Geometria Computacional

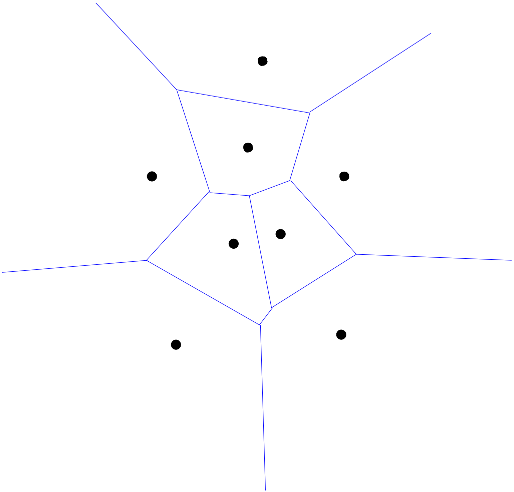
Aula 9

Algoritmo de Fortune

Sec 7.2 do livro de de Berg e outros

Diagrama de Voronoi

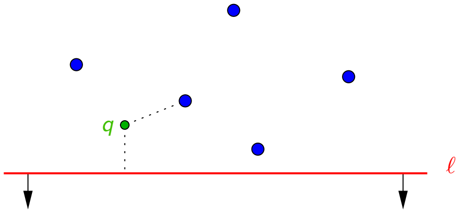
Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.



Algoritmo de Fortune

ℓ^+: semiplano acima da linha de varredura ℓ

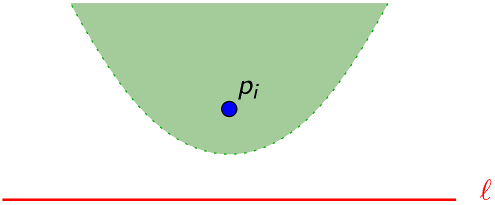
Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q?



Se q está mais próximo de um p_i acima de ℓ do que de ℓ,
então q está na célula de p_i.

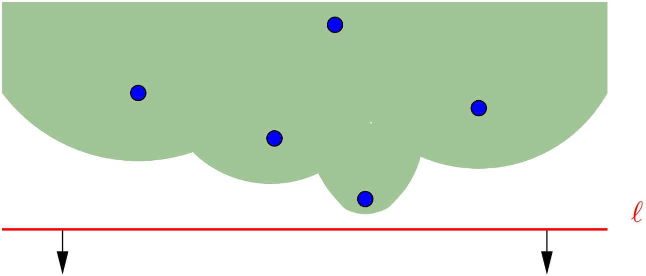
Linha da praia

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma parábola.



Linha da praia

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ
é delimitado por uma parábola.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\mathrm{Vor}(P)$ é conhecido
é delimitada por arcos parabolóides,
que definem a chamada linha da praia.

Diagrama de Voronoi

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\mathrm{Vor}(P)$.

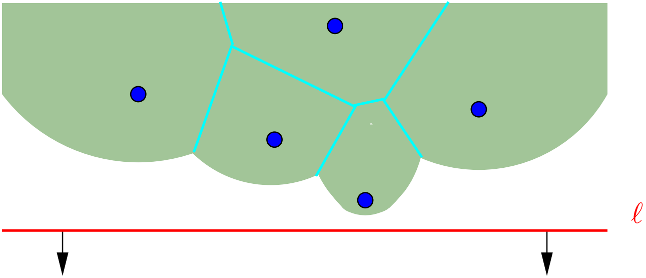
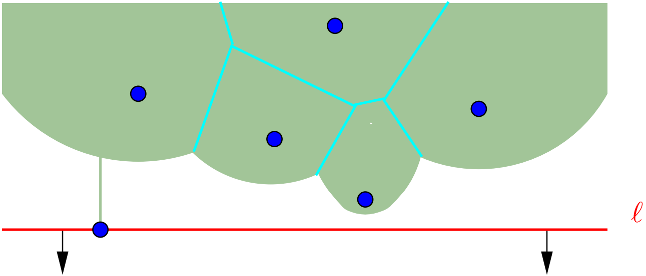


Diagrama de Voronoi

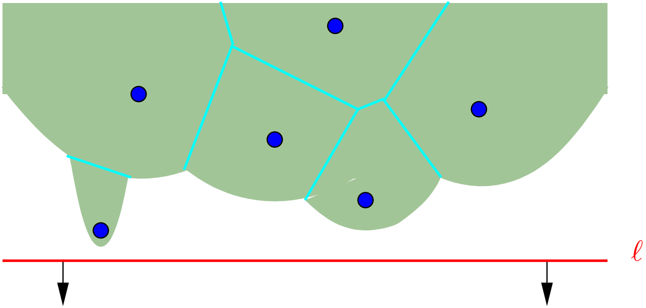
Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\mathrm{Vor}(P)$.



