Geometria Computacional

Aula 10

Algoritmo de Fortune: comentários finais

Sec 7.2 do livro de de Berg e outros

Triangulação de Delaunay

Secs 9.1 e 9.2 do livro de de Berg e outros

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

$Q \leftarrow$ FilaDeEventos(P, n) ▷ P ord. por Y-coordenada
CrieABB(T) ▷ ED para a linha da praia
CrieDCEL$(\mathcal{V})$ ▷ ED para $\mathrm{Vor}(P)$
enquanto não Vazia(Q) **faça**
  $q \leftarrow$ RemovaMax(Q)
  se q é um evento-ponto
    então TrataEventoPonto$(q, T, Q, \mathcal{V})$
    senão TrataEventoCírculo$(q, T, Q, \mathcal{V})$
FinalizeVoronoi$(\mathcal{V}, T)$ ▷ adiciona o vértice ∞
devolva $\mathcal{V}$

Casos degenerados

Ponto p de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- qual arco está acima de p?
  pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

Casos degenerados

Ponto p de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- qual arco está acima de p?
  pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

O que está acontecendo no desenho do diagrama?

Casos degenerados

Ponto p de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- qual arco está acima de p?
  pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

O que está acontecendo no desenho do diagrama?

O que exatamente acontece na sequência, se seguirmos o acima?

Casos degenerados

Ponto p de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- qual arco está acima de p?
  pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

O que está acontecendo no desenho do diagrama?

O que exatamente acontece na sequência, se seguirmos o acima?

Tripla de arcos de pontos colineares:

- definem um círculo?
  não, logo não geram um evento-círculo.

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

Possibilidades:

- dois pontos de P com mesma Y-coordenada
- um ponto de P com a mesma Y-coordenada que o ponto de um evento-círculo
- dois pontos de evento-círculo com mesma Y-coordenada

O que significam no desenho?

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

Possibilidades:

- dois pontos de P com mesma Y-coordenada
- um ponto de P com a mesma Y-coordenada que o ponto de um evento-círculo
- dois pontos de evento-círculo com mesma Y-coordenada

O que significam no desenho?

- se X-coordenadas são distintas, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exceto quando estes são os primeiros, quando é necessário um tratamento diferente.

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

Possibilidades:

- dois pontos de P com mesma Y-coordenada
- um ponto de P com a mesma Y-coordenada
  que o ponto de um evento-círculo
- dois pontos de evento-círculo com mesma Y-coordenada

O que significam no desenho?

- se X-coordenadas são distintas,
  podem ser tratados numa ordem arbitrária,
  exceto quando estes são os primeiros,
  quando é necessário um tratamento diferente.
- se X-coordenadas coincidem...

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

- se X-coordenadas coincidem,
  podem ser tratados numa ordem arbitrária,
  exigindo eventualmente uma limpeza final.

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

- se X-coordenadas coincidem,
  podem ser tratados numa ordem arbitrária,
  exigindo eventualmente uma limpeza final.

Possibilidades:

- ~~dois pontos de P coincidentes~~
- um ponto de P que coincide com o ponto de um evento-círculo

  O que significa no desenho do diagrama?

Casos degenerados

Eventos com mesma Y-coordenada:

- se X-coordenadas coincidem,
  podem ser tratados numa ordem arbitrária,
  exigindo eventualmente uma limpeza final.

Possibilidades:

- ~~dois pontos de P coincidentes~~
- um ponto de P que coincide com o ponto de um evento-círculo

  O que significa no desenho do diagrama?

- dois pontos de evento-círculo coincidentes

  O que significa no desenho do diagrama?

Consumo de tempo

```
TrataEventoPonto(q, T, Q, 𝒱)
se T = ∅
    então Insere(T, q)
    senão f ← Busque(T, q)   ▷ folha de T do arco acima de q
          i ← evento_circ(f)
          se i ≠ NIL
             então Remove(Q, i)
          (u, f, v) ← Quebre_e_Insira(T, f, q)
          NovaAresta(𝒱, u, NIL, v, NIL)
          AtualizaEventos(Q, T, f)
```

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(\lg n)$.

Consumo de tempo

TrataEventoPonto(q, T, Q, $\mathcal{V}$)

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(\lg n)$.

```
TrataEventoCírculo(q, T, Q, V)
    f ← folha(q)        ▷ folha de T do arco associado a q
    (pred, suc, novo) ← Remove(T, f)
    AtualizaEventos(Q, T, f)
    c ← centro(q)       ▷ centro do círculo associado a q
    u ← NovoVértice(V, c)
    AdicionaExtremo(V, u, aresta(pred), aresta(suc))
    NovaAresta(V, novo, NIL, NIL, u)
```

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(\lg n)$.

