

Aula 19

Fecho convexo: mergehull

Secs 3.6 e 3.8 do livro do O'Rourke e
Sec 3.2 do livro de Preparata e Shamos.

Combinação convexa

P : coleção de pontos do plano, dada por $X[1..n], Y[1..n]$.

Combinação convexa de pontos de P : soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_j \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P :

conjunto de combinações convexas de pontos de P , ou seja,

$$\text{conv}(P) := \{ \alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_j \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)} \}.$$

Combinação convexa

P : coleção de pontos do plano, dada por $X[1..n], Y[1..n]$.

Combinação convexa de pontos de P : soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P :

conjunto de combinações convexas de pontos de P , ou seja,

$$\text{conv}(P) := \{ \alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, n) \}.$$

Problema: Dada uma coleção P de pontos do plano, determinar o fecho convexo de P .

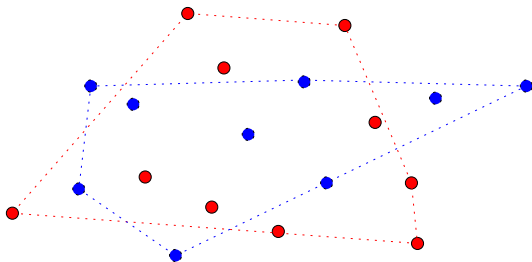
Mergehull: divisão e conquista

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Mergehull: divisão e conquista

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

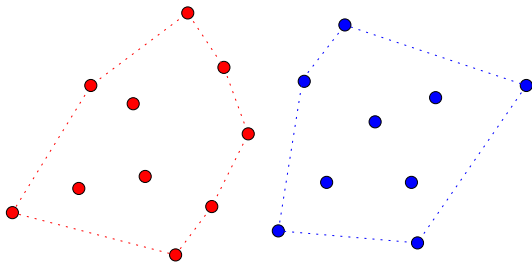
Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou...



Mergehull: divisão e conquista

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

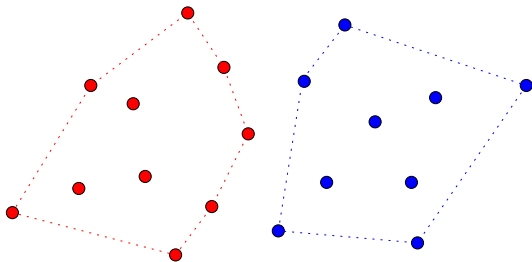
Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou... depois de ordená-la pela X -coordenada dos pontos.



Mergehull: divisão e conquista

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou... depois de ordená-la pela X -coordenada dos pontos.



Vamos discutir a segunda implementação, em que a fase de juntar as soluções é mais simples.

Mergehull

MergeHull (X, Y, n)

- 1 MergeSort (X, Y, n) ▷ ordena por X -coordenada
- 2 devolva MergeHullRec ($X, Y, 1, n$)

Mergehull

MergeHull (X, Y, n)

- 1 MergeSort (X, Y, n) ▷ ordena por X -coordenada
- 2 devolva MergeHullRec ($X, Y, 1, n$)

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n) + T(n)$,
onde $T(n)$ é o tempo consumido por MergeHullRec ($X, Y, 1, n$).

Miolo recursivo do Mergehull

MergeHullRec (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Miolo recursivo do Mergehull

MergeHullRec (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do

$\text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$, então...

Miolo recursivo do Mergehull

MergeHullRec (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do

$\text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$, então...

Consumo de tempo do MergeHullRec:

$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$, onde $n = r - p + 1$.

Miolo recursivo do Mergehull

MergeHullRec (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MergeHullRec}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do

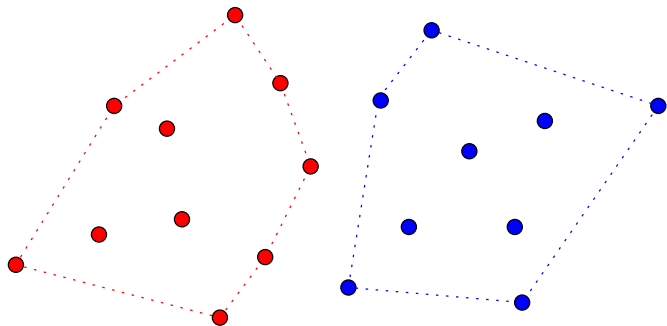
$\text{JuntaHull}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$, então...

Consumo de tempo do MergeHullRec:

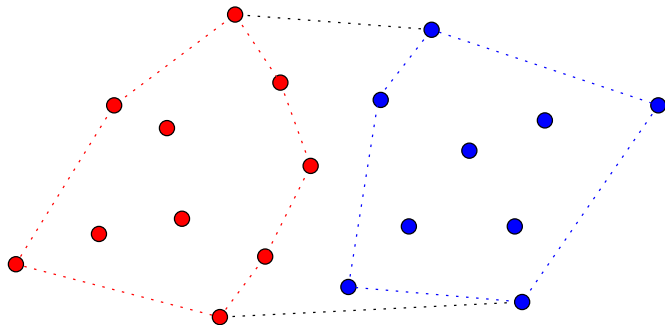
$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$, onde $n = r - p + 1$.

A solução de tal recorrência é $T(n) = O(n \lg n)$.

Como juntar o fecho de duas coleções?

