

Aula 13

Localização de ponto

Sec 7.4 do O'Rourke

Ponto q está no polígono?

P convexo

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

Algo mais rápido?

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

Algo mais rápido?

Várias *queries*:

pré-processamento linear e
queries usando busca binária!

Procure a fatia onde q está.

q está à esquerda ou à direita
da aresta na fatia?



Ponto q está no polígono?

E se P não for **convexo**?

Ponto q está no polígono?

E se P não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

Ponto q está no polígono?

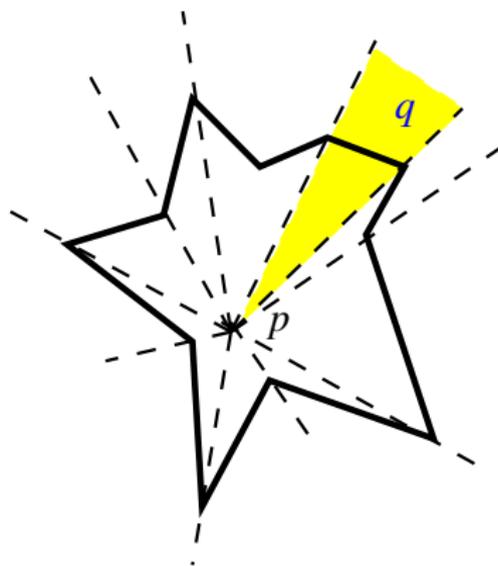
E se P não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

Polígonos estrela
(star polygon)

P tem um ponto que enxerga todos os outros pontos de P .



Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Dois algoritmos **lineares**:

- ▶ número de voltas (**winding number**)
- ▶ cruzamentos de um raio
(**ray casting/crossing number/even-odd rule**)

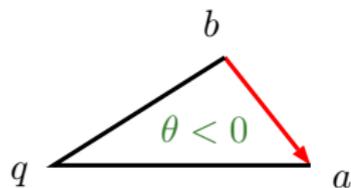
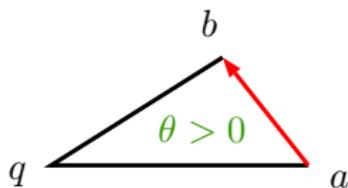
Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Dois algoritmos **lineares**:

- ▶ número de voltas (**winding number**)
- ▶ cruzamentos de um raio (**ray casting/crossing number/even-odd rule**)

Ângulo **com sinal** de \vec{ab} em relação a q :



Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a *soma dos ângulos com sinal* de cada aresta de δP em relação a q .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a *soma dos ângulos com sinal* de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a *soma dos ângulos com sinal* de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number: essa soma dividida por 2π

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a *soma dos ângulos com sinal* de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number: essa soma dividida por 2π

Se o *winding number* é zero,
então q não está em P ,
senão q está em P .

Ray casting ou even-odd rule

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Ray casting ou even-odd rule

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes R cruza δP ?

