Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP
http://www.ime.usp.br/~cris/

primeiro semestre de 2022

Introdução

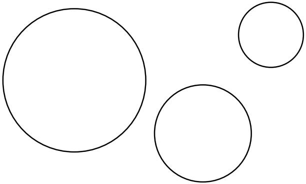
Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)

Introdução

Antiguidade:

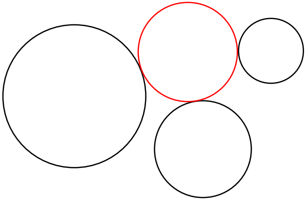
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Introdução

Antiguidade:

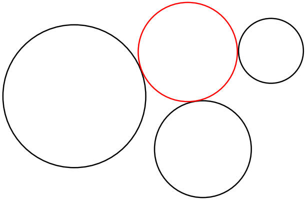
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Introdução

Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)

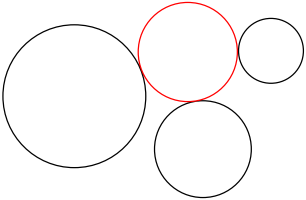


Solução de Euclides: 508 operações "elementares"

Introdução

Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Solução de Euclides: 508 operações "elementares"

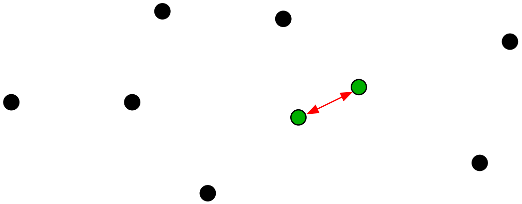
Solução de Lemoine (1902): menos de 200 operações

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

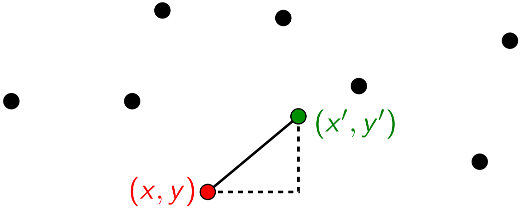
Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



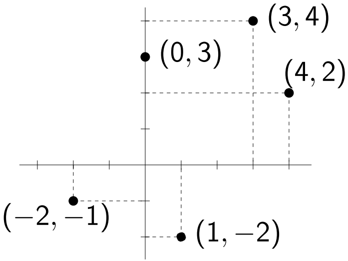
Lembre-se que, para dois pontos (x, y) e (x', y') no plano,

$$\text{Dist}(x, y, x', y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.

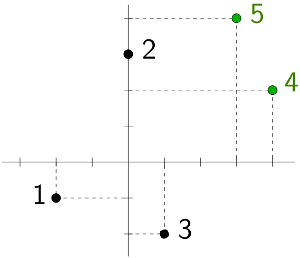


	1	2	3	4	5
X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.



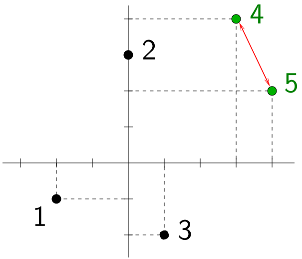
X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Saída: índices i e j indicando
dois pontos à distância mínima.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por vetores $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$.



	1	2	3	4	5
X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2

Saída: menor distância entre dois pontos da coleção.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1 \mathinner{.\,.} n]$ e $Y[1 \mathinner{.\,.} n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

Elementar(X, Y, n)

$d \leftarrow +\infty$
para $i \leftarrow 2$ até n faça
    para $j \leftarrow 1$ até $i - 1$ faça
        se Dist$(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d$
            então $d \leftarrow$ Dist$(X[i], Y[i], X[j], Y[j])$
devolva d

Algoritmo elementar

Elementar(X, Y, n)
$d \leftarrow +\infty$
para $i \leftarrow 2$ até n faça
    para $j \leftarrow 1$ até $i - 1$ faça
        se Dist($X[i], Y[i], X[j], Y[j]$) $< d$
            então $d \leftarrow$ Dist($X[i], Y[i], X[j], Y[j]$)
devolva d