Consumo de tempo

TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)
TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(\lg n)$.

Fortune(P, n)
$Q \leftarrow$ FilaDeEventos(P, n) ▷ P ord. por Y-coordenada
CrieABB(T) ▷ ED para a linha da praia
CrieDCEL($\mathcal{V}$) ▷ ED para $\mathrm{Vor}(P)$
enquanto não Vazia(Q) **faça**
    $q \leftarrow$ RemovaMin(Q)
    se q é um evento-ponto
        então TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)
        senão TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)
FinalizeVoronoi($\mathcal{V}, T$) ▷ adiciona o vértice ∞
devolva $\mathcal{V}$

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Toda comparação "$=$" deve ser feita permitindo um erro de até ϵ, para um ϵ pequeno, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

```
1  se a = b
2      então ···
3      senão ···
```

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Toda comparação "$=$" deve ser feita permitindo um erro de até ϵ, para um ϵ pequeno, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

se $a = b$
  então $\cdots$
  senão $\cdots$

escreva

se $\mathrm{abs}(a - b) \leq \epsilon$
  então $\cdots$
  senão $\cdots$

Cuidados numéricos nos cálculos

Similarmente, comparações "$<$" ou "$\leq$" devem ser feita permitindo um erro de até ϵ, para, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

se $a < b$ $\triangleright$ **se** $a - b < 0$
    então $\cdots$
    senão $\cdots$

Cuidados numéricos nos cálculos

Similarmente, comparações "$<$" ou "$\leq$" devem ser feita permitindo um erro de até ϵ, para, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

```
se a < b        ▷ se a − b < 0
    então ···
    senão ···
```

escreva

```
se a − b < ϵ
    então ···
    senão ···
```

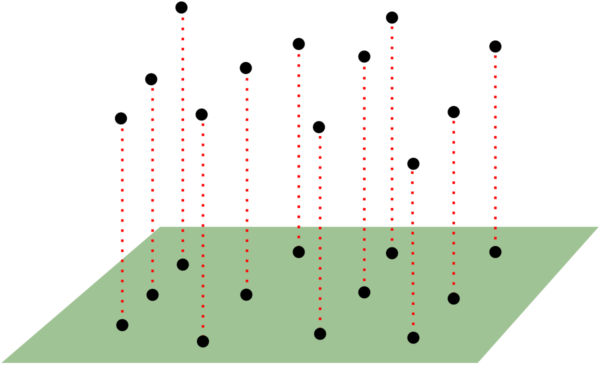
Aula 10

Triangulação de Delaunay

Secs 9.1 e 9.2 do livro de de Berg e outros

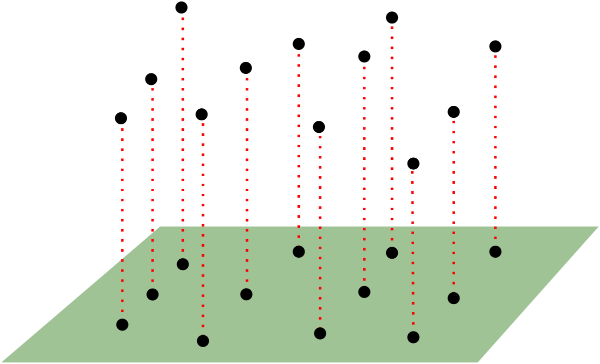
Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