Ray casting ou even-odd rule

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

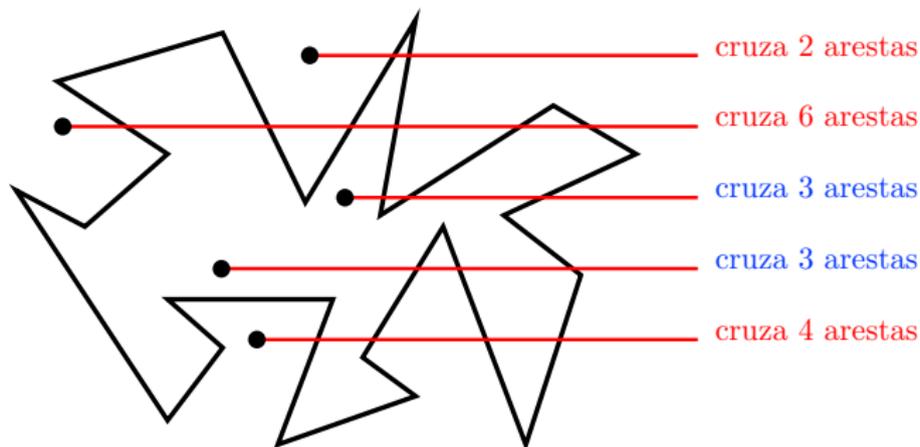
Ray casting ou even-odd rule

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



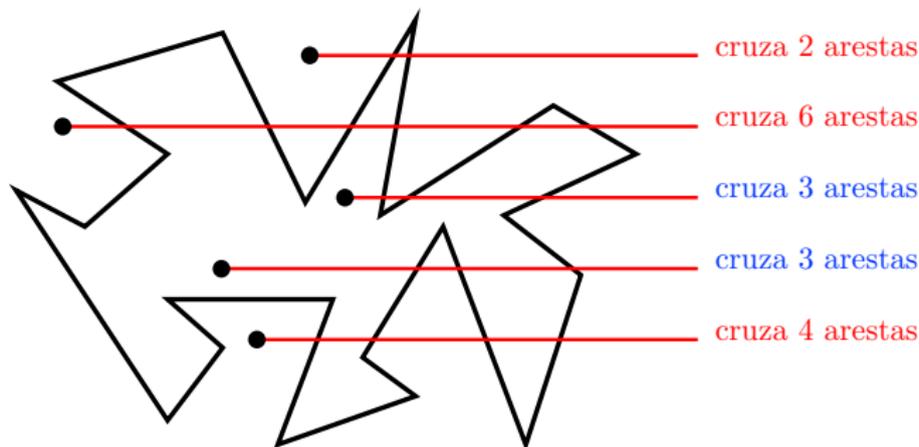
Ray casting ou even-odd rule

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Se cruza um número **par** de arestas,
então q **não está em P** , senão q **está em P** .

Casos especiais

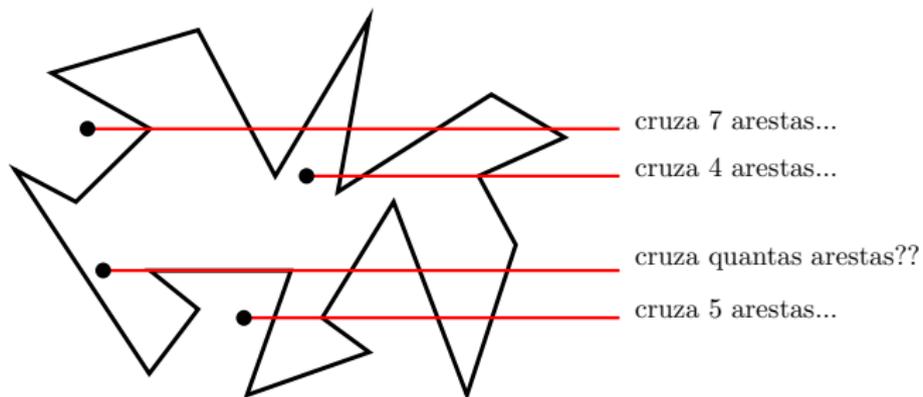
R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

Casos especiais

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

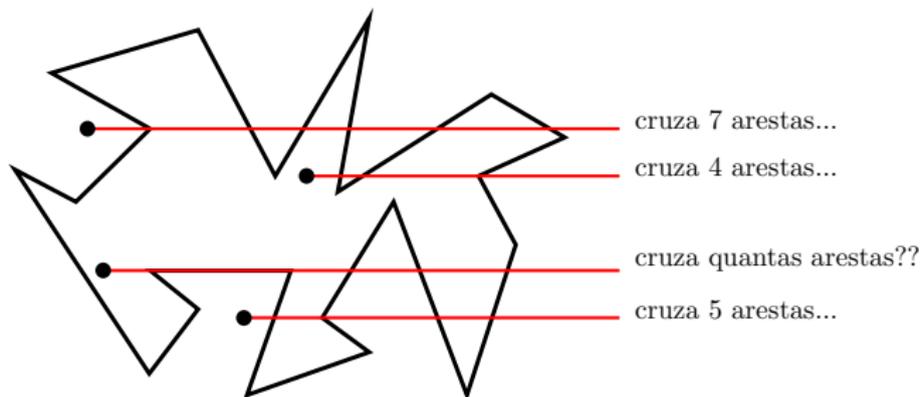


Como tratar destes casos?

Casos especiais

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Considere cada aresta

fechada no extremo inferior e aberta no superior!

Cruza: um extremo estritamente acima, outro abaixo.

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

1 $c \leftarrow 0$

2 **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**

3 $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$

▷ vértice $i - 1$

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

1 $c \leftarrow 0$

2 **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**

3 $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$

▷ vértice $i - 1$

4 **se** ($P[i][Y] > 0$ e $P[j][Y] \leq 0$)
 ou ($P[j][Y] > 0$ e $P[i][Y] \leq 0$)

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

- 1 $c \leftarrow 0$
- 2 **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**
- 3 $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$ ▷ vértice $i - 1$
- 4 **se** ($P[i][Y] > 0$ e $P[j][Y] \leq 0$)
 ou ($P[j][Y] > 0$ e $P[i][Y] \leq 0$)
- 5 **então** $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$
 $/(P[j][Y] - P[i][Y])$ ▷ interseção c / eixo x

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3       $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4      se  $(P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0)$ 
          ou  $(P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0)$ 
5          então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
                   $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ interseção  $c/$  eixo  $x$ 
6              se  $x > 0$ 
7                  então  $c \leftarrow c + 1$ 
```

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se  $(P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0)$ 
      ou  $(P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0)$ 
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
           $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ interseção  $c/$  eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7            então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9    então devolva dentro
10   senão devolva fora
```

