

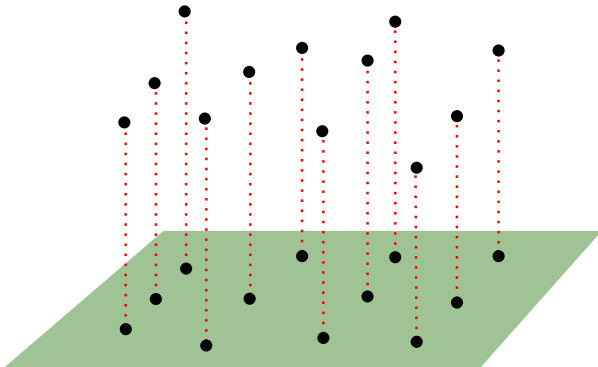
## Aula 14

### Triangulação de Delaunay

Secs 9.1 e 9.2 do livro de de Berg e outros

# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

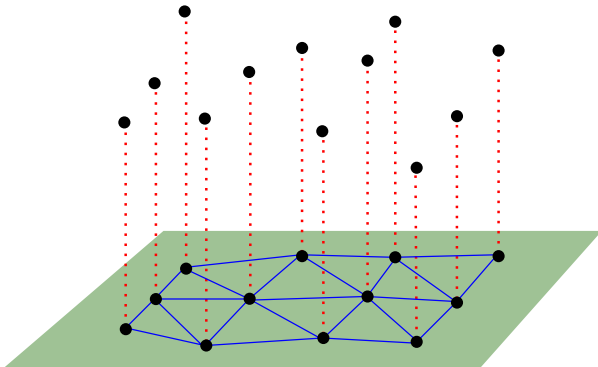


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

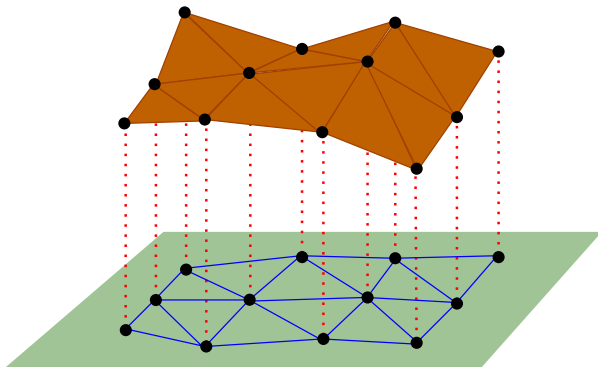


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

**Como fazer?** Triangularizamos a projeção no plano e...

# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

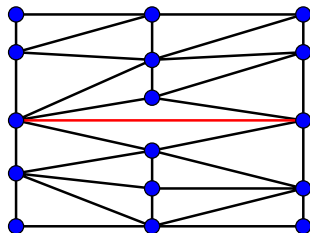
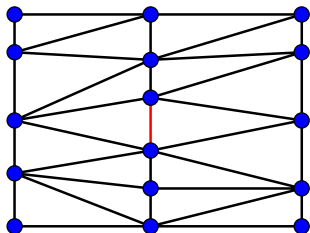


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

**Como fazer?** Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

# Qual triangulação é melhor?

- |      |        |      |
|------|--------|------|
| ● 0  | ● 1240 | ● 19 |
| ● 0  | ● 1000 | ● 20 |
| ● 10 | ● 980  | ● 36 |
| ● 6  | ● 990  | ● 28 |
| ● 4  | ● 890  | ● 23 |



# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$  onde os  $\alpha_j$  são os ângulos internos dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$  onde os  $\alpha_i$  são os ângulos internos dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

Seja  $T'$  uma outra triangulação de  $P$ .

Escrevemos  $A(T) > A(T')$

se  $A(T)$  é lexicograficamente maior que  $A(T')$ .

# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$  onde os  $\alpha_i$  são os ângulos internos dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

Seja  $T'$  uma outra triangulação de  $P$ .

Escrevemos  $A(T) > A(T')$

se  $A(T)$  é lexicograficamente maior que  $A(T')$ .

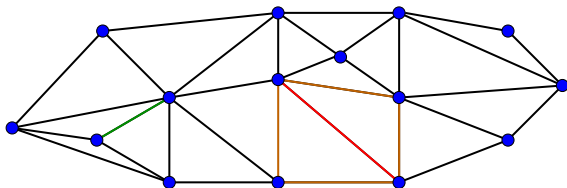
$T$  é **ângulo-ótima**

se  $A(T) \geq A(T')$  para toda triangulação  $T'$  de  $P$ .