Algoritmo elementar

Elementar(X, Y, n)

$d \leftarrow +\infty$
para $i \leftarrow 2$ até n faça
    para $j \leftarrow 1$ até $i-1$ faça
        se Dist$(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d$
            então $d \leftarrow$ Dist$(X[i], Y[i], X[j], Y[j])$
devolva d

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Algoritmo elementar

```
Elementar(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1 \mathinner{.\,.} i-1]$, $Y[1 \mathinner{.\,.} i-1]$.

Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

Algoritmo elementar

```
Elementar(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre
os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

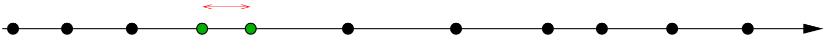
Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2).$$

É possível projetar um algoritmo mais eficiente que este?

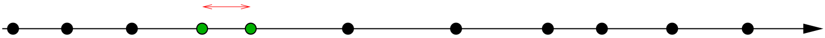
Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.

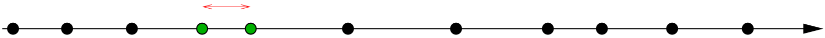


Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Problema com essa solução:

não sei como generalizá-la para o plano...

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

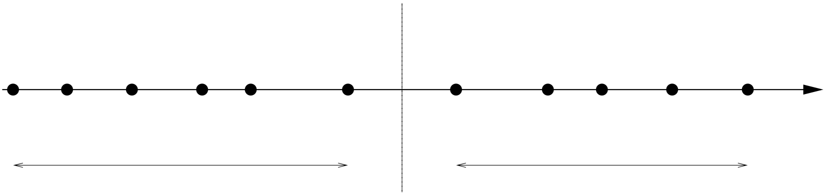
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



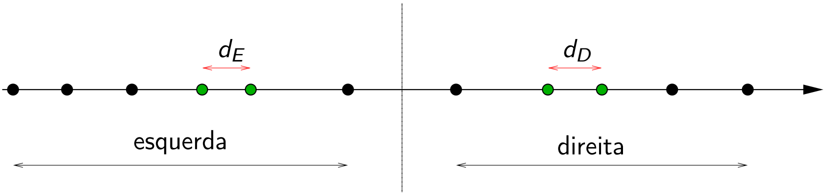
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



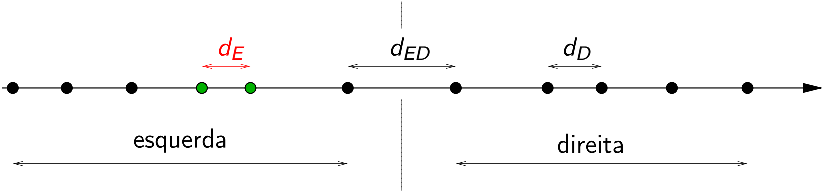
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)

1 MergeSort(X, 1, n)

2 devolva DistânciaRetaRec (X, 1, n)

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)
1 MergeSort($X, 1, n$)
2 devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

DistânciaRetaRec: divisão e conquista.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)
1 MergeSort($X, 1, n$)
2 devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

DistânciaRetaRec: divisão e conquista.

Tempo consumido pelo DistânciaReta:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DistânciaRetaRec.

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $p = r$ $\triangleright$ só um ponto

    então devolva $+\infty$

    senão $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$

        $d_E \leftarrow$ DistânciaRetaRec(X, p, q)

        $d_D \leftarrow$ DistânciaRetaRec$(X, q+1, r)$

        $d \leftarrow \min\{d_E, d_D, X[q+1] - X[q]\}$

        devolva d

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $p = r$ $\triangleright$ só um ponto

  então devolva $+\infty$

  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

    $d_E \leftarrow$ DistânciaRetaRec(X, p, q)

    $d_D \leftarrow$ DistânciaRetaRec$(X, q + 1, r)$

    $d \leftarrow \min\{d_E, d_D, X[q+1] - X[q]\}$

    devolva d

Consumo de tempo:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$.