Arcos que entram na linha de praia
são arestas de $\mathrm{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Diagrama de Voronoi

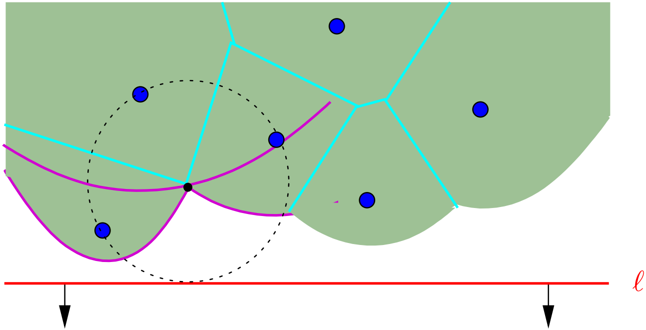
Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\mathrm{Vor}(P)$.



Arcos que entram na linha de praia
são arestas de $\mathrm{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

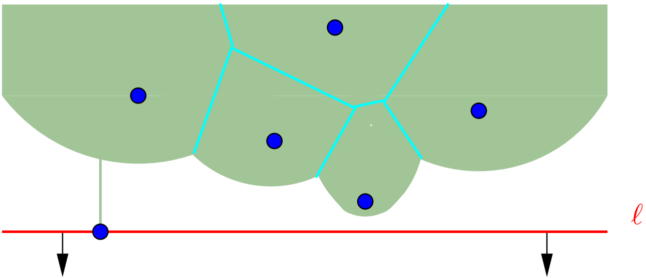
Diagrama de Voronoi

Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram, o arco entre eles sai da linha de praia.



Arcos que saem da linha de praia correspondem a vértices de $\mathrm{Vor}(P)$: o ponto de encontro está equidistante de três pontos de P e é um vértice de $\mathrm{Vor}(P)$.

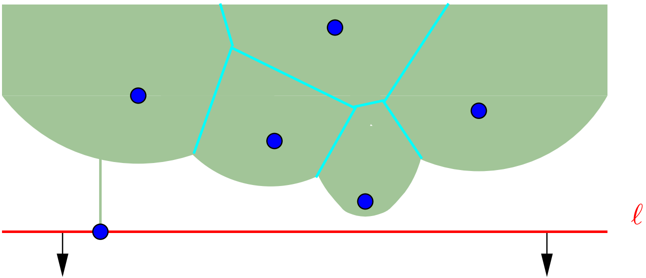
Evento-ponto



Arcos que entram na linha de praia
são arestas de $\mathrm{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Ponto evento relacionado: um ponto de P (evento-ponto).

Evento-ponto



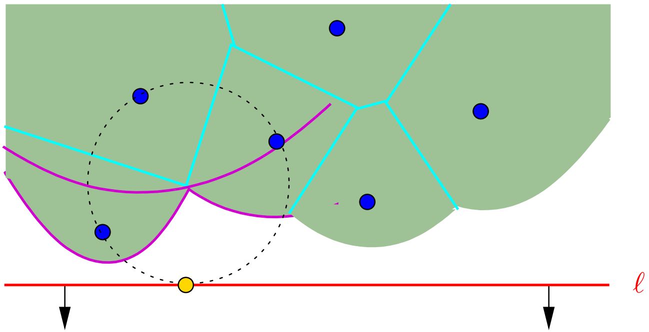
Arcos que entram na linha de praia
são arestas de $\mathrm{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Ponto evento relacionado: um ponto de P (evento-ponto).

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia
é a linha de varredura passar por um ponto de P.

Evento-círculo

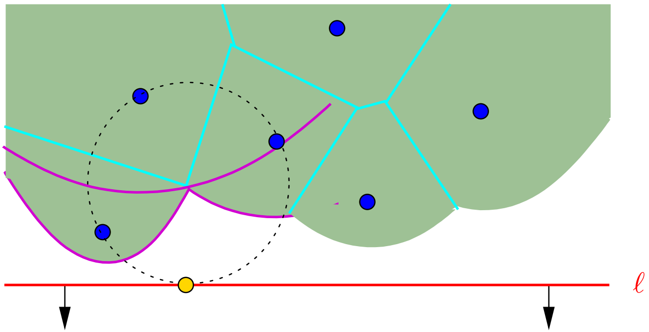
Ocorre quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de evento-círculo.