# Triangulação legal

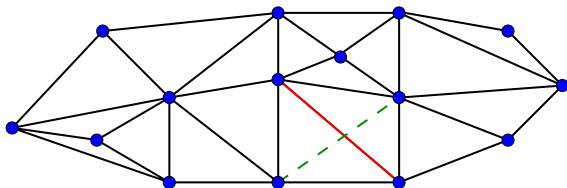
$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  num **quadrilátero convexo**  
(a aresta verde não satisfaz esta condição)

# Triangulação legal

$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  num **quadrilátero convexo**

$f$ : outra diagonal do **quadrilátero** de  $e$

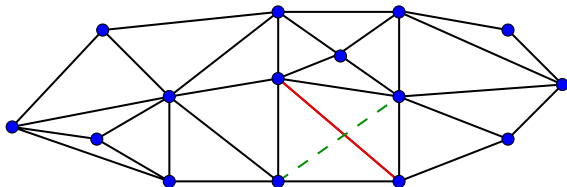
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $e$

$\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $f$

$e$  é **ilegal** se  $\min \alpha_i < \min \beta_j$

# Triangulação legal

$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  num **quadrilátero convexo**

$f$ : outra diagonal do **quadrilátero** de  $e$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $e$

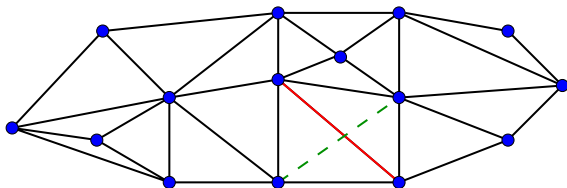
$\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $f$

$e$  é **ilegal** se  $\min \alpha_i < \min \beta_j$

$T$  é **legal** se não tem arestas ilegais

# Triangulação legal

$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  num **quadrilátero convexo**

$f$ : outra diagonal do **quadrilátero** de  $e$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $e$

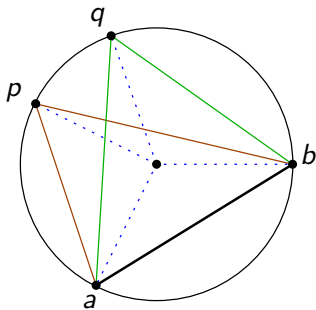
$\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $f$

$e$  é **ilegal** se  $\min \alpha_i < \min \beta_j$

$T$  é **legal** se não tem arestas ilegais

Vimos na aula passada que existe triangulação legal.

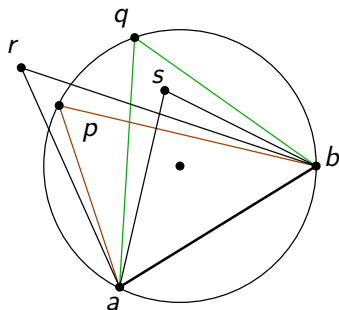
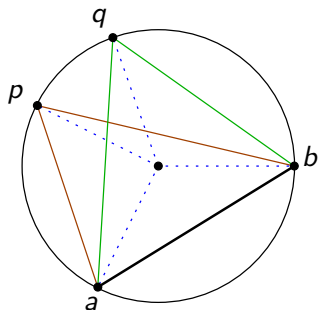
## Um pouco de geometria



$$\angle apb = \angle aqb$$

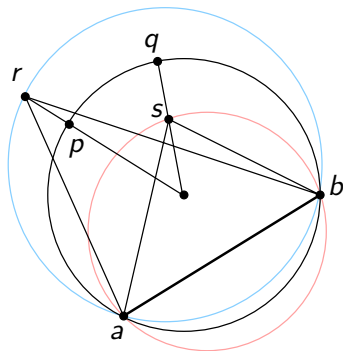
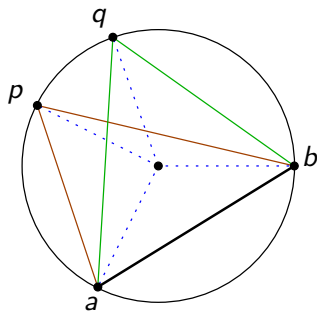
Prova feita na aula passada.

# Um pouco de geometria



$$\angle arb < \angle apb = \angle aqb < \angle asb$$

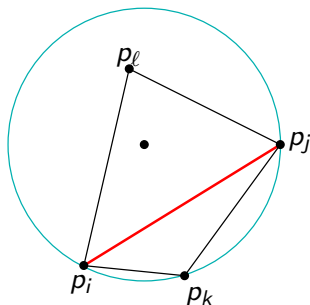
# Um pouco de geometria



$$\angle arb < \angle apb = \angle aqb < \angle asb$$

## Aresta ilegal

Aresta interna  $e = p_i p_j$  e  $p_k$  e  $p_\ell$  pontas dos triângulos que compartilham  $e$ .