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) ▷ Divisão e conquista

se $p = r$ ▷ só um ponto

    então devolva $+\infty$

    senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

        $d_E \leftarrow$ DistânciaRetaRec(X, p, q)

        $d_D \leftarrow$ DistânciaRetaRec$(X, q + 1, r)$

        $d \leftarrow \min\{d_E, d_D, X[q{+}1] - X[q]\}$

        devolva d

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) ▷ Divisão e conquista

se $p = r$ ▷ só um ponto
  então devolva $+\infty$
  senão $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
    $d_E \leftarrow$ DistânciaRetaRec(X, p, q)
    $d_D \leftarrow$ DistânciaRetaRec$(X, q+1, r)$
    $d \leftarrow \min\{d_E, d_D, X[q+1] - X[q]\}$
    devolva d

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1 MergeSort(X, 1, n)
2 devolva DistânciaRetaRec (X, 1, n)

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1 MergeSort($X, 1, n$)
2 devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

MergeSort consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DistânciaRetaRec consome tempo $\Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1 MergeSort($X, 1, n$)
2 devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

MergeSort consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DistânciaRetaRec consome tempo $\Theta(n)$.

Tempo consumido pelo DistânciaReta: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo no plano

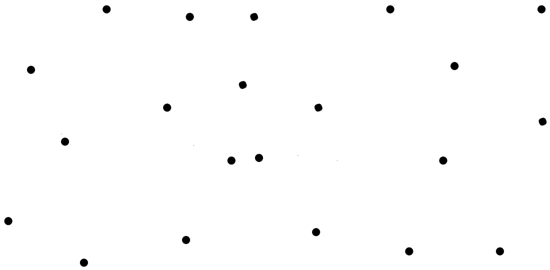
Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

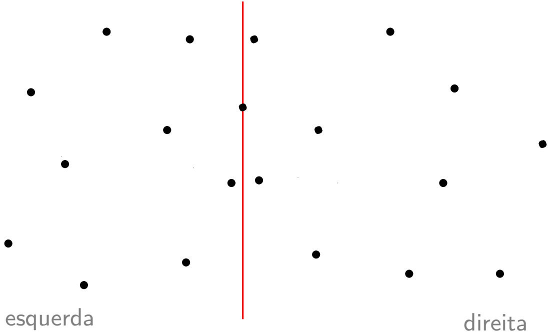


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide...

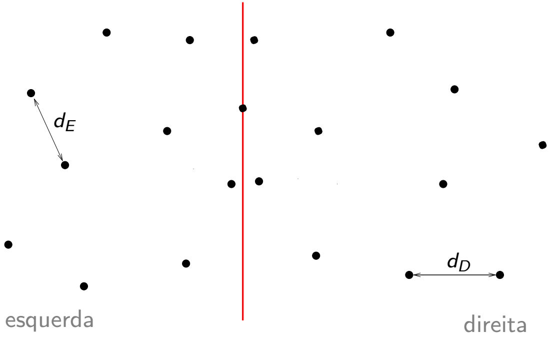


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista...