Evento-círculo

Ocorre quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.

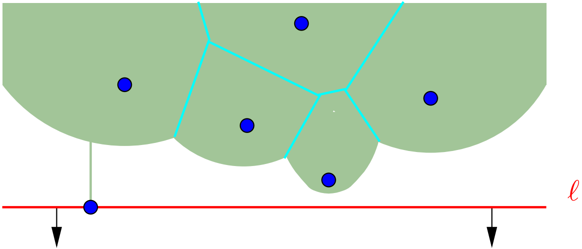


O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de evento-círculo.

Lema. O único jeito de um arco desaparecer da linha de praia é por meio de um evento-círculo.

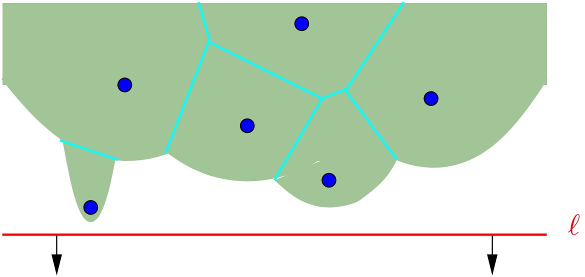
Quantos arcos há na linha?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Quantos arcos há na linha?

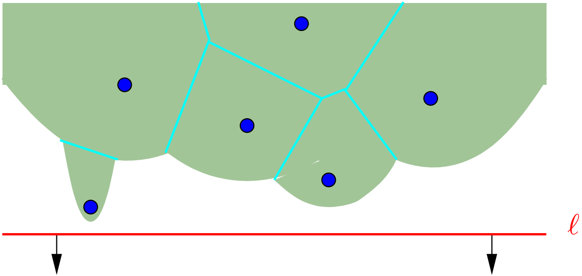
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

Quantos arcos há na linha?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P.



Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

Estruturas de dados

Para $\mathrm{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas (DCEL)
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Estruturas de dados

Para $\mathrm{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas (DCEL)
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade ou ABBB,
que começa com os pontos de P, ordenados por Y-coordenada.

Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Estruturas de dados

Para $\mathrm{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas (DCEL)
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade ou ABBB,
que começa com os pontos de P, ordenados por Y-coordenada.

Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Para a linha da praia, usamos uma ABBB,
com arcos nas folhas e pontos de quebra nos nós internos.

Estruturas de dados

Para $\mathrm{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas (DCEL)
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade ou ABBB,
que começa com os pontos de P, ordenados por Y-coordenada.

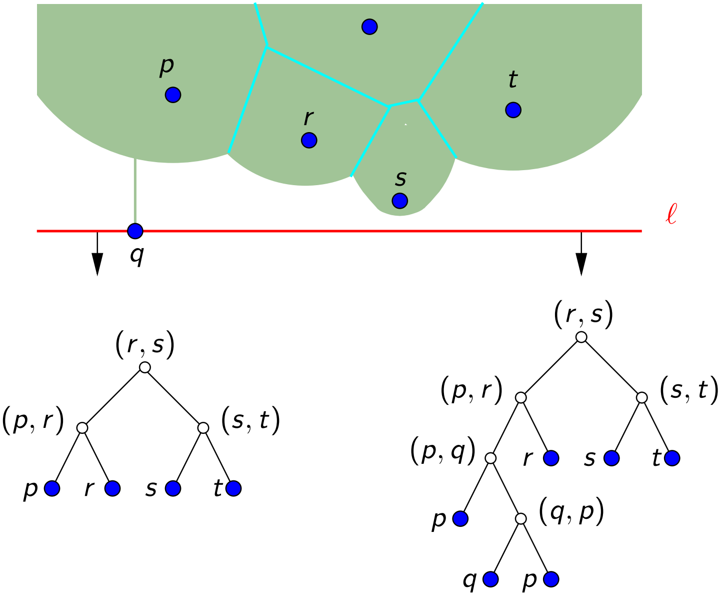
Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Para a linha da praia, usamos uma ABBB,
com arcos nas folhas e pontos de quebra nos nós internos.

