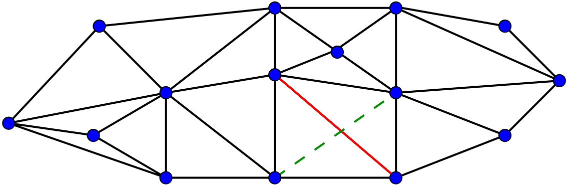
Aula 11

Triangulação de Delaunay

Secs 9.1 e 9.2 do livro de de Berg e outros

Aresta ilegal em uma triangulação

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.

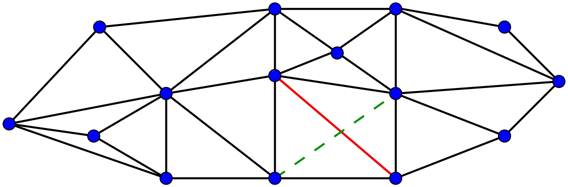


e: aresta interna de T num quadrilátero convexo

f: outra diagonal do quadrilátero de e

Aresta ilegal em uma triangulação

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T num quadrilátero convexo
f: outra diagonal do quadrilátero de e

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

Vetor de ângulos de uma triangulação

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Vetor de ângulos de uma triangulação

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

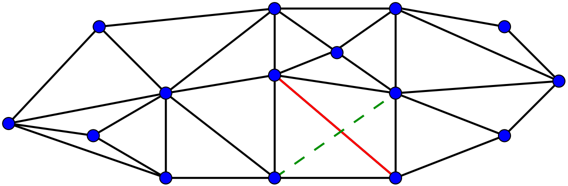
$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde
os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T,
em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



T é legal se não tem arestas ilegais

Se T não é legal, podemos trocar uma aresta ilegal e pela correspondente aresta f, aumentando o vetor $A(T)$.

Logo sempre existe uma triangulação legal de P.

Triangulação ângulo-ótima

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde
os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T,
em ordem não-decrescente.

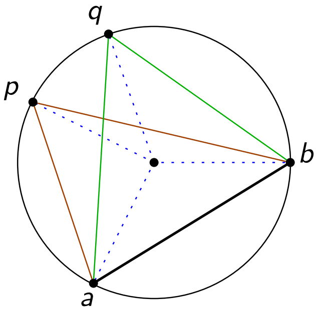
Seja T' uma outra triangulação de P.

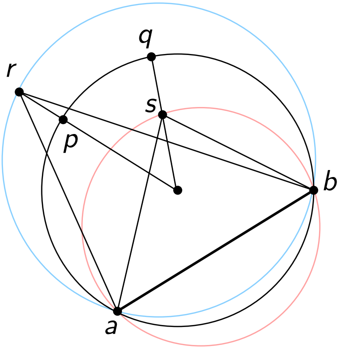
$A(T) > A(T')$ se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

T é ângulo-ótima
se $A(T) \geq A(T')$ para toda triangulação T' de P.

Se T é ângulo-ótima, então T é legal.

Um pouco de geometria



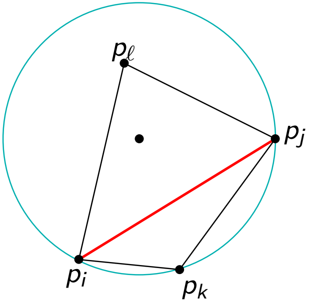


$$\angle arb \; < \; \angle apb \; = \; \angle aqb \; < \; \angle asb$$

Prova feita na aula passada.

Aresta ilegal

Aresta interna $e = p_i p_j$ e
p_k e p_ℓ pontas dos triângulos que compartilham e.

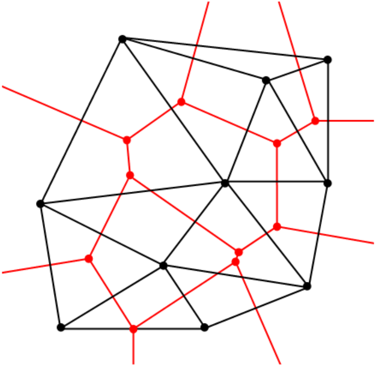


e é ilegal sse
p_ℓ está no interior do círculo determinado por $p_i p_j p_k$.

Prova feita na aula passada.

Grafo de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.



P é a coleção de pontos negros.
As linhas vermelhas são o diagrama de Voronoi de P.

Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

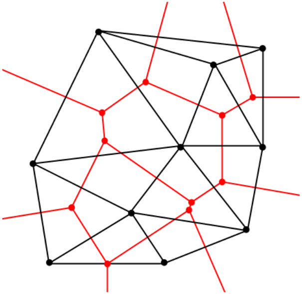
Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é triangulação: é única triangulação de Delaunay de P.



Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Algumas propriedades úteis de $DG(P)$:

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Algumas propriedades úteis de $DG(P)$:

Vale que

(a) p_i, p_j, p_k estão na mesma face de $DG(P)$ sse existe um círculo que passa pelos três e não contém nenhum ponto de P em seu interior;

(b) $p_i p_j$ é uma aresta de $DG(P)$ sse existe um disco que contém p_i e p_j em sua fronteira e mais nenhum ponto de P.

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Algumas propriedades úteis de $DG(P)$:

Vale que

(a) p_i, p_j, p_k estão na mesma face de $DG(P)$ sse existe um círculo que passa pelos três e não contém nenhum ponto de P em seu interior;

(b) $p_i p_j$ é uma aresta de $DG(P)$ sse existe um disco que contém p_i e p_j em sua fronteira e mais nenhum ponto de P.

Um lado da prova é fácil:

Teorema

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Algumas propriedades úteis de $DG(P)$:

Vale que

(a) p_i, p_j, p_k estão na mesma face de $DG(P)$ sse existe um círculo que passa pelos três e não contém nenhum ponto de P em seu interior;

(b) $p_i p_j$ é uma aresta de $DG(P)$ sse existe um disco que contém p_i e p_j em sua fronteira e mais nenhum ponto de P.

Um lado da prova é fácil:

Toda triangulação de Delaunay não tem arestas ilegais.

Triangulações de Delaunay são legais

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Um lado é fácil.

Seja T uma triangulação de Delaunay e e uma aresta interna de T.

A aresta e está em um triângulo de T (na verdade, em dois).

O círculo que contém os três vértices deste triângulo (centrado num vértice do diagrama de Voronoi) não contém em seu interior nenhum outro ponto de P.

Isso implica que e é legal, e portanto que T é legal.

Triangulações legais são de Delaunay

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Para o outro lado, primeiro note que, se todos os triângulos de uma triangulação estão contidos numa face de $DG(P)$, então a triangulação é de Delaunay.

Triangulações legais são de Delaunay

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Para o outro lado, primeiro note que, se todos os triângulos de uma triangulação estão contidos numa face de $DG(P)$, então a triangulação é de Delaunay.

Seja T uma triangulação legal.
Por contradição, suponha que T não é de Delaunay e considere um triângulo que não está contido numa face de $DG(P)$.

Triangulações legais são de Delaunay

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

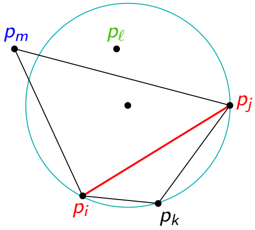
Prova. Seja T uma triangulação legal.
Por contradição, suponha que T não é de Delaunay e considere um triângulo que não está contido numa face de $DG(P)$.

Triangulações legais são de Delaunay

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Seja T uma triangulação legal.
Por contradição, suponha que T não é de Delaunay e considere um triângulo que não está contido numa face de $DG(P)$.

Então, por (a), para uma aresta interna $p_i p_j$ desse triângulo, existe p_ℓ dentro do círculo...

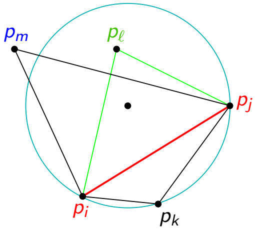


Triangulações legais são de Delaunay

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. Seja T uma triangulação legal.
Por contradição, suponha que T não é de Delaunay e considere um triângulo que não está contido numa face de $DG(P)$.

Então, por (a), para uma aresta interna $p_i p_j$ desse triângulo, existe p_ℓ dentro do círculo...



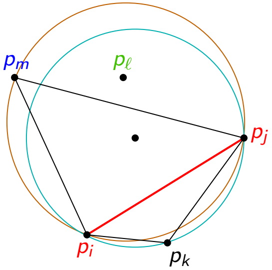
Escolha triângulo e $p_i p_j$ de modo que $\angle p_i p_\ell p_j$ seja máximo.

A outra direção da prova

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. ...

Mas então p_ℓ está dentro do círculo de $p_i p_j p_m$...

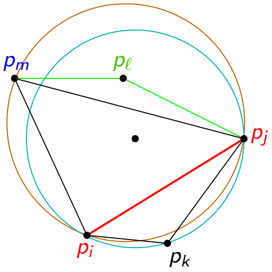


A outra direção da prova

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Prova. ...

Mas então p_ℓ está dentro do círculo de $p_i p_j p_m$...



e $\angle p_m p_\ell p_j > \angle p_i p_\ell p_j$, uma contradição.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...

toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Relações

É fácil ver que
se T é uma triangulação ângulo-ótima, então T é legal.

Mas então...
toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

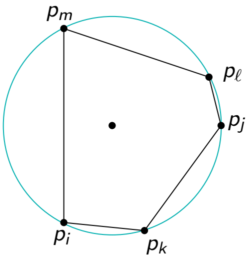
Em particular, se P está em posição geral,
$DG(P)$ é a única triangulação ângulo-ótima de P!