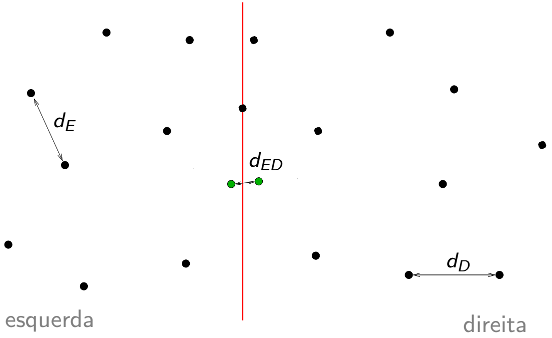


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista... Combina...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

```
Distância-SH(X, Y, n)
  MergeSort(X, Y, 1, n)
  devolva DistânciaRec-SH (X, Y, 1, n)
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Distância-SH(X, Y, n)
1 MergeSort($X, Y, 1, n$)
2 devolva DistânciaRec-SH ($X, Y, 1, n$)

Consumo de tempo:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DistânciaRec-SH.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q]$, $Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r]$, $Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p \,.\,.\, q]$, $Y[p \,.\,.\, q]$ (esquerda)
$X[q{+}1 \,.\,.\, r]$, $Y[q{+}1 \,.\,.\, r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,.\,.\,q]$, $Y[p\,.\,.\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,.\,.\,r]$, $Y[q{+}1\,.\,.\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\quad \triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
    então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
    senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
        $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
        $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q{+}1, r)$
        devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)        ▷ Divisão e conquista
se r ≤ p + 2
    então  ▷ resolva o problema diretamente
    senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
           d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
           d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
           devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
  então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
    $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
    $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q{+}1, r)$
    devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
se r ≤ p + 2
    então ▷ resolva o problema diretamente
    senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
          d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
          d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
          devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\quad\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
  então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
    $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
    $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q{+}1, r)$
    devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

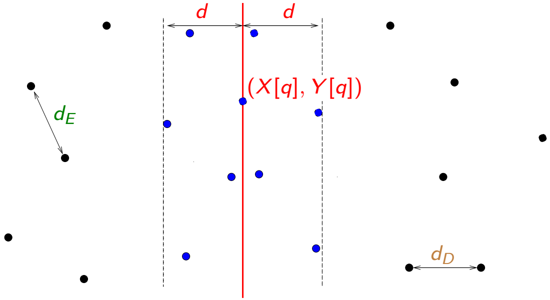
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

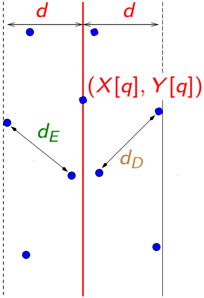
Combine precisa considerar apenas
pontos que estão a uma distância menor que
$d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Combine precisa considerar apenas
pontos que estão a uma distância menor que
$d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Infelizmente todos os pontos podem estar nesta faixa...

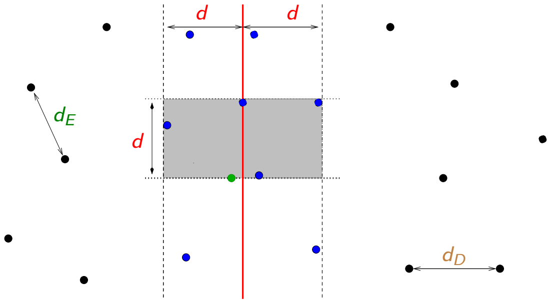
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

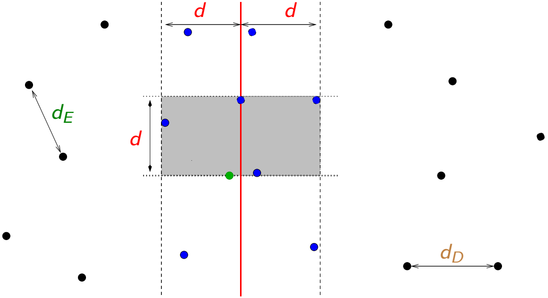
Ideia...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

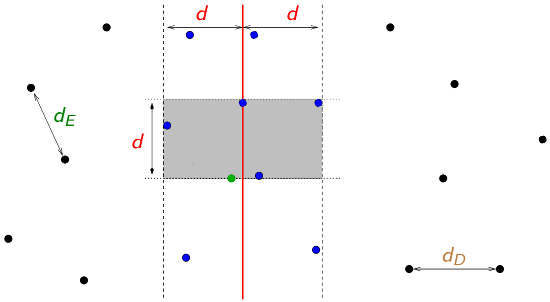
Ideia...



Para cada ponto na faixa, olhamos apenas para pontos da faixa que tenham Y-coordenada no máximo d mais que este ponto.

Algoritmo de Shamos e Hoey

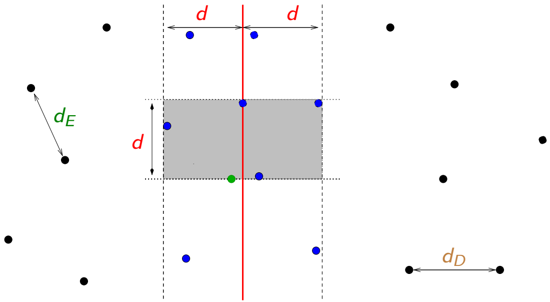
Como fazer o Combine linear?



Quantos pontos assim há?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

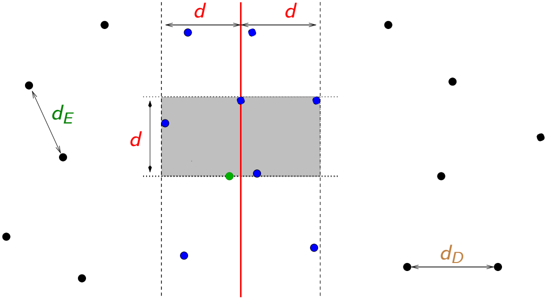


Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?



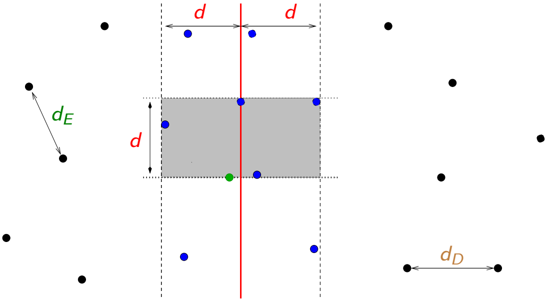
Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Logo há não mais que 7 pontos assim (excluindo o ponto).