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

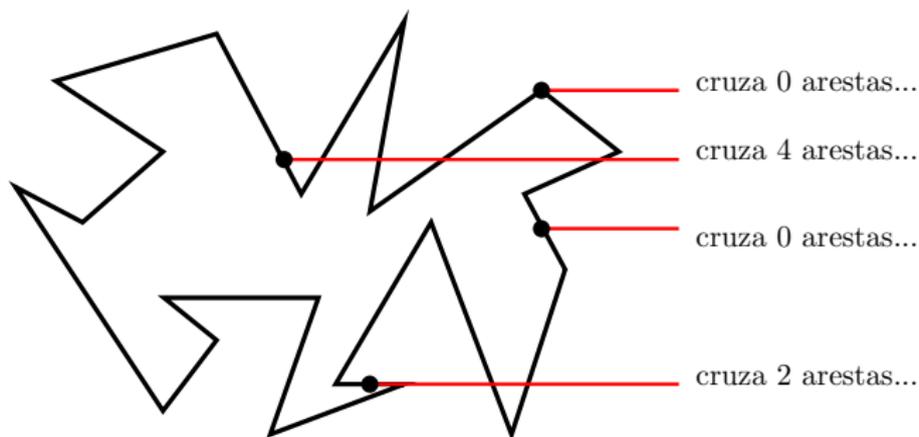
```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se ( $P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0$ )
      ou ( $P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0$ )
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
               $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ interseção  $c/$  eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7              então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9      então devolva dentro
10     senão devolva fora
```

Nem sempre funciona quando q está na fronteira de P ...

Pontos na fronteira

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

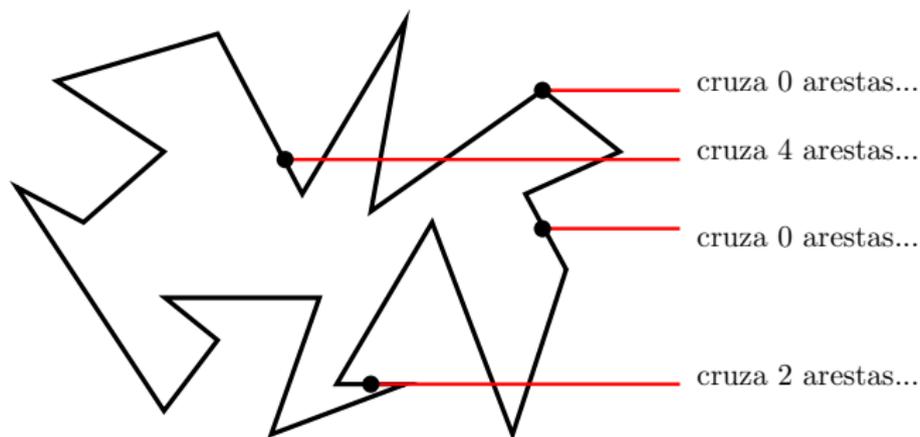
Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Pontos na fronteira

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Erra em alguns pontos da fronteira,
concluindo que eles estão fora de P ...

Casos especiais

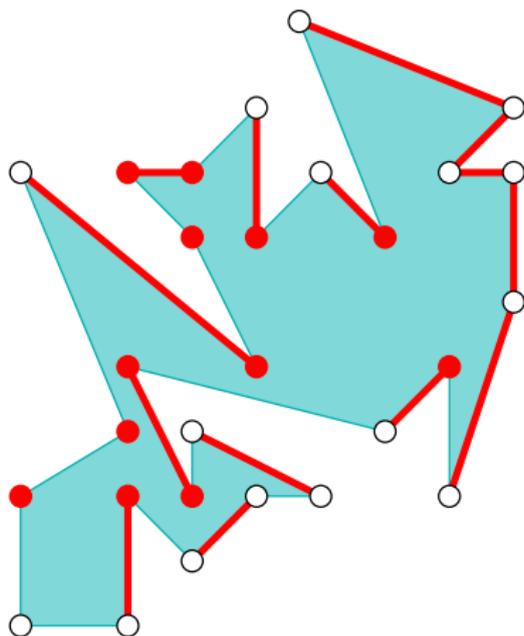
Se aresta é

fechada no extremo inferior e aberta no superior.

Casos especiais

Agora considere ao contrário: que uma aresta é fechada no extremo superior e aberta no inferior e que R vai para $x = -\infty$.

Pontos “em P ”:



Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando q é um dos vértices de P ,
a resposta pode ainda estar errada...

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando q é um dos vértices de P ,
a resposta pode ainda estar errada...

Faça um teste em separado
para ver se q não é um dos vértices de P .

