

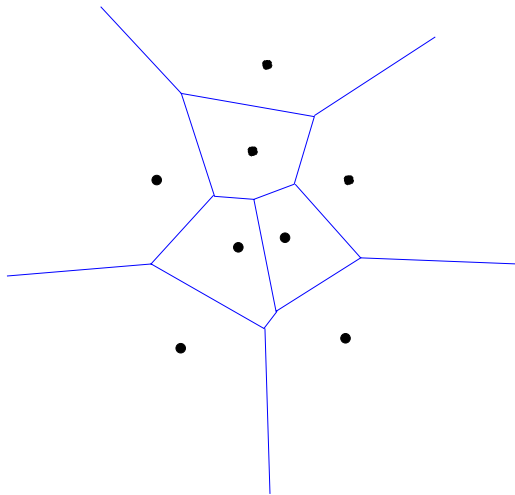
Aula 12

Algoritmo de Fortune

Sec 7.2 do livro de de Berg e outros

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

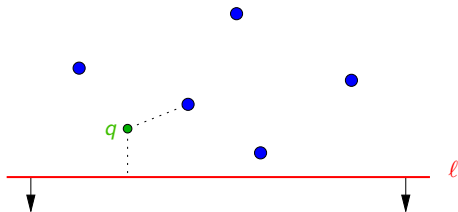


Algoritmo de Fortune

l^+ : semiplano acima da linha de varredura l

Para quais pontos q em l^+

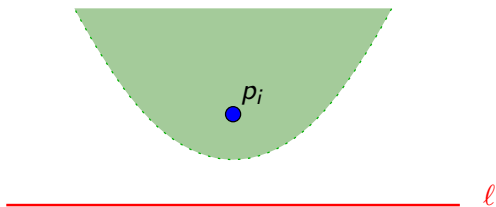
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?



Se q está mais próximo de um p_i acima de l do que de l , então q está na célula de p_i .

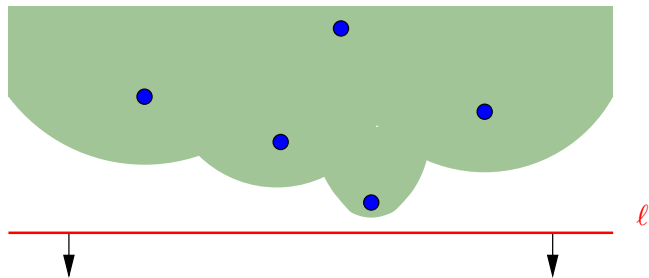
Linha da praia

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Linha da praia

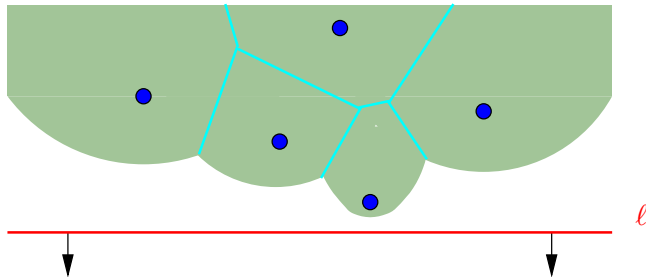
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\text{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por **arcos parabolóides**, que definem a chamada **linha da praia**.

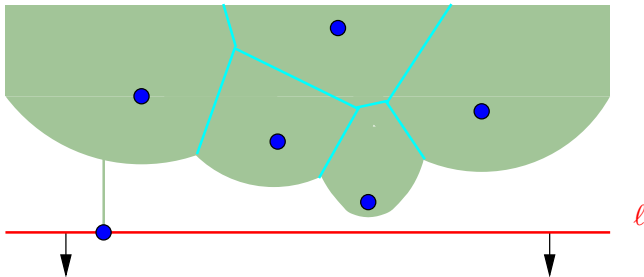
Evento-ponto

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\text{Vor}(P)$.



Evento-ponto

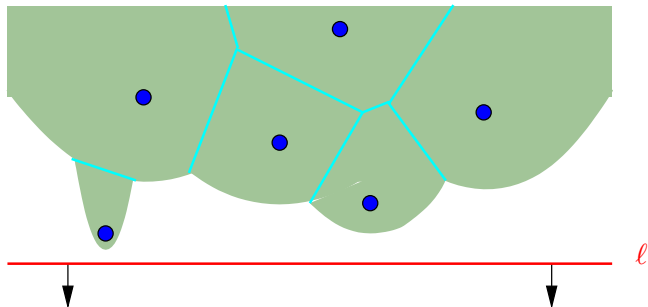
Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\text{Vor}(P)$.



Arcos que entram na linha de praia são arestas de $\text{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Evento-ponto

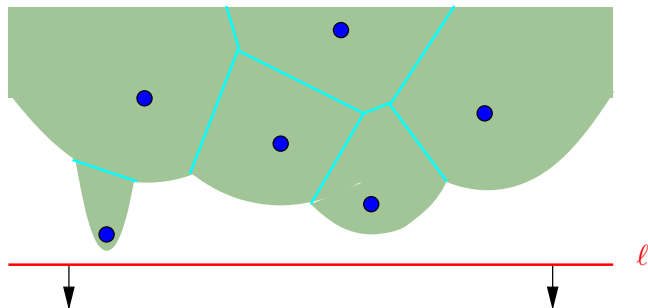
Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenham as arestas de $\text{Vor}(P)$.



Arcos que entram na linha de praia são arestas de $\text{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Evento-ponto

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia desenharam as arestas de $\text{Vor}(P)$.

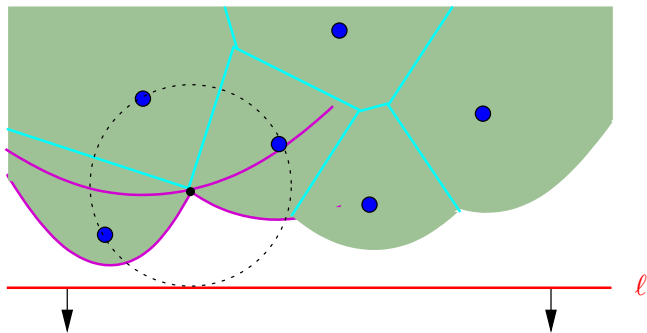


Arcos que entram na linha de praia são arestas de $\text{Vor}(P)$