$e$  é ilegal sse

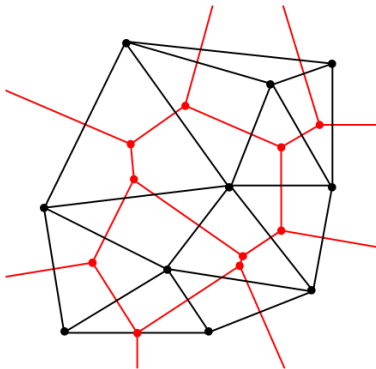
$p_\ell$  está no interior do círculo determinado por  $p_i p_j p_k$ .

Prova refeita na aula.



## Grafo de Delaunay

O **grafo de Delaunay**  $DG(P)$  é o grafo plano que tem como conjunto de vértices os pontos de  $P$  e uma aresta entre os pontos  $u$  e  $v$ , representada pelo segmento  $uv$ , se  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham uma aresta de  $\text{Vor}(P)$ .



$P$  é a coleção de pontos negros.

As **linhas vermelhas** são o **diagrama de Voronoi** de  $P$ .

# Triangulação de Delaunay

**Grafo de Delaunay  $DG(P)$** : grafo cujo conjunto de vértices é  $P$  e  $uv$  é uma aresta sse  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham aresta de  $\text{Vor}(P)$ .

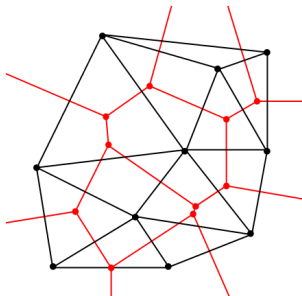
Qualquer triangulação de  $DG(P)$  é chamada de **triangulação de Delaunay**.

# Triangulação de Delaunay

**Grafo de Delaunay  $DG(P)$** : grafo cujo conjunto de vértices é  $P$  e  $uv$  é uma aresta sse  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham aresta de  $\text{Vor}(P)$ .

Qualquer triangulação de  $DG(P)$  é chamada de **triangulação de Delaunay**.

Se  $P$  está em posição geral, então os vértices de  $\text{Vor}(P)$  têm grau 3 e  $DG(P)$  já é triangulação: é única **triangulação de Delaunay** de  $P$ .



# Triangulação de Delaunay

**Grafo de Delaunay  $DG(P)$ :** grafo cujo conjunto de vértices é  $P$  e  $uv$  é uma aresta sse  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham aresta de  $\text{Vor}(P)$ .

Qualquer triangulação de  $DG(P)$  é chamada de **triangulação de Delaunay**.

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma **triangulação de Delaunay** de  $P$ .

# Triangulação de Delaunay

**Grafo de Delaunay  $DG(P)$ :** grafo cujo conjunto de vértices é  $P$  e  $uv$  é uma aresta sse  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham aresta de  $\text{Vor}(P)$ .

Qualquer triangulação de  $DG(P)$  é chamada de **triangulação de Delaunay**.

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma **triangulação de Delaunay** de  $P$ .

**Prova.** Um lado é fácil.

# Triangulação de Delaunay

**Grafo de Delaunay  $DG(P)$ :** grafo cujo conjunto de vértices é  $P$  e  $uv$  é uma aresta sse  $\mathcal{V}(u)$  e  $\mathcal{V}(v)$  compartilham aresta de  $\text{Vor}(P)$ .

Qualquer triangulação de  $DG(P)$  é chamada de **triangulação de Delaunay**.

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma **triangulação de Delaunay** de  $P$ .

**Prova.** Um lado é fácil.

Toda triangulação de Delaunay não tem arestas ilegais, portanto é legal.

# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** Algumas propriedades úteis de  $DG(P)$ :

# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** Algumas propriedades úteis de  $DG(P)$ :

Vale que

- (a)  $p_i, p_j, p_k$  estão na mesma face de  $DG(P)$  sse existe um círculo que passa pelos três e não contém nenhum ponto de  $P$  em seu interior;
- (b)  $p_i p_j$  é uma aresta de  $DG(P)$  sse existe um disco que contém  $p_i$  e  $p_j$  em sua fronteira e mais nenhum ponto de  $P$ .



# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** Seja  $T$  uma triangulação legal.

Por contradição, suponha que  $T$  não é de Delaunay.