Algoritmo de Shamos e Hoey

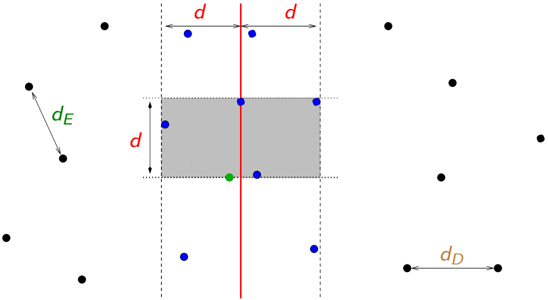
Como fazer o Combine linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

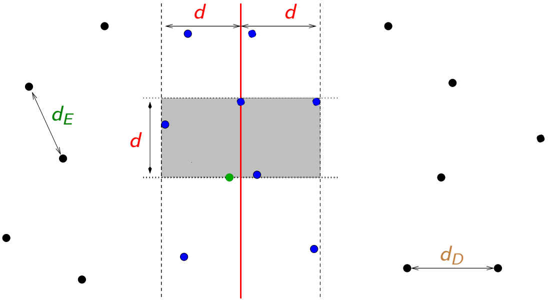


Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No Combine, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No Combine, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Façamos o DistânciaRec-SH devolver os pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas!

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p \mathinner{.\,.} q]$, $Y[p \mathinner{.\,.} q]$ (esquerda)
$X[q{+}1 \mathinner{.\,.} r]$, $Y[q{+}1 \mathinner{.\,.} r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita, e reorganize os pontos para que estejam ordenados por suas Y-coordenadas.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
    então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
    senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ $\quad x_f \leftarrow X[q]$
        $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
        $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q + 1, r)$
        Intercale (Y, X, p, q, r)
        devolva Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$

  então $\triangleright$ resolva o problema diretamente

  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ $x_f \leftarrow X[q]$

    $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)

    $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q + 1, r)$

    Intercale (Y, X, p, q, r)

    devolva Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

Não se esqueça de ordenar na base!

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
    então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
    senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ $x_f \leftarrow X[q]$
        $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
        $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q + 1, r)$
        Intercale (Y, X, p, q, r)
        devolva Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

Não se esqueça de ordenar na base!

Intercale e Combine são algoritmos lineares.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) $\triangleright$ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
    então $\triangleright$ resolva o problema diretamente
    senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ $\quad x_f \leftarrow X[q]$
            $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
            $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q + 1, r)$
            Intercale (Y, X, p, q, r)
            devolva Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

Não se esqueça de ordenar na base!

Intercale e Combine são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

se $r \leq p + 2$
  então ▷ resolva o problema diretamente
  senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$ $x_f \leftarrow X[q]$
    $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
    $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q + 1, r)$
    Intercale (Y, X, p, q, r)
    devolva Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

Não se esqueça de ordenar na base!

Intercale e Combine são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Como antes, $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

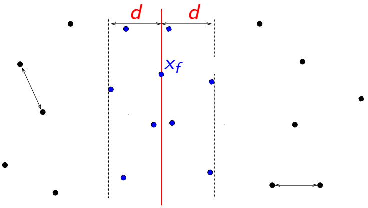
A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```



Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, p, r, d, x_f)

$t \leftarrow 0$
para $k \leftarrow p$ até r faça
    se $|X[k] - x_f| < d$
        então $t \leftarrow t + 1$
            $f[t] \leftarrow k$
devolva (f, t)

X	1	−2	4	0	3
Y	−2	−1	2	3	4
	1	2	3	4	5
f					

$x_f = 1$ $\quad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, p, r, d, x_f)

