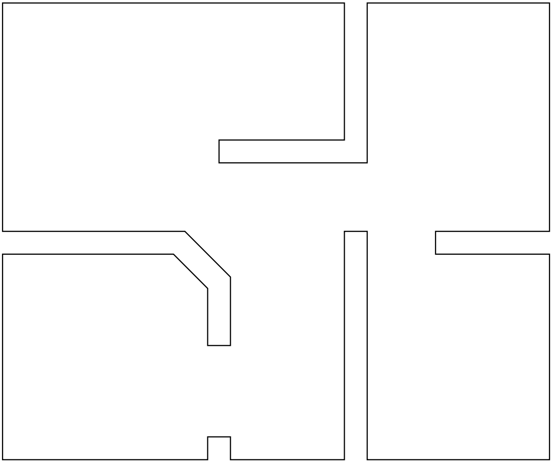
Teorema da Galeria de Arte

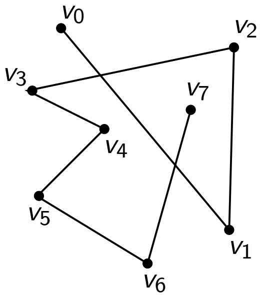


Art Gallery Theorems and Algorithms
by Joseph O'Rourke, Oxford University Press, 1987.

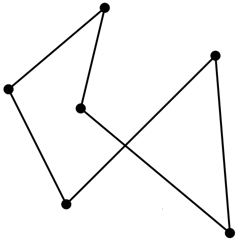
`http://www.science.smith.edu/~jorourke/books/ArtGalleryTheorems/art.html`

Curvas poligonais

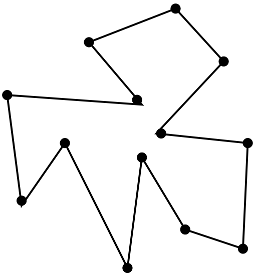
Curva poligonal: sequência $(v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são pontos em $\mathbb{R}^2$ e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$.



curva poligonal



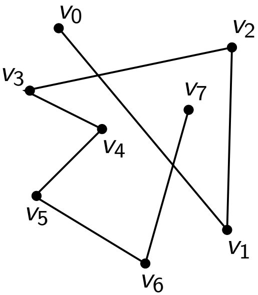
fechada não-simples



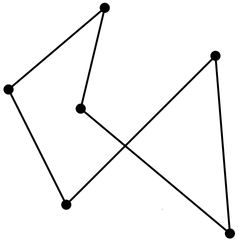
fechada simples

Curvas poligonais

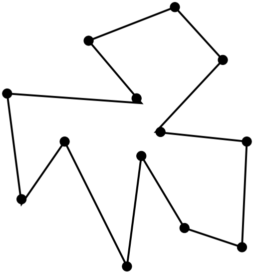
Curva poligonal: sequência $(v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são pontos em $\mathbb{R}^2$ e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$.



curva poligonal



fechada não-simples



fechada simples

fechada: $v_0 = v_{n-1}$

simples: não se auto-intersecta

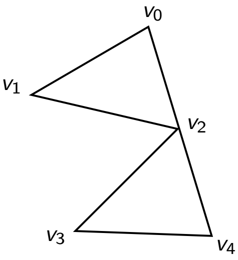
Polígonos

Teorema de Jordan: Toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva.

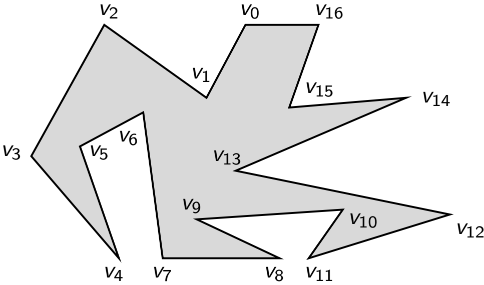
Polígonos

Teorema de Jordan: Toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva.

Polígono: a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples.



curva poligonal fechada não-simples



polígono

Problema

δP: fronteira do polígono P

Note que $\delta P \subseteq P$.

Problema

δP: fronteira do polígono P

Note que $\delta P \subseteq P$.

Pontos p e q de P vêem ou enxergam um ao outro
se o segmento pq está inteiramente contido em P.
Ademais, p e q se vêem claramente se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Problema

δP: fronteira do polígono P

Note que $\delta P \subseteq P$.