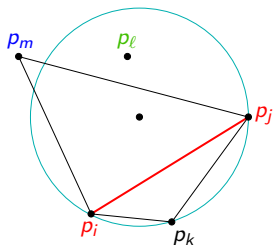
# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** Seja  $T$  uma triangulação legal.

Por contradição, suponha que  $T$  não é de Delaunay.

Por (a), existe  $p_i p_j$  tal que existe  $p_\ell$  dentro do círculo...



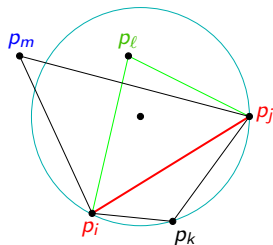
# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** Seja  $T$  uma triangulação legal.

Por contradição, suponha que  $T$  não é de Delaunay.

Por (a), existe  $p_i p_j$  tal que...



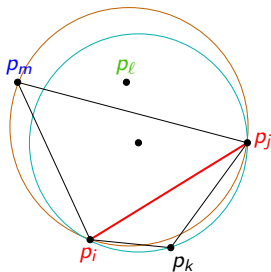
Escolha  $p_i p_j$  de modo que  $\angle p_i p_l p_j$  seja máximo.

# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** ...

Mas então  $p_\ell$  está dentro do círculo de  $p_i p_j p_m \dots$

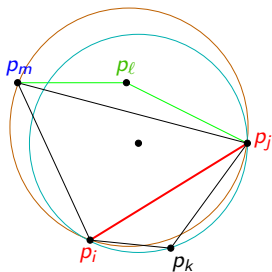


# Teorema

**Teorema.** Uma triangulação de  $P$  é legal se e somente se é uma triangulação de Delaunay de  $P$ .

**Prova.** ...

Mas então  $p_\ell$  está dentro do círculo de  $p_i p_j p_m \dots$



e  $\angle p_m p_\ell p_j > \angle p_i p_\ell p_j$ , uma contradição.

# Relações

É fácil ver que

se  $T$  é uma triangulação ângulo-ótima, então  $T$  é legal.

# Relações

É fácil ver que

se  $T$  é uma triangulação ângulo-ótima, então  $T$  é legal.

Mas então...

toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

# Relações

É fácil ver que

se  $T$  é uma triangulação ângulo-ótima, então  $T$  é legal.

Mas então...

toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se  $P$  está em posição geral,

$DG(P)$  é a única triangulação ângulo-ótima de  $P$ !



# Relações

É fácil ver que

se  $T$  é uma triangulação ângulo-ótima, então  $T$  é legal.

Mas então...

toda triangulação ângulo-ótima é de Delaunay!

Em particular, se  $P$  está em posição geral,

$DG(P)$  é a única triangulação ângulo-ótima de  $P$ !

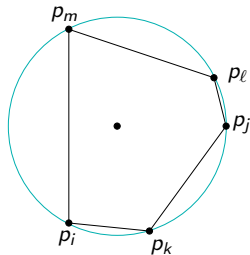
Caso  $P$  não esteja em posição geral,  
suas triangulações de Delaunay têm seus vetores de ângulos parecidos, e com a primeira coordenada igual.

Ou seja,

triangulações de Delaunay maximizam o ângulo mínimo!

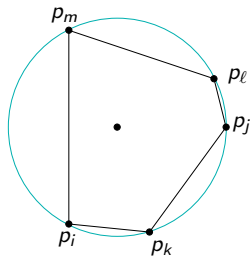
# Ângulo mínimo igual

Considere uma face de  $DG(P)$  com mais que três vértices.



# Ângulo mínimo igual

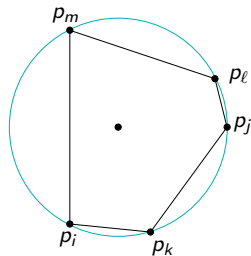
Considere uma face de  $DG(P)$  com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face, cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo cujos extremos são dois pontos de  $P$ .

# Ângulo mínimo igual

Considere uma face de  $DG(P)$  com mais que três vértices.

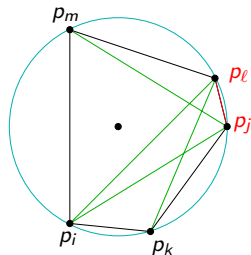


Numa triangulação dessa face, cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo cujos extremos são dois pontos de  $P$ .

Quanto menor a corda, menor o ângulo.

## Ângulo mínimo igual

Considere uma face de  $DG(P)$  com mais que três vértices.

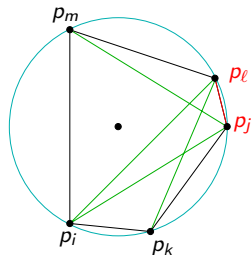


Numa triangulação dessa face, cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo cujos extremos são dois pontos de  $P$ .