```
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```

	1	2	3	4	5
X	1	−2	4	0	3
Y	−2	−1	2	3	4
f	1	4	5		

$x_f = 1 \qquad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

```
Candidatos (X, p, r, d, x_f)
t ← 0
para k ← p até r faça
    se |X[k] − x_f| < d
        então t ← t + 1
              f[t] ← k
devolva (f, t)
```

	1	2	3	4	5
X	1	-2	4	0	3
Y	-2	-1	2	3	4

f	1	4	5

$x_f = 1$ $\quad d = \sqrt{5}$

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Primeira versão do Combine:

```
Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)
d ← min{d_E, d_D}
(f, t) ← Candidatos (X, p, r, d, x_f)        ▷ pontos na faixa
para i ← 1 até t − 1 faça
    para j ← i + 1 até min{i + 7, t} faça    ▷ ≤ 7 próximos
        d' ← Dist(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
        se d' < d
            então d ← d'
devolva d
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

Primeira versão do Combine:

Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$
$d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
$(f, t) \leftarrow$ Candidatos (X, p, r, d, x_f) ▷ pontos na faixa
para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
    para $j \leftarrow i + 1$ até $\min\{i + 7, t\}$ faça ▷ ≤ 7 próximos
        $d' \leftarrow \text{Dist}(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
        se $d' < d$
            então $d \leftarrow d'$
devolva d

Consumo de tempo:
É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Segunda versão do Combine:

Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$
$d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
$(f, t) \leftarrow$ Candidatos (X, p, r, d, x_f) ▷ pontos na faixa
para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
    $j \leftarrow i + 1$
    enquanto $j \leq t$ e $Y[f[j]] - Y[f[i]] < d$ faça ▷ ≤ 7 próximos
        $d' \leftarrow \text{Dist}(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
        se $d' < d$
            então $d \leftarrow d'$
        $j \leftarrow j + 1$
devolva d

Algoritmo de Shamos e Hoey

Segunda versão do Combine:

Combine $(X, Y, p, r, d_E, d_D, x_f)$

$d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
$(f, t) \leftarrow$ Candidatos (X, p, r, d, x_f) $\quad \triangleright$ pontos na faixa
para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
    $j \leftarrow i + 1$
    enquanto $j \leq t$ e $Y[f[j]] - Y[f[i]] < d$ faça $\quad \triangleright \leq 7$ próximos
        $d' \leftarrow \mathrm{Dist}(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
        se $d' < d$
            então $d \leftarrow d'$
        $j \leftarrow j + 1$
devolva d

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa de implementação:
UVA 10245 – The Closest Pair Problem
http://uva.onlinejudge.org/external/102/10245.pdf

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa de implementação:
UVA 10245 – The Closest Pair Problem
http://uva.onlinejudge.org/external/102/10245.pdf

Material coberto nas duas primeiras aulas:
Secs 7.1 – 7.3 do livro das JAI.

Exercícios

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa de implementação:
UVA 10245 – The Closest Pair Problem
http://uva.onlinejudge.org/external/102/10245.pdf

Material coberto nas duas primeiras aulas:
Secs 7.1 – 7.3 do livro das JAI.

Agora, vamos ver uma animação deste algoritmo!