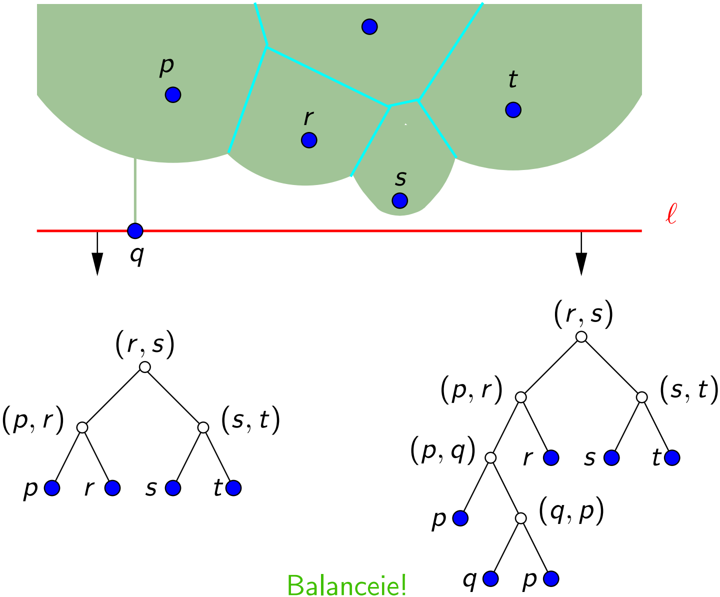
Um arco é representado pelo ponto p_i que o determina.

Um ponto de quebra é representado por um par de pontos (p_i, p_j)
cujos arcos o determinam, e está associado a uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$.

ABBB da linha da praia



ABBB da linha da praia



Balanceie!

Algoritmo de Fortune

```
Fortune(P, n)
  Q ← FilaDeEventos(P, n)        ▷ P ord. por Y-coordenada
  CrieABB(T)        ▷ ED para a linha da praia
  CrieDCEL(𝒱)        ▷ ED para Vor(P)
  enquanto não Vazia(Q) faça
      q ← RemovaMax(Q)
      se q é um evento-ponto
          então TrataEventoPonto(q, T, Q, 𝒱)
          senão TrataEventoCírculo(q, T, Q, 𝒱)
  FinalizeVoronoi(𝒱, T)        ▷ adiciona o vértice ∞
  devolva 𝒱
```

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

$Q \leftarrow$ FilaDeEventos(P, n) ▷ P ord. por Y-coordenada
CrieABB(T) ▷ ED para a linha da praia
CrieDCEL($\mathcal{V}$) ▷ ED para $\mathrm{Vor}(P)$
enquanto não Vazia(Q) **faça**
    $q \leftarrow$ RemovaMax(Q)
    se q é um evento-ponto
        então TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)
        senão TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)
FinalizeVoronoi($\mathcal{V}, T$) ▷ adiciona o vértice ∞
devolva $\mathcal{V}$

Há no máximo $2n - 1 = \mathrm{O}(n)$ arcos em T,
logo $\mathrm{O}(n)$ eventos-círculo em Q.

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

$Q \leftarrow$ FilaDeEventos(P, n) $\triangleright$ P ord. por Y-coordenada
CrieABB(T) $\triangleright$ ED para a linha da praia
CrieDCEL$(\mathcal{V})$ $\triangleright$ ED para $\mathrm{Vor}(P)$
enquanto não Vazia(Q) **faça**
    $q \leftarrow$ RemovaMax(Q)
    se q é um evento-ponto
        então TrataEventoPonto$(q, T, Q, \mathcal{V})$
        senão TrataEventoCírculo$(q, T, Q, \mathcal{V})$
FinalizeVoronoi$(\mathcal{V}, T)$ $\triangleright$ adiciona o vértice ∞
devolva $\mathcal{V}$

FinalizeVoronoi$(\mathcal{V}, T)$: adiciona o vértice ∞ como extremo das arestas dos nós internos que restam em T.

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, $\mathcal{V}$)

se $T = \emptyset$
    então Insere(T, q)
    senão $f \leftarrow$ Busque(T, q) ▷ folha de T do arco acima de q
        $i \leftarrow evento\_circ(f)$

$evento\_circ(f)$: índice de Q para o evento-círculo (se existir) associado ao arco em f.

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)

se $T = \emptyset$
    então Insere(T, q)
    senão $f \leftarrow$ Busque(T, q) $\triangleright$ folha de T do arco acima de q
        $i \leftarrow evento\_circ(f)$
        se $i \neq$ NIL
            então Remove(Q, i)

$evento\_circ(f)$: índice de Q para o evento-círculo (se existir) associado ao arco em f.