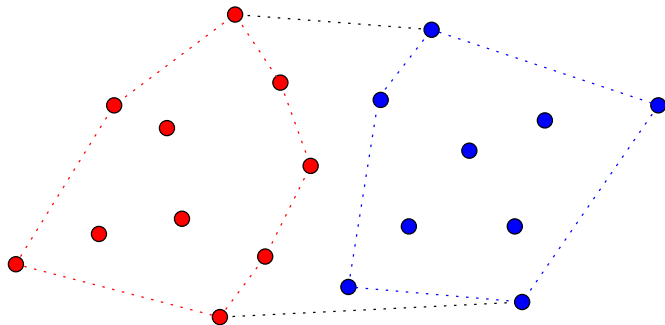


Como juntar o fecho de duas coleções?



Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Como juntar o fecho de duas coleções?

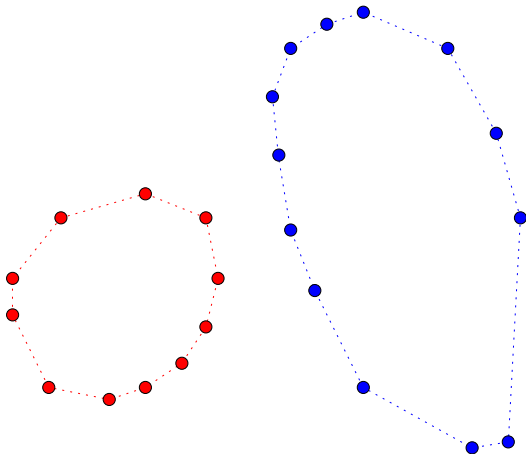


Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Hipótese simplificadora: não há três pontos colineares nem dois pontos com a mesma X -coordenada.

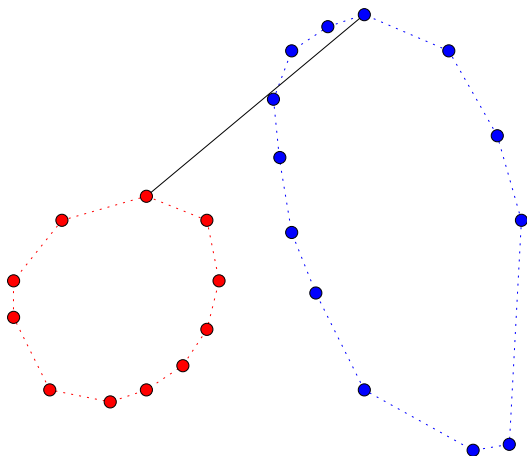
Como juntar o fecho de duas coleções?

Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

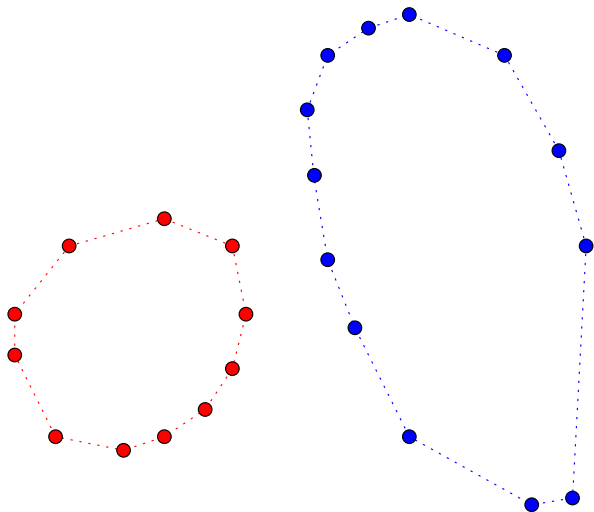


Como juntar o fecho de duas coleções?

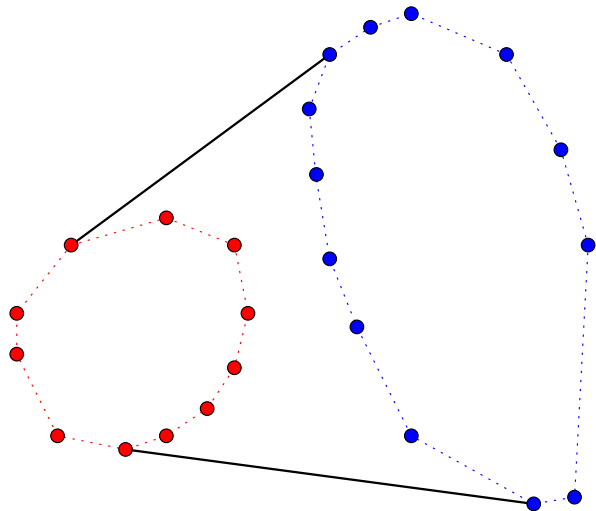
Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos? Não...



Como juntar o fecho de duas coleções?

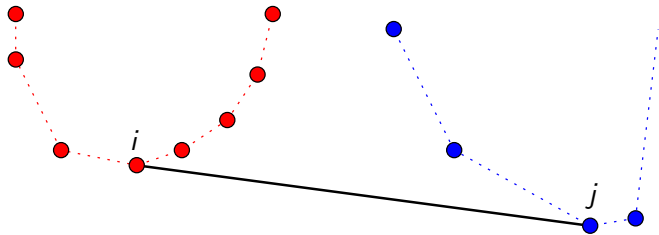


Como juntar o fecho de duas coleções?