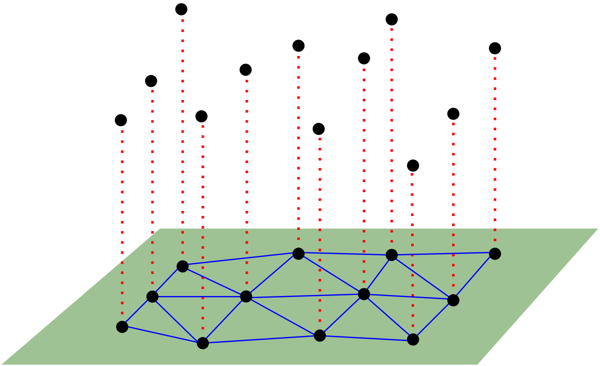


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



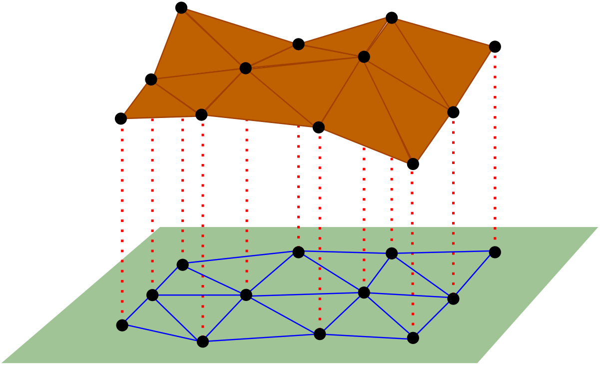
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e...

Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

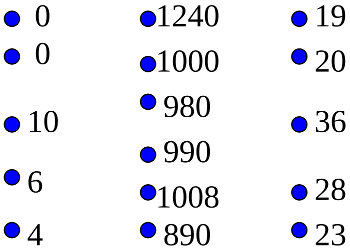


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

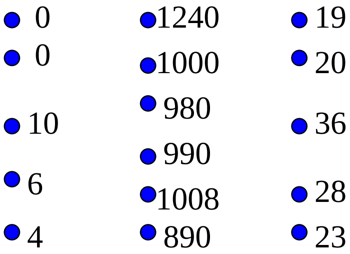
Como fazer?

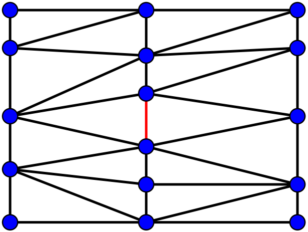
Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

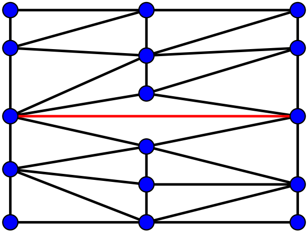
Qual triangulação é melhor?



Qual triangulação é melhor?







Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde
os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T,
em ordem não-decrescente.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

Vetor de ângulos

P: conjunto de pontos
T: triangulação de P
m: número de triângulos em T

$A(T)$: vetor de ângulos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{3m})$ de T onde os α_i são os ângulos internos dos m triângulos de T, em ordem não-decrescente.

Seja T' uma outra triangulação de P.

Escrevemos $A(T) > A(T')$
se $A(T)$ é lexicograficamente maior que $A(T')$.

T é ângulo-ótima
se $A(T) \geq A(T')$ para toda triangulação T' de P.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem
$2n - 2 - k$ triângulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem
$2n - 2 - k$ triângulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Prova: Seja t o número de triângulos e
m o número de arestas de uma triangulação de P.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem
$2n - 2 - k$ triângulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Prova: Seja t o número de triângulos e
m o número de arestas de uma triangulação de P.

Então $3t + k = 2m$ e portanto $t = \frac{2m-k}{3}$.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem
$2n - 2 - k$ triângulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Prova: Seja t o número de triângulos e
m o número de arestas de uma triangulação de P.

Então $3t + k = 2m$ e portanto $t = \frac{2m-k}{3}$.

Pela fórmula de Euler, temos que $n - m + (t + 1) = 2$.

Tamanho de uma triangulação

Seja P um conjunto de n pontos no plano, não todos colineares.

Seja k o número de vértices
na fronteira do fecho convexo dos pontos de P.

Teorema: Toda triangulação de P tem
$2n - 2 - k$ triângulos e $3n - 3 - k$ arestas.

Prova: Seja t o número de triângulos e
m o número de arestas de uma triangulação de P.

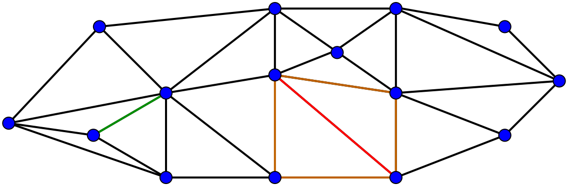
Então $3t + k = 2m$ e portanto $t = \frac{2m-k}{3}$.

Pela fórmula de Euler, temos que $n - m + (t + 1) = 2$.

Portanto, $n - m + \frac{2m-k}{3} + 1 = n - \frac{m+k}{3} + 1 = 2$,
que implica que $m = 3n - 3 - k$ e $t = 2n - 2 - k$.