Caso P não esteja em posição geral,
suas triangulações de Delaunay têm seus vetores de ângulos parecidos, e com a primeira coordenada igual.

Ou seja,
triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo!

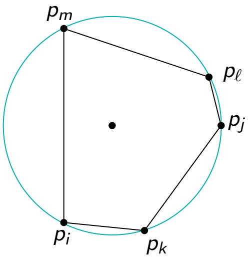
Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Ângulo mínimo igual

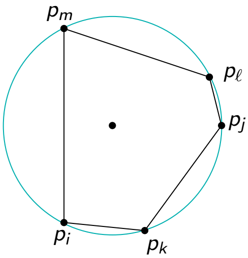
Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.

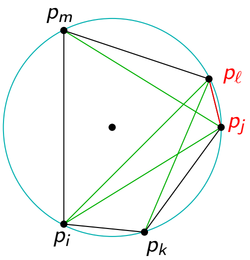


Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.

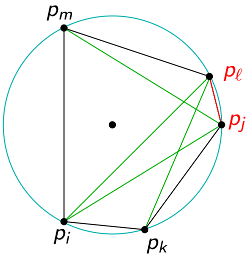


Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Ângulo mínimo igual

Considere uma face de $DG(P)$ com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face,
cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo
cujos extremos são dois pontos de P.

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

Triangulações de Delaunay têm o mesmo ângulo mínimo!

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P,
então duas triangulações de Delaunay de P
diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Cada face de $DG(P)$ com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Cada face de $DG(P)$ com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Cada aresta de tal face contribui com o mesmo ângulo.

Então ℓ destes $3(\ell - 2)$ coincidem, e podem diferir

$$3(\ell - 2) - \ell \ = \ 2\ell - 6.$$

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Cada face de $DG(P)$ com ℓ vértices contribui com $\ell - 2$ triângulos e $3(\ell - 2)$ ângulos.

Cada aresta de tal face contribui com o mesmo ângulo.

Então ℓ destes $3(\ell - 2)$ coincidem, e podem diferir

$$3(\ell - 2) - \ell \;=\; 2\ell - 6.$$

Portanto cada face de $DG(P)$ com ℓ vértices contribui com no máximo $2\ell - 6$ ângulos diferentes.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P,
então duas triangulações de Delaunay de P
diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Como $\sum \ell = 2m - k$, onde m é o número de arestas e k é o número de pontos na face externa de $DG(P)$,

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Como $\sum \ell = 2m - k$, onde m é o número de arestas e k é o número de pontos na face externa de $DG(P)$, somando tudo, temos

$$\sum (2\ell - 6) = 4m - 2k - 6f$$

onde f é o número de faces internas de $DG(P)$.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Como $\sum \ell = 2m - k$, onde m é o número de arestas e k é o número de pontos na face externa de $DG(P)$, somando tudo, temos

$$\sum (2\ell - 6) = 4m - 2k - 6f$$

onde f é o número de faces internas de $DG(P)$.

Lembre-se que $m = 3n - 3 - k - x$ e $f = 2n - 2 - k - x$.

Muitos ângulos iguais

Se faltam x arestas para $DG(P)$ ser uma triangulação de P, então duas triangulações de Delaunay de P diferem em no máximo $2x$ ângulos distintos.

Como $\sum \ell = 2m - k$, onde m é o número de arestas e k é o número de pontos na face externa de $DG(P)$, somando tudo, temos

$$\sum (2\ell - 6) = 4m - 2k - 6f$$

onde f é o número de faces internas de $DG(P)$.

Lembre-se que $m = 3n - 3 - k - x$ e $f = 2n - 2 - k - x$.

Fazendo a conta,

$$4m - 2k - 6f \; = \; 4(3n - 3 - k - x) - 2k - 6(2n - 2 - k - x) \; = \; 2x.$$

Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter uma triangulação de Delaunay de P?

Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter
uma triangulação de Delaunay de P?

Um jeito óbvio é a partir de $\mathrm{Vor}(P)$.
Quanto tempo a partir de $\mathrm{Vor}(P)$?

Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter
uma triangulação de Delaunay de P?

Um jeito óbvio é a partir de $\mathrm{Vor}(P)$.
Quanto tempo a partir de $\mathrm{Vor}(P)$?

De $\mathrm{Vor}(P)$, podemos obter $DG(P)$ em tempo linear em n, onde n é o número de pontos em P, e vice-versa.

Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter
uma triangulação de Delaunay de P?

Um jeito óbvio é a partir de $\mathrm{Vor}(P)$.
Quanto tempo a partir de $\mathrm{Vor}(P)$?

De $\mathrm{Vor}(P)$, podemos obter $DG(P)$ em tempo linear em n, onde n é o número de pontos em P, e vice-versa.

Aula que vem:

- algoritmo quadrático para construir uma triangulação de Delaunay.
- um segundo algoritmo, probabilístico.