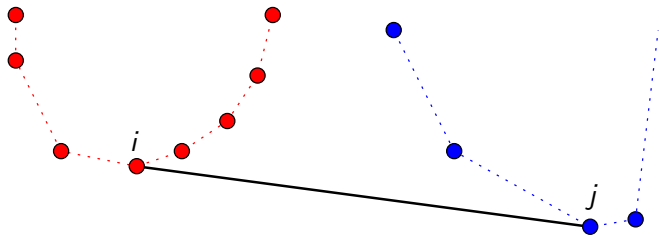
Basta encontrar a **tangente inferior** e a **tangente superior**.

Tangente inferior



O par (i, j)

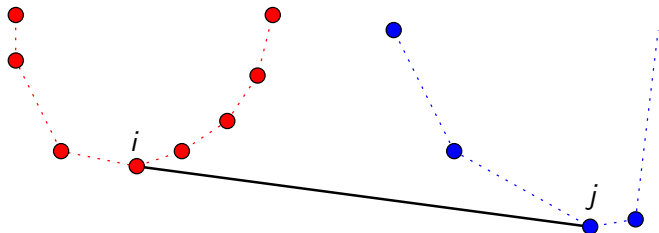
Tangente inferior



O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se

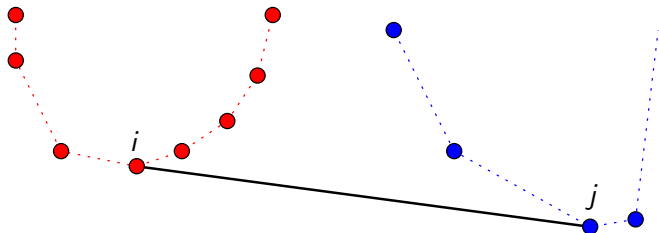
Tangente inferior



O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

Tangente inferior

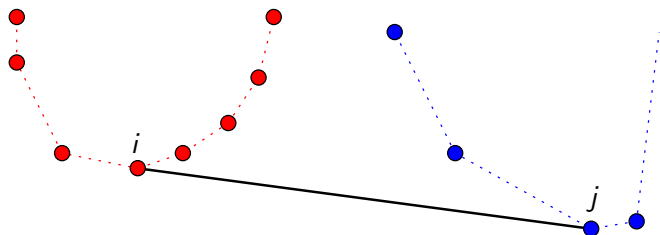


O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se

Tangente inferior

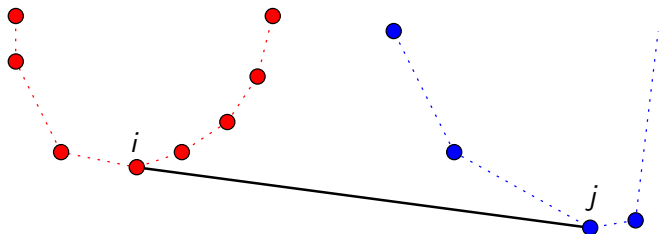


O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

Tangente inferior



O par (i, j)

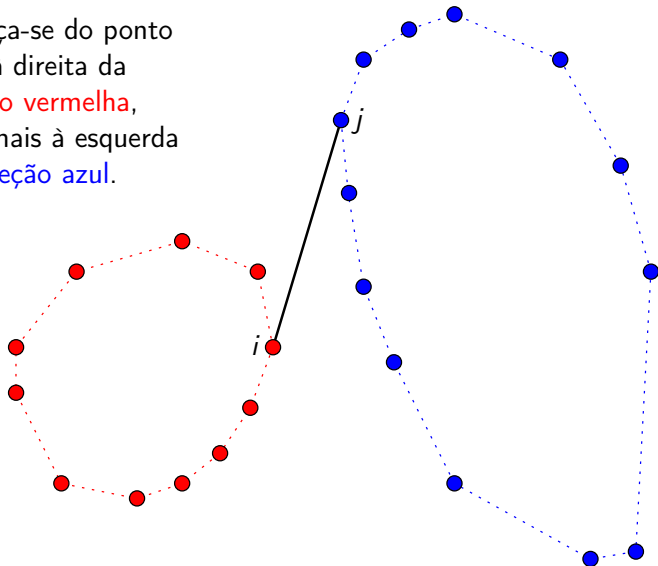
é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** se for os dois acima.

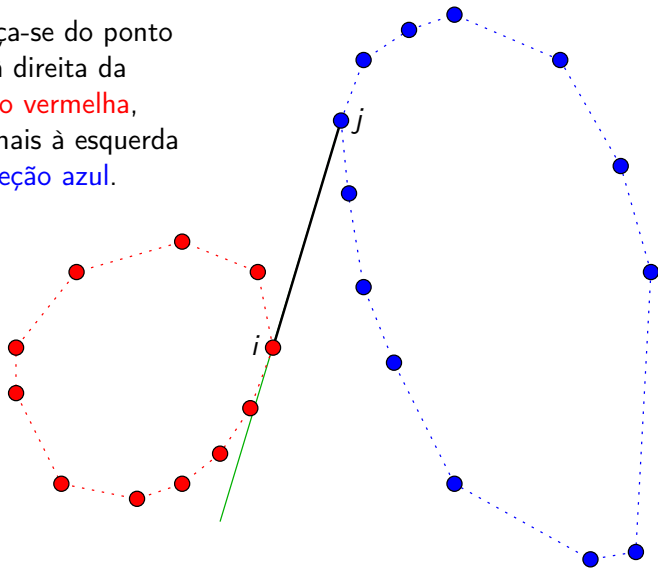
Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto
mais à direita da
coleção vermelha,
e do mais à esquerda
da **coleção azul**.