Triangulação legal

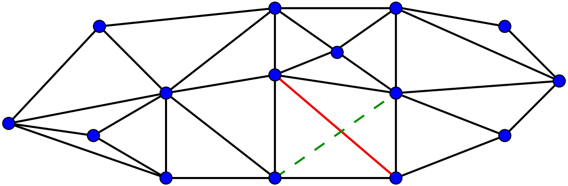
T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T
que a compartilham formam um quadrilátero convexo
(a aresta verde não satisfaz esta condição)

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T
que a compartilham formam um quadrilátero convexo

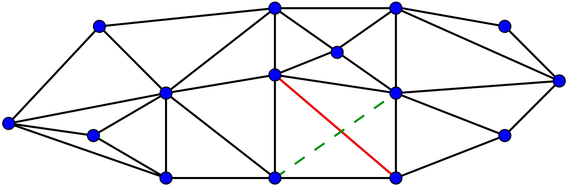
f: outra diagonal do quadrilátero de e

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

Triangulação legal

T: triangulação da coleção P de pontos do plano.



e: aresta interna de T cujos triângulos de T
que a compartilham formam um quadrilátero convexo

f: outra diagonal do quadrilátero de e

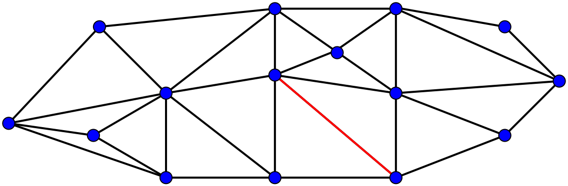
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$: ângulos dos Δs de e
$\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$: ângulos dos Δs de f

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

T é legal se não tem arestas ilegais

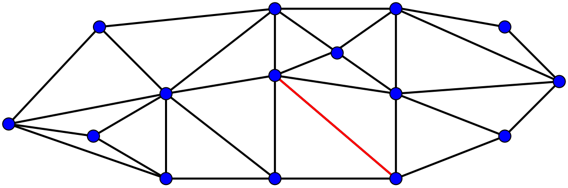
Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

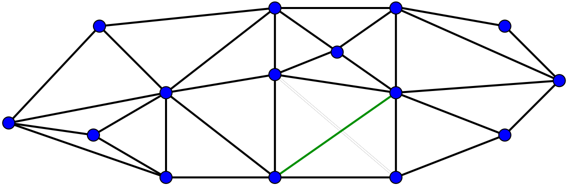


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

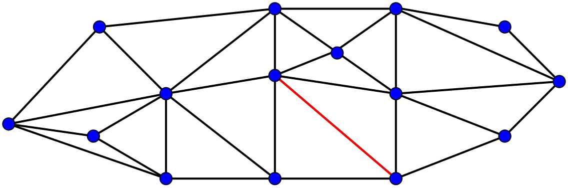


T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.

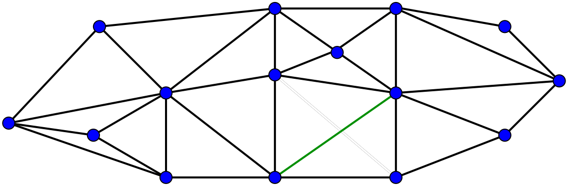


Triangulação legal

e: aresta ilegal de T



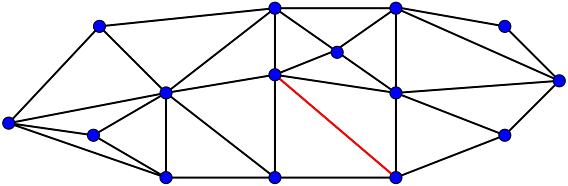
T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



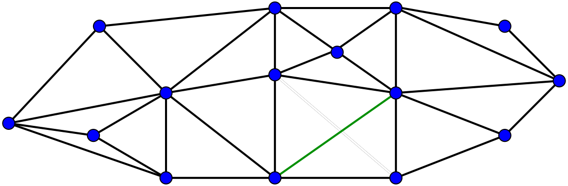
Vale que $A(T') > A(T)$.

Triangulação legal

e: aresta ilegal de T

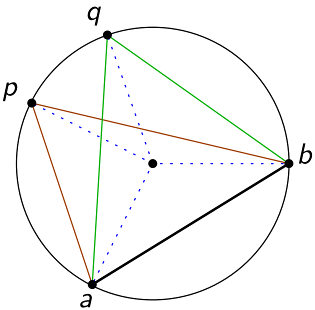


T': triangulação obtida trocando-se e pela outra diagonal.