Pontos p e q de P vêem ou enxergam um ao outro
se o segmento pq está inteiramente contido em P.
Ademais, p e q se vêem claramente se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Guarda: um ponto de P

Um conjunto de guardas cobre ou guarda P se
todo ponto de P pode ser visto por um dos guardas do conjunto.

Problema

δP: fronteira do polígono P

Note que $\delta P \subseteq P$.

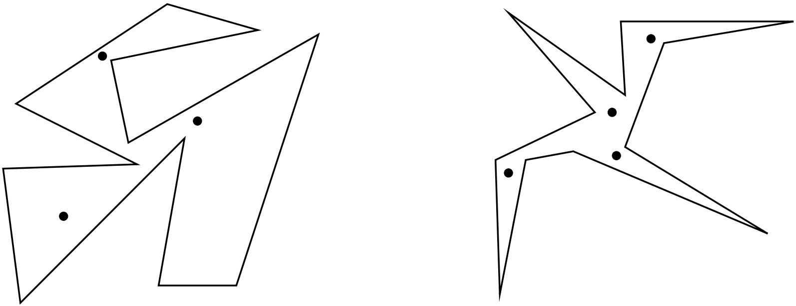
Pontos p e q de P vêem ou enxergam um ao outro
se o segmento pq está inteiramente contido em P.
Ademais, p e q se vêem claramente se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Guarda: um ponto de P

Um conjunto de guardas cobre ou guarda P se
todo ponto de P pode ser visto por um dos guardas do conjunto.

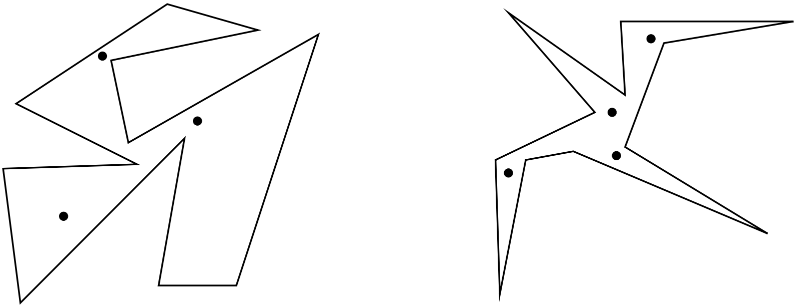
Problema: Dado n, determinar, como função de n, o número mínimo de guardas suficientes para cobrir um polígono arbitrário com n vértices.

Exemplo



Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

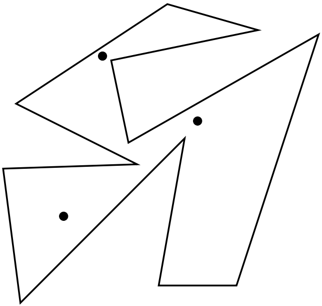
Exemplo

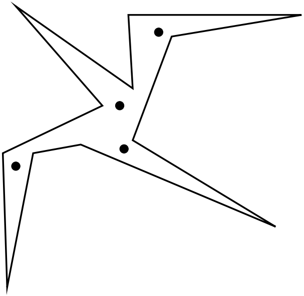


Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

É possível usarmos menos guardas?

Exemplo





Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

É possível usarmos menos guardas?

Há polígono de 12 vértices que precise de mais guardas?

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) : P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) : P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) : P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

Fácil: $G(n) \leq n$ (como prova?)

(O que acontece no $\mathbb{R}^3$?)

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) : P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

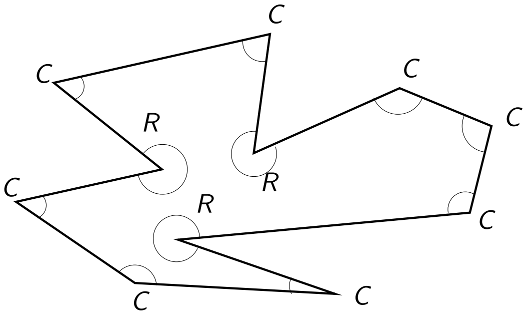
Fácil: $G(n) \leq n$ (como prova?)

(O que acontece no $\mathbb{R}^3$?)

$G(3) = 1$ pois todo polígono convexo pode ser coberto
por um único guarda e todo triângulo é convexo.