Como encontrar a tangente inferior?

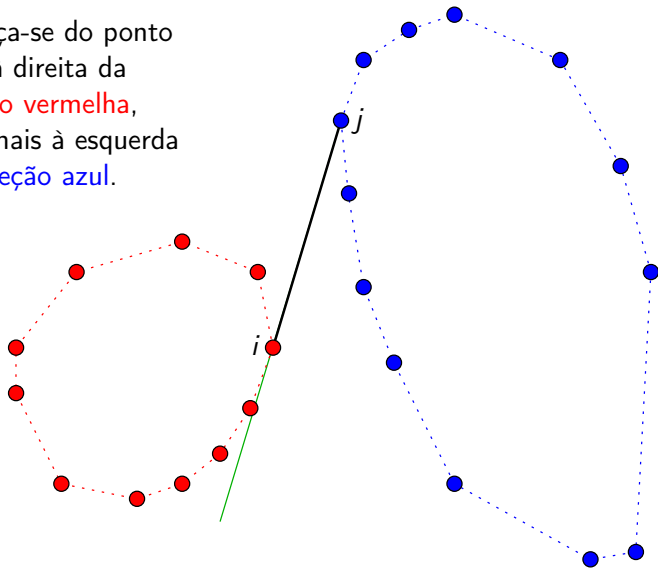
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**?

Como encontrar a tangente inferior?

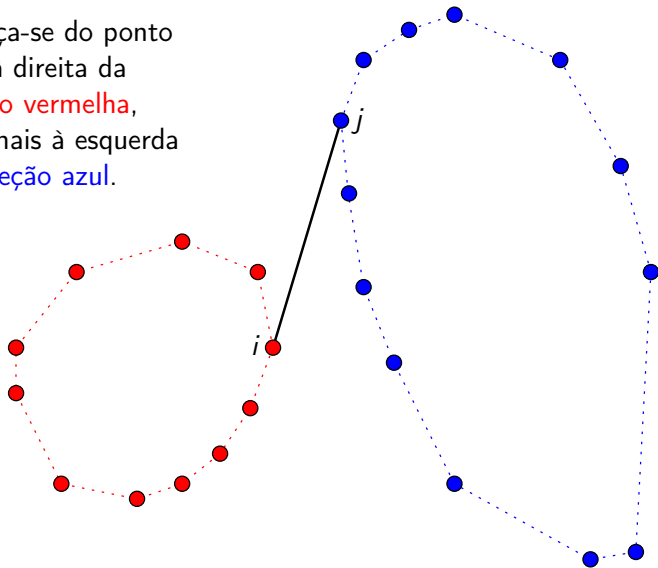
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

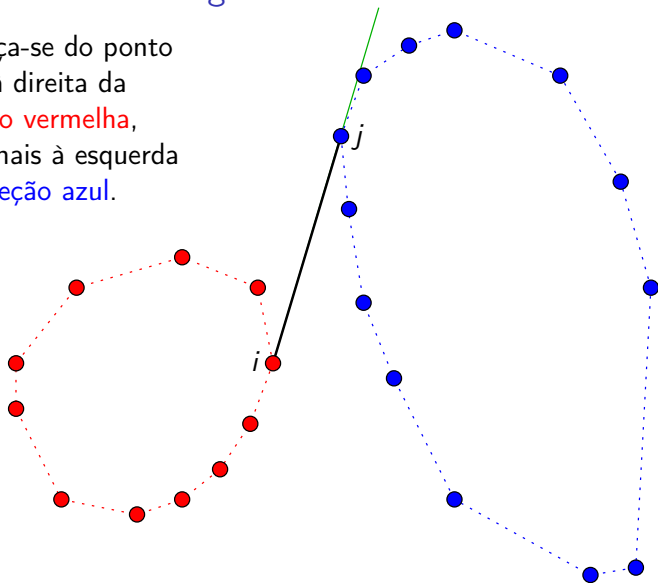
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**?

Como encontrar a tangente inferior?

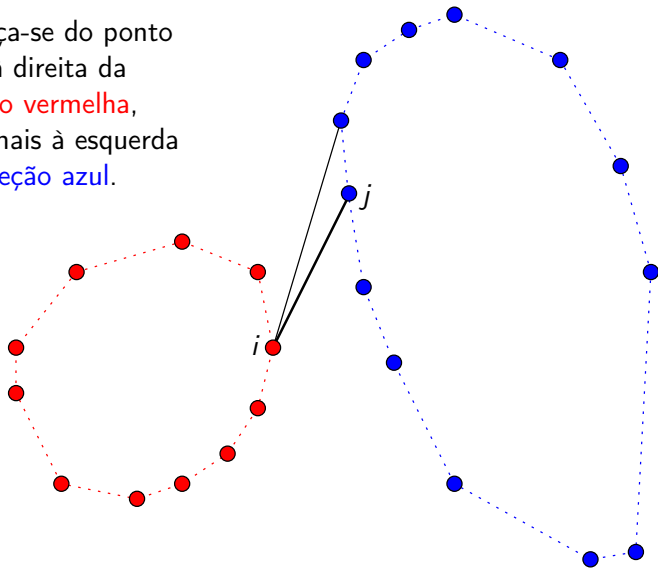
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente *inferior* da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