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)

se $T = \emptyset$
  então Insere(T, q)
  senão $f \leftarrow$ Busque(T, q) ▷ folha de T do arco acima de q
    $i \leftarrow evento\_circ(f)$
    se $i \neq$ NIL
      então Remove(Q, i)
    $(u, f, v) \leftarrow$ Quebre_e_Insira(T, f, q)

Quebre_e_Insira(T, f, q): troque f por árvore com três folhas, a do meio para o arco de q e outras duas para o arco de p=$ponto(f)$.
Balanceie T se necessário.
Devolva apontadores para os nós internos novos e folha de q.

Tratamento de evento-ponto

```
TrataEventoPonto(q, T, Q, 𝒱)
se T = ∅
    então Insere(T, q)
    senão f ← Busque(T, q)   ▷ folha de T do arco acima de q
          i ← evento_circ(f)
          se i ≠ NIL
             então Remove(Q, i)
          (u, f, v) ← Quebre_e_Insira(T, f, q)
          NovaAresta(𝒱, u, NIL, v, NIL)
```

NovaAresta($\mathcal{V}, u, x, v, y$): cria aresta nova em $\mathrm{Vor}(P)$, com uma gêmea do nó interno u de T, indo para o vértice x de $\mathrm{Vor}(P)$, e outra, de v, indo para y. (Se x ou y são NIL, tal vértice ainda está indefinido.)

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto($q, T, Q, \mathcal{V}$)

se $T = \emptyset$
  então Insere(T, q)
  senão $f \leftarrow$ Busque(T, q) $\triangleright$ folha de T do arco acima de q
    $i \leftarrow evento\_circ(f)$
    se $i \neq$ NIL
      então Remove(Q, i)
    $(u, f, v) \leftarrow$ Quebre_e_Insira(T, f, q)
    NovaAresta($\mathcal{V}, u,$ NIL$, v,$ NIL)
    AtualizaEventos(Q, T, f)

AtualizaEventos(Q, T, f): calcule o evento-círculo das duas novas triplas de arcos consecutivos em T em torno de f; se a Y-coordenada de tal ponto é menor que q_Y, então acrescente-o a Q.

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)

$f \leftarrow folha(q)$ $\triangleright$ folha de T do arco associado a q

$(pred, suc, novo) \leftarrow$ Remove(T, f)

Remove(T, f): remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f, e o seu substituto.

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)

$f \leftarrow folha(q)$ $\triangleright$ folha de T do arco associado a q
$(pred, suc, novo) \leftarrow$ Remove(T, f)
AtualizaEventos$(Q, T, novo)$
$c \leftarrow centro(q)$ $\triangleright$ centro do círculo associado a q
$u \leftarrow$ NovoVértice$(\mathcal{V}, c)$

Remove(T, f): remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f, e o seu substituto.

AtualizaEventos(Q, T, f): calcule o evento-círculo das duas novas triplas de arcos consecutivos em T em torno de f; se a Y-coordenada de tal ponto é menor que q_Y, então acrescente-o a Q.

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo(q, T, Q, $\mathcal{V}$)

$f \leftarrow$ *folha*(q) $\quad\triangleright$ folha de T do arco associado a q
($pred$, suc, $novo$) $\leftarrow$ Remove(T, f)
AtualizaEventos(Q, T, $novo$)
$c \leftarrow$ *centro*(q) $\quad\triangleright$ centro do círculo associado a q
$u \leftarrow$ NovoVértice($\mathcal{V}$, c)
AdicionaExtremo($\mathcal{V}$, u, *aresta*($pred$), *aresta*(suc))

Remove(T, f): remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f, e o seu substituto.

AdicionaExtremo($\mathcal{V}$, u, *aresta*($pred$), *aresta*(suc)): põe u como extremo das gêmeas correspondentes aos pontos de quebra associados a q.

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo($q, T, Q, \mathcal{V}$)

1 $f \leftarrow folha(q)$ ▷ folha de T do arco associado a q
2 $(pred, suc, novo) \leftarrow$ Remove(T, f)
3 AtualizaEventos($Q, T, novo$)
4 $c \leftarrow centro(q)$ ▷ centro do círculo associado a q
5 $u \leftarrow$ NovoVértice($\mathcal{V}, c$)
6 AdicionaExtremo($\mathcal{V}, u, aresta(pred), aresta(suc)$)
7 NovaAresta($\mathcal{V}, novo$, NIL, NIL, u)

Remove(T, f): remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f, e o seu substituto.

NovaAresta($\mathcal{V}, u, x, v, y$): cria aresta nova em $\mathrm{Vor}(P)$, com uma gêmea do nó interno u de T, indo para o vértice x de $\mathrm{Vor}(P)$, e outra, de v, indo para y. (Se x ou y são NIL, tal vértice ainda está indefinido.)