Vértices convexos e reflexos

Um vértice é reflexo (ou côncavo) se o seu ângulo interior é maior do que π. É convexo caso contrário.



Um polígono e seus vértices reflexos (R) e convexos (C).

Outros valores de $G(n)$

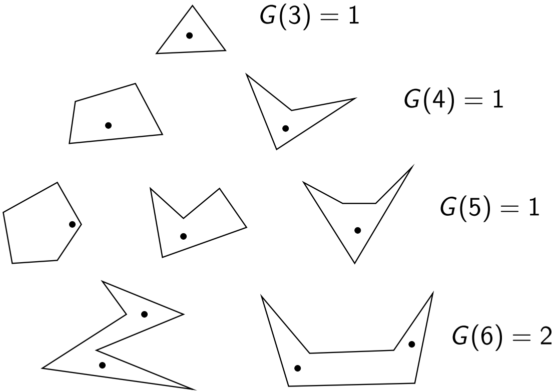
Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.
Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.

Outros valores de $G(n)$

Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.
Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.
Polígonos de 5 vértices podem ter até 2 vértices reflexos.
Ainda assim, pode-se verificar que $G(5) = 1$.

Outros valores de $G(n)$

Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.
Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.
Polígonos de 5 vértices podem ter até 2 vértices reflexos.
Ainda assim, pode-se verificar que $G(5) = 1$.
Para alguns polígonos de 6 vértices: dois guardas.

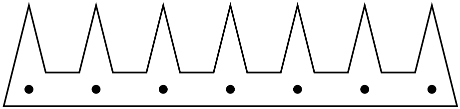


Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

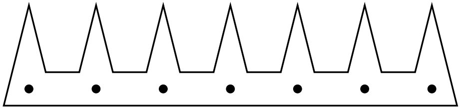
Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.



Exemplo onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.



Exemplo onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

Primeira prova: Chvátal

Prova que veremos: Fisk

Ingredientes:
triangulação de polígonos e coloração de grafos

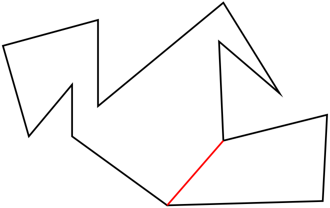
Triangulação de polígonos

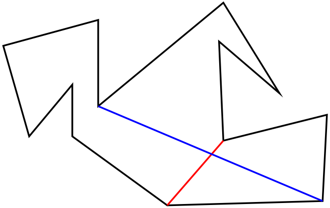
Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Triangulação de polígonos

Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

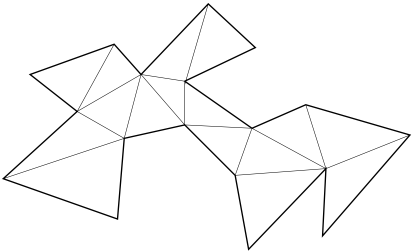
Diagonais uv e wz distintas de P se cruzam se $uv \cap wz \not\subseteq \{u, v, w, z\}$.





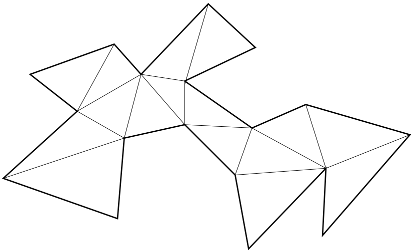
Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

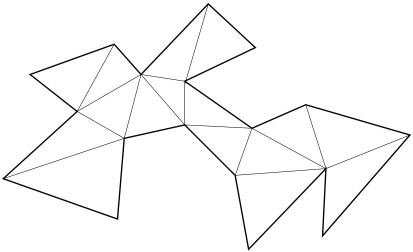
Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma *k-coloração* (ou é *k-colorível*) se existe uma função $c : V \to \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono $\qquad$ T: triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
$uv \in E$ sse uv está em T

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k-coloração (ou é k-colorível) se existe uma função $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E.