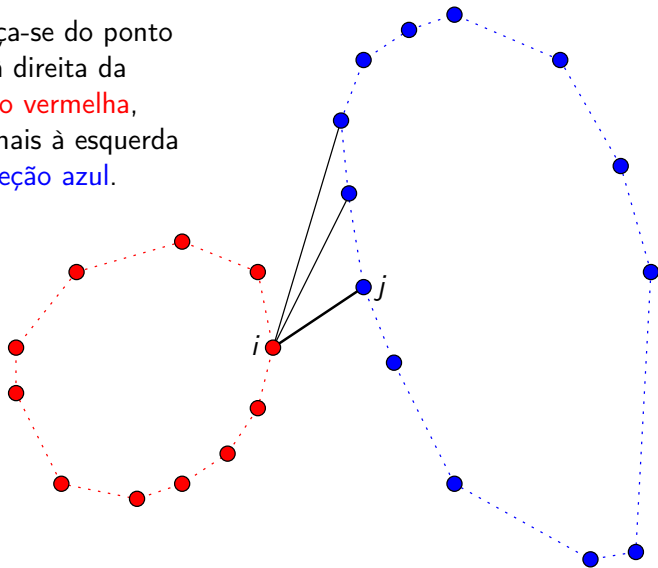
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

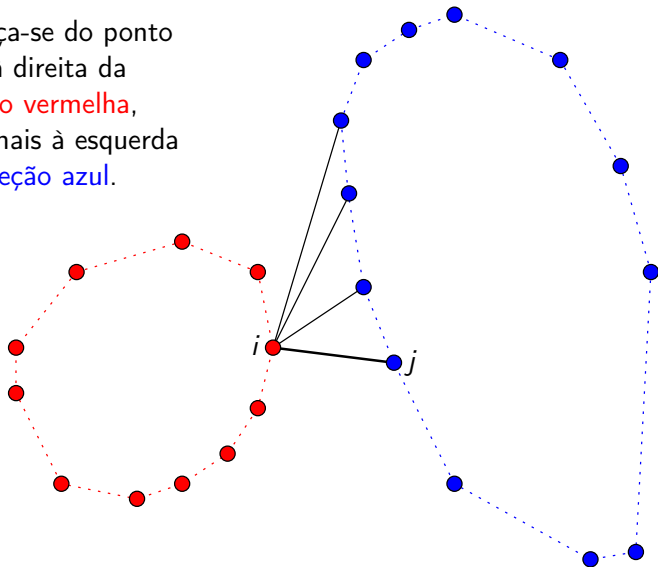
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

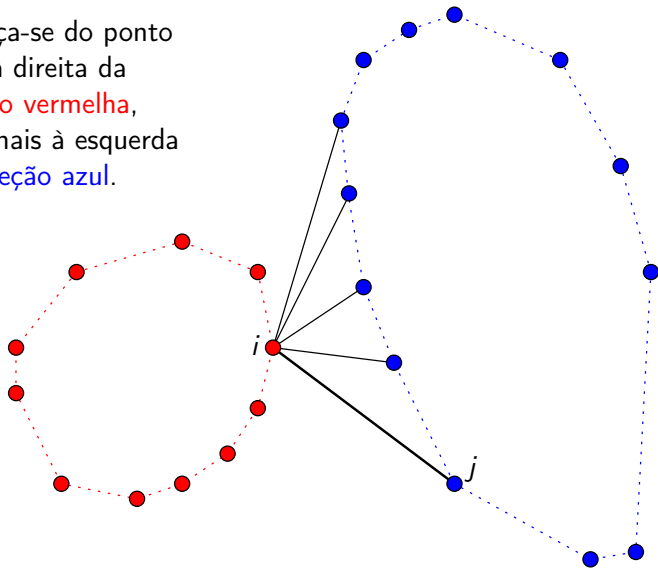
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

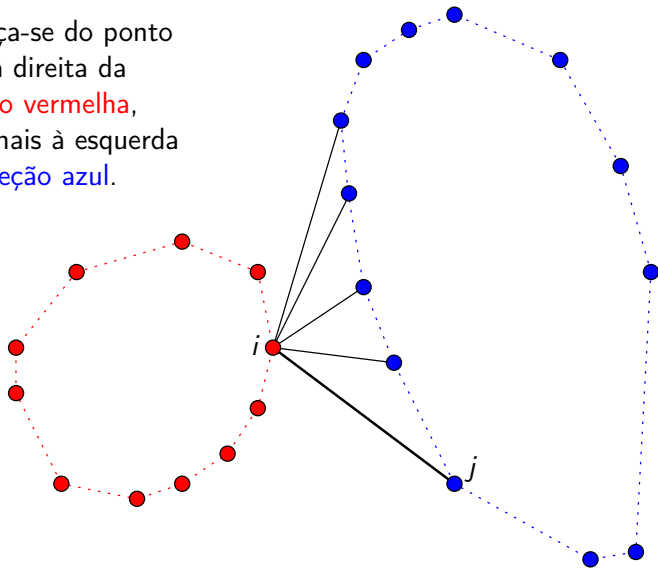
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