Quanto **menor a corda**, menor o ângulo.

# Ângulo mínimo igual

Considere uma face de  $DG(P)$  com mais que três vértices.



Numa triangulação dessa face, cada ângulo é oposto a uma corda desse círculo cujos extremos são dois pontos de  $P$ .

Quanto **menor a corda**, menor o ângulo.

Triangulações de Delaunay têm o mesmo ângulo mínimo!

## Muitos ângulos iguais

Cada face com  $\ell$  vértices contribui com  $\ell - 2$  triângulos,  
e  $3(\ell - 2)$  ângulos.

## Muitos ângulos iguais

Cada face com  $\ell$  vértices contribui com  $\ell - 2$  triângulos, e  $3(\ell - 2)$  ângulos.

Cada lado do polígono contribui com o mesmo ângulo. Então  $\ell$  destes  $3(\ell - 2)$  coincidem e

$$3(\ell - 2) - \ell = 2\ell - 6$$

podem diferir.



## Muitos ângulos iguais

Cada face com  $\ell$  vértices contribui com  $\ell - 2$  triângulos, e  $3(\ell - 2)$  ângulos.

Cada lado do polígono contribui com o mesmo ângulo. Então  $\ell$  destes  $3(\ell - 2)$  coincidem e

$$3(\ell - 2) - \ell = 2\ell - 6$$

podem diferir.

Somando tudo,

$$\sum (2\ell - 6) = 4m - 6f$$

onde  $m$  é o número de arestas e

$f$  o número de faces internas de  $DG(P)$ .

## Muitos ângulos iguais

$k$ : número de pontos na borda do fecho convexo

$x$ : número de arestas faltando para  $DG(P)$  ser triangulação de  $P$

## Muitos ângulos iguais

$k$ : número de pontos na borda do fecho convexo

$x$ : número de arestas faltando para  $DG(P)$  ser triangulação de  $P$

Se  $DG(P)$  tem  $m$  arestas e  $f$  faces internas, então duas triangulações de Delaunay de  $P$  diferem em no máximo  $2k + 2x$  ângulos distintos.

## Muitos ângulos iguais

$k$ : número de pontos na borda do fecho convexo

$x$ : número de arestas faltando para  $DG(P)$  ser triangulação de  $P$

Se  $DG(P)$  tem  $m$  arestas e  $f$  faces internas, então duas triangulações de Delaunay de  $P$  diferem em no máximo  $2k + 2x$  ângulos distintos.

Lembre-se que  $m = 3n - 3 - k - x$  e  $f = 2n - 2 - k - x$ .

## Muitos ângulos iguais

$k$ : número de pontos na borda do fecho convexo

$x$ : número de arestas faltando para  $DG(P)$  ser triangulação de  $P$

Se  $DG(P)$  tem  $m$  arestas e  $f$  faces internas, então duas triangulações de Delaunay de  $P$  diferem em no máximo  $2k + 2x$  ângulos distintos.

Lembre-se que  $m = 3n - 3 - k - x$  e  $f = 2n - 2 - k - x$ .

Fazendo a conta,

$$4m - 6f = 4(3n - 3 - k - x) - 6(2n - 2 - k - x) = 2k + 2x.$$

# Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter  
uma triangulação de Delaunay de  $P$ ?

# Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter uma triangulação de Delaunay de  $P$ ?

Um jeito óbvio é a partir de  $\text{Vor}(P)$ .

Quanto tempo a partir de  $\text{Vor}(P)$ ?

# Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter uma triangulação de Delaunay de  $P$ ?

Um jeito óbvio é a partir de  $\text{Vor}(P)$ .

Quanto tempo a partir de  $\text{Vor}(P)$ ?

De  $\text{Vor}(P)$ , podemos obter  $DG(P)$  em tempo linear em  $n$ , onde  $n$  é o número de pontos em  $P$ , e vice-versa.



# Algoritmos para triangulação de Delaunay

Como projetar um algoritmo para obter uma triangulação de Delaunay de  $P$ ?

Um jeito óbvio é a partir de  $\text{Vor}(P)$ .

Quanto tempo a partir de  $\text{Vor}(P)$ ?

De  $\text{Vor}(P)$ , podemos obter  $DG(P)$  em tempo linear em  $n$ , onde  $n$  é o número de pontos em  $P$ , e vice-versa.

Aula que vem:

- ▶ algoritmo quadrático para construir uma triangulação de Delaunay.
- ▶ um segundo algoritmo, probabilístico.