{jk} + 2 & \text{se } d_{ij} \text{ é necessária} \\ w_{ij} + w_{jk} + 1 & \text{se } d_{ij} \text{ não é necessária} \end{cases}$$

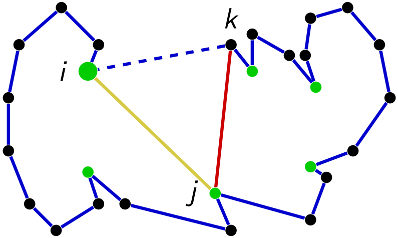


Para cada j, desempilhamos de S_{ij} os pares estreitos até o último que não forma ângulo reflexo com d_{jk}.

Se não houver nenhum par assim,
d_{ij} é necessária e $[j, j]$ é par estreito para P_{ik}.

Caso 1: p_i é reflexo

$$w_{ik} = \min_{i<j<k} \begin{cases} w_{ij} + w_{jk} + 2 & \text{se } d_{ij} \text{ é necessária} \\ w_{ij} + w_{jk} + 1 & \text{se } d_{ij} \text{ não é necessária} \end{cases}$$



Para cada j, desempilhamos de S_{ij} os pares estreitos até o último que não forma ângulo reflexo com d_{jk}.

Se houver um par $[s, t]$ assim,
d_{ij} não é necessária e $[s, j]$ é par estreito para P_{ik} (se já não houver um par $[x, j]$ na pilha com $x > s$).

Caso 2: p_i não é reflexo

Este caso é simétrico, exceto que sabemos que p_k é reflexo.

Caso 2: p_i não é reflexo

Este caso é simétrico, exceto que sabemos que p_k é reflexo.

O algoritmo aciona o Caso 1 ou o Caso 2, com $i < j < k$,
onde pelo menos dois dos três são vértices reflexos,
ou um é reflexo e os dois outros são consecutivos no polígono.

Caso 2: p_i não é reflexo

Este caso é simétrico, exceto que sabemos que p_k é reflexo.

O algoritmo aciona o Caso 1 ou o Caso 2, com $i < j < k$,
onde pelo menos dois dos três são vértices reflexos,
ou um é reflexo e os dois outros são consecutivos no polígono.

Assim são no máximo nr^2 tratamentos de casos.

Cada caso consome $\mathrm{O}(1)$,
exceto pelas operações envolvendo as pilhas de pares estreitos.

Caso 2: p_i não é reflexo

Este caso é simétrico, exceto que sabemos que p_k é reflexo.

O algoritmo aciona o Caso 1 ou o Caso 2, com $i < j < k$,
onde pelo menos dois dos três são vértices reflexos,
ou um é reflexo e os dois outros são consecutivos no polígono.

Assim são no máximo nr^2 tratamentos de casos.

Cada caso consome $\mathrm{O}(1)$,
exceto pelas operações envolvendo as pilhas de pares estreitos.

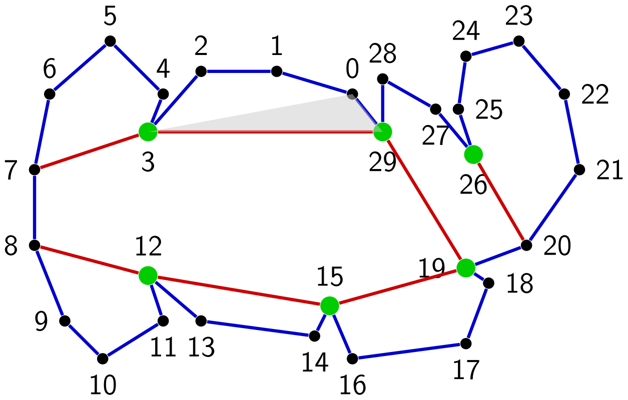
Para cada i, j, k, empilha-se no máximo dois elementos em S_{ik}
(um com d_{ij} outro sem).

São portanto no máximo $\mathrm{O}(nr^2)$ empilhas e desempilhas.

PD de Keil: exemplo

Sem perda de generalidade, 0 ou $n-1$ é reflexo.

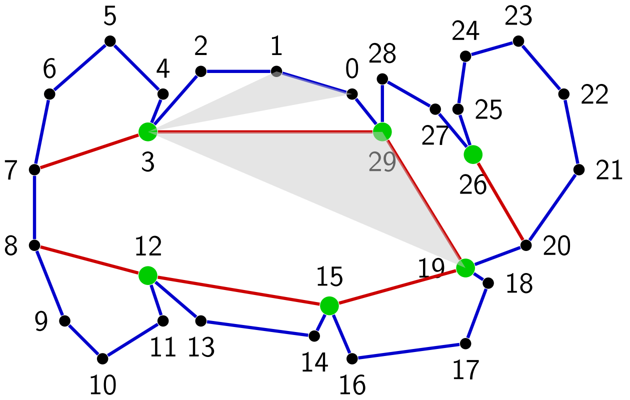
Primeira chamada é para calcular $w_{0\ 29}$.



Alguma hora, na PD, o triângulo sombreado será testado, ou seja, $i=0$, $j=3$ e $k=29$.

PD de Keil: exemplo

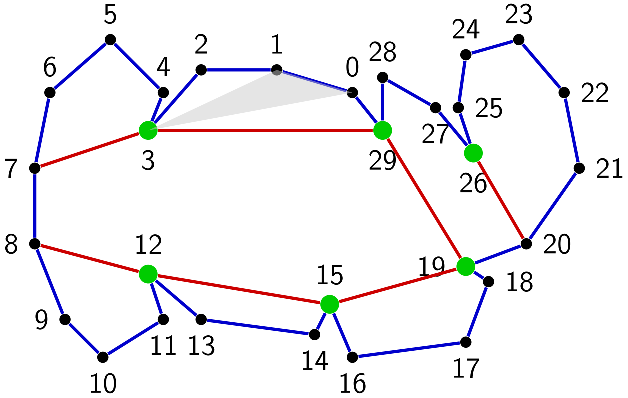
Tal chamada acionará duas outras chamadas:
uma para calcular w_{03}, outra para calcular $w_{3\ 29}$.



Em cada uma, alguma hora, o triângulo sombreado será testado, ou seja, $i = 0$, $j = 2$ e $k = 3$ de um lado, e $i = 3$, $j = 19$ e $k = 29$ do outro. E assim por diante.

PD de Keil: exemplo

Observe que, no triângulo sombreado abaixo, em que $i = 0$, $j = 1$ e $k = 3$, a aresta ij não é vermelha. Ela é azul, da borda.



Para que o $+1$ somado na recorrência por essa aresta que não é diagonal seja descontado, a base da recorrência é $w_{i,i+1} = -1$.