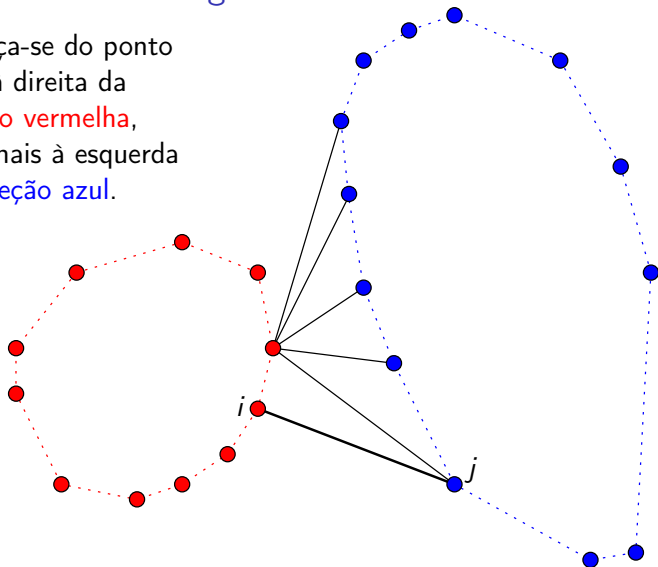
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

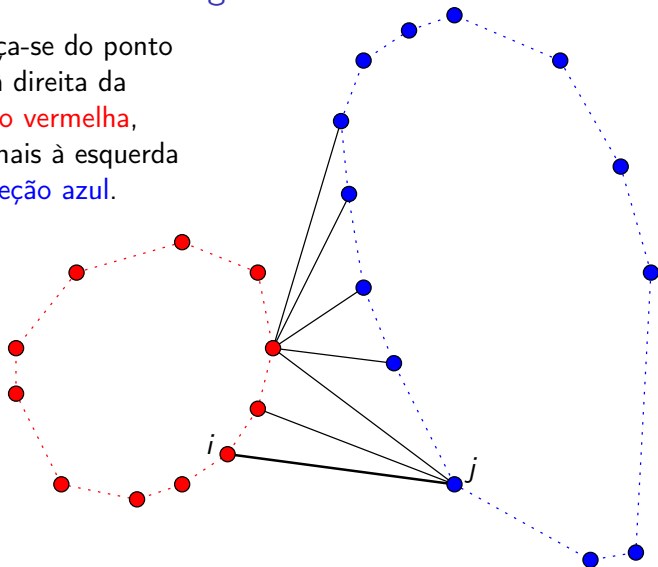
Começa-se do ponto
mais à direita da
coleção vermelha,
e do mais à esquerda
da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

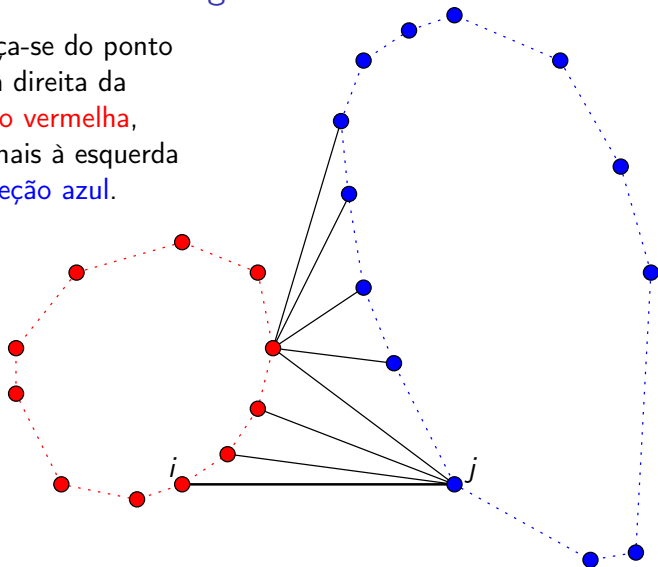
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

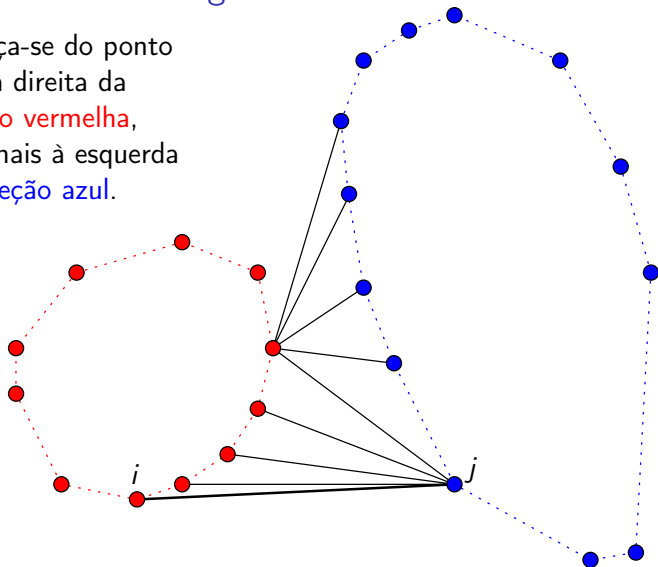
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