Vale que $A(T') > A(T)$. Então existe triangulação legal!

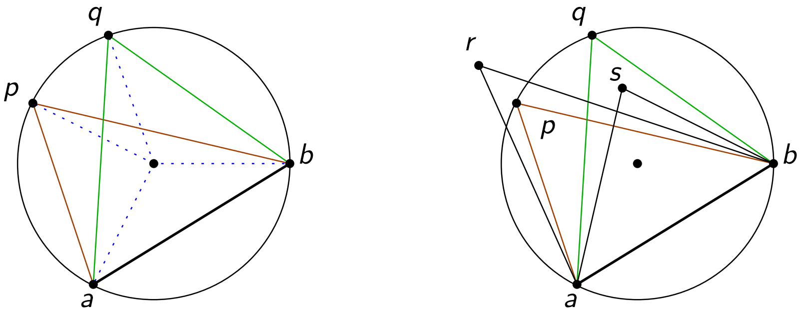
Um pouco de geometria



$$\color{orange}{\angle apb} \;=\; \color{green}{\angle aqb}$$

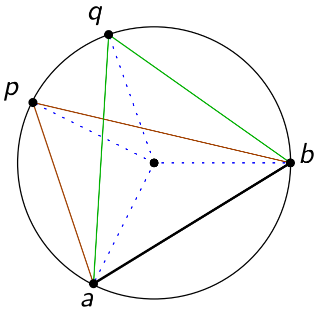
Prova feita na aula.

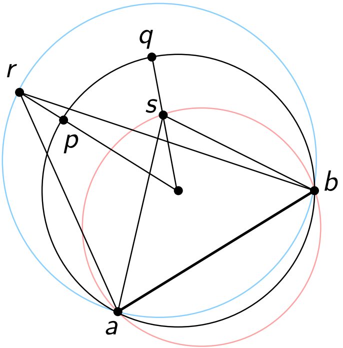
Um pouco de geometria



$$\angle arb < \angle apb = \angle aqb < \angle asb$$

Um pouco de geometria



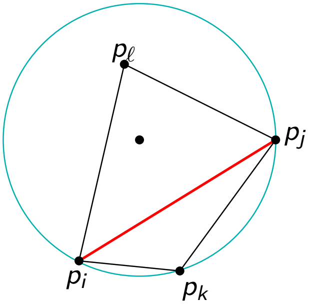


$$\angle arb \; < \; \angle apb \; = \; \angle aqb \; < \; \angle asb$$

Aresta ilegal

e é ilegal se $\min \alpha_i < \min \beta_j$

Aresta interna $e = p_i p_j$ e
p_k e p_ℓ pontas dos triângulos que compartilham e.



e é ilegal sse
p_ℓ está no interior do círculo determinado por $p_i p_j p_k$.

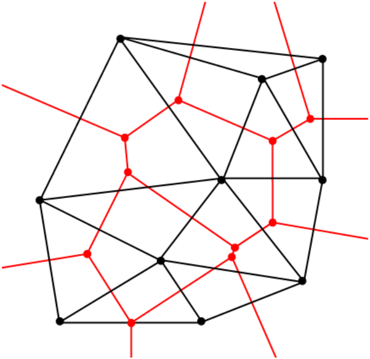
Prova feita na aula.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Triangulação de Delaunay

O grafo de Delaunay $DG(P)$ é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de P e uma aresta entre os pontos u e v, representada pelo segmento uv, se $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.



P é a coleção de pontos negros.
As linhas vermelhas são o diagrama de Voronoi de P.

Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

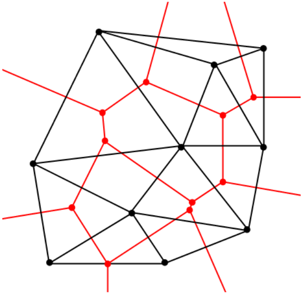
Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Se P está em posição geral, então os vértices de $\mathrm{Vor}(P)$ têm grau 3 e $DG(P)$ já é triangulação: é única triangulação de Delaunay de P.



Triangulação de Delaunay

Grafo de Delaunay $DG(P)$: grafo cujo conjunto de vértices é P e uv é uma aresta sse $\mathcal{V}(u)$ e $\mathcal{V}(v)$ compartilham aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

Qualquer triangulação de $DG(P)$ é chamada de triangulação de Delaunay.

Teorema. Uma triangulação de P é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de P.

Provaremos esse teorema na próxima aula!