P: polígono

T: triangulação de P

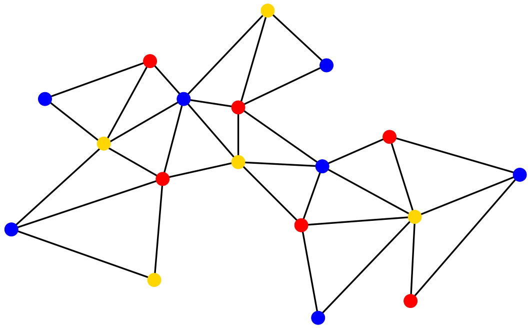
$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
$uv \in E$ sse uv está em T

G_T é um grafo outerplanar
(planar com todos os vértices na face externa)

Teorema 2 (Coloração de grafos de triagulação):
Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P.
Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração de grafos

Teorema 2 (Coloração de grafos de triagulação):
Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P.
Então G_T tem uma 3-coloração.



Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo Teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo Teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo Teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo Teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo Teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto.
Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte:
Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

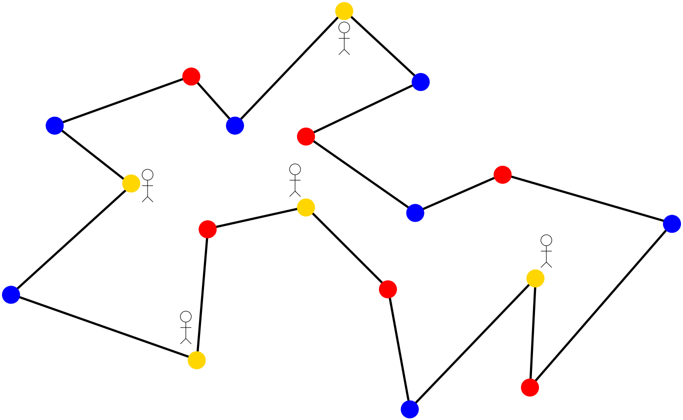
Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo Teorema 1, existe uma triangulação T de P.

Pelo Teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto.
Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P.

Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. $\square$

Exemplo



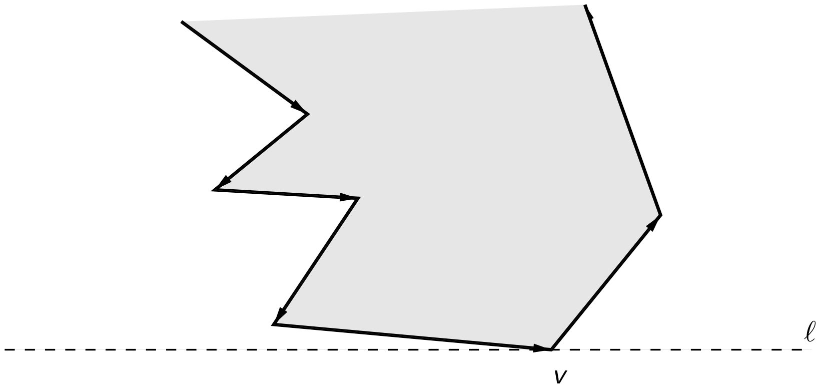
Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula.)



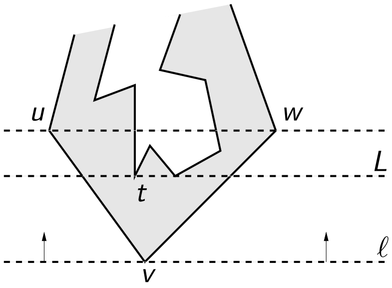
Teoria de triangulação

Lema (Meister):
Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister):
Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



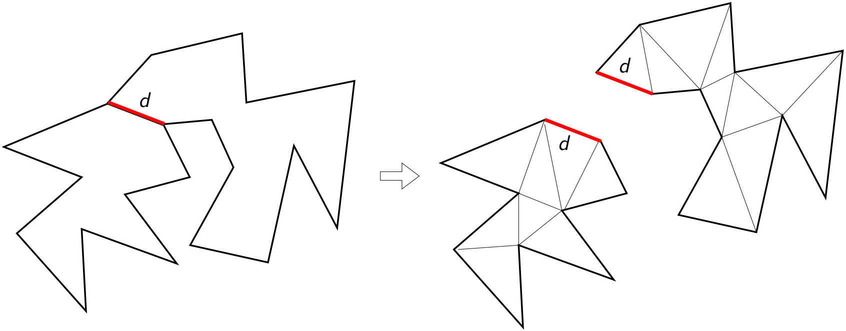
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação):
Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação):
Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação):
Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação):
Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n-2$ triângulos através da inclusão de $n-3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação):
Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.

Prova: Consequência direta do Teorema da Triangulação.