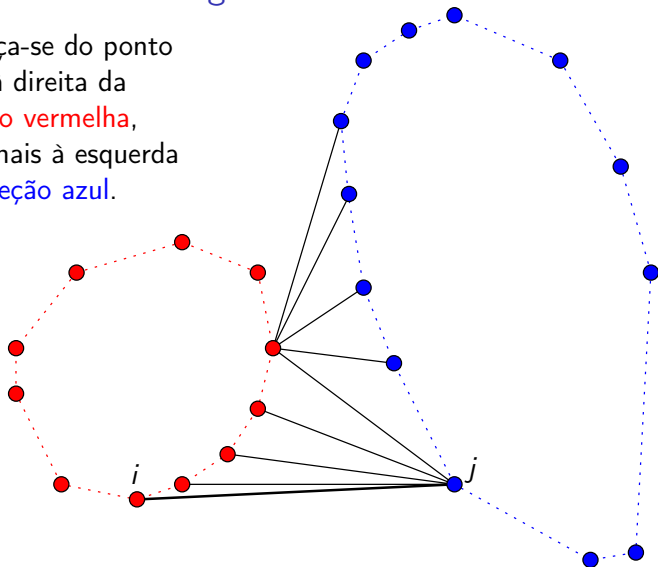
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção vermelha? Sim!

Como encontrar a tangente inferior?

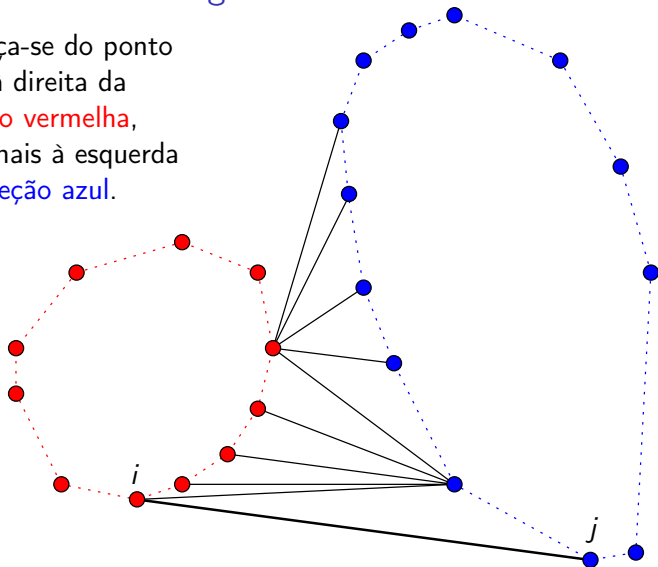
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

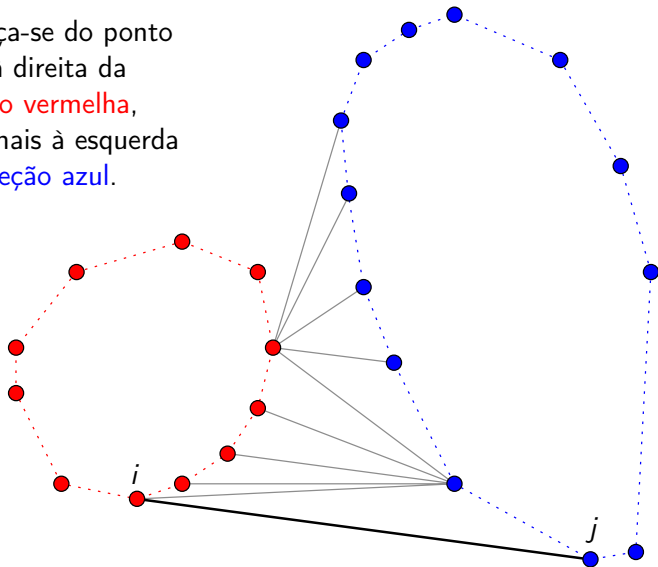
Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior da coleção azul? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto mais à direita da coleção vermelha, e do mais à esquerda da coleção azul.



É tangente inferior!

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X , Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X , Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TangentelInferior (X , Y , H_1 , h_1 , H_2 , h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ vermelho mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ azul mais à esquerda
- 3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça
- 4 enquanto (i, j) não é tangente inferior da **coleção vermelha** faça
- 5 $i \leftarrow i - 1$
- 6 enquanto (i, j) não é tangente inferior da **coleção azul** faça
- 7 $j \leftarrow j + 1$
- 8 devolva (i, j)

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TangenteInferior $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright vermelho mais à direita

2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright azul mais à esquerda

3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça

4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i+1]$) faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

5 $i \leftarrow i-1$

6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1]$)
ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

7 $j \leftarrow j+1$

8 devolva (i, j)

Simplificação

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TangenteInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright vermelho mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright azul mais à esquerda
- 3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça
- 4 enquanto $\operatorname{Dir}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça
 - \triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto $\operatorname{Dir}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
 - \triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

Tangente inferior?

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TangenteInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda
- 3 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
 ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
 ▷ enquanto não é tangente inferior faça
- 4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$) faça
 ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1]$) faça
 ▷ enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

Tangente inferior?

TangenteInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright mais à esquerda
- 3 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
 ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$) faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Tangente inferior?

TangenteInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda
- 3 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
 ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$) faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

Tangente inferior?

TangentelInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda
- 3 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
 ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$) faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

E ele termina?

Correção do algoritmo

Pergunta: $\text{TangenteInferior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Correção do algoritmo

Pergunta: $\text{TangenteInferior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Correção do algoritmo

Pergunta: TangenteInferior(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$

(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)

e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Correção do algoritmo

Pergunta: TangenteInferior(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$

(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)

e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b , ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b , ele não é mais incrementado.

Correção do algoritmo

Pergunta: TangenteInferior(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b , ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b , ele não é mais incrementado.

Assim TangenteInferior(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina.

Tangente inferior

TangentelInferior (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

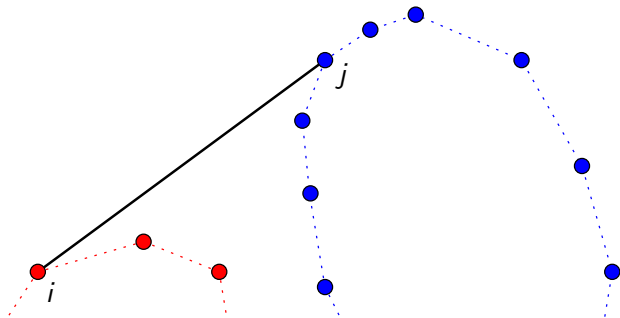
- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ ▷ mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ ▷ mais à esquerda
- 3 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$)
 ou Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 4 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$) faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto Dir($X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$) faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Ele termina e produz a resposta correta.

Consumo de tempo: $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

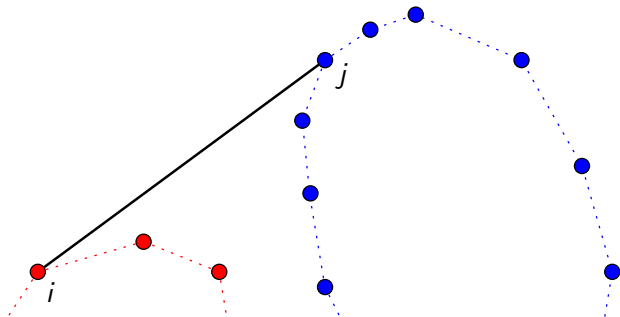
Tangente superior



O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

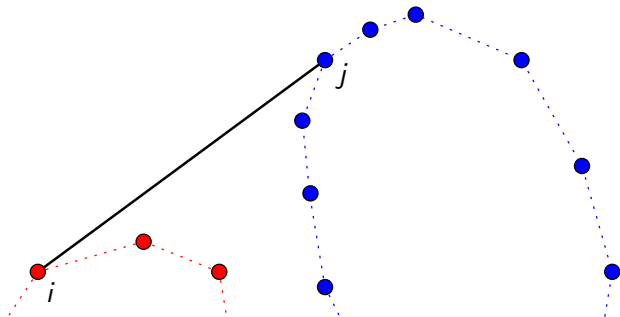
Tangente superior



O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,
é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

Tangente superior



O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,
é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,
é uma **tangente superior** se for os dois acima.

Tangente superior

O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** se for os dois acima.

Exercício: Escreva a rotina

TangenteSuperior $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$,

que recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente superior (i, j) dos dois fechos.

Sua rotina deve consumir tempo $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JuntaHull (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $(i_b, j_b) \leftarrow \text{TangenteInferior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 2 $(i_t, j_t) \leftarrow \text{TangenteSuperior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 3 $h \leftarrow 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i_t]$
- 4 $i \leftarrow i_t + 1$
- 5 enquanto $H[h] \neq H_1[i_b]$ faça
- 6 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i] \quad i \leftarrow i + 1$
- 7 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[b_b]$
- 8 $j \leftarrow j_b + 1$
- 9 enquanto $H[j] \neq H_2[j_t]$ faça
- 10 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[j] \quad j \leftarrow j + 1$
- 11 devolva (H, h)

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JuntaHull (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $(i_b, j_b) \leftarrow \text{TangenteInferior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 2 $(i_t, j_t) \leftarrow \text{TangenteSuperior}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 3 $h \leftarrow 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i_t]$
- 4 $i \leftarrow i_t + 1$
- 5 enquanto $H[h] \neq H_1[i_b]$ faça
- 6 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i] \quad i \leftarrow i + 1$
- 7 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[b_b]$
- 8 $j \leftarrow j_b + 1$
- 9 enquanto $H[j] \neq H_2[j_t]$ faça
- 10 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[j] \quad j \leftarrow j + 1$
- 11 devolva (H, h)

Consumo de tempo: $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Casos degenerados e resumo

Como tratar os casos degenerados?

Casos degenerados e resumo

Como tratar os casos degenerados?

Como tratar pontos com mesma X -coordenada no mergehull?

Casos degenerados e resumo

Como tratar os casos degenerados?

Como tratar pontos com mesma X -coordenada no mergehull?

Resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
Embrulho	$O(nh)$
Incremental	$O(n^2)$
Graham	$O(n \lg n)$
QuickHull	$O(nh)$
MergeHull	$O(n \lg n)$

Casos degenerados e resumo

Como tratar os casos degenerados?

Como tratar pontos com mesma X -coordenada no mergehull?

Resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
Embrulho	$O(nh)$
Incremental	$O(n^2)$
Graham	$O(n \lg n)$
QuickHull	$O(nh)$
MergeHull	$O(n \lg n)$

Um outro problema: par de pontos mais distantes

Vamos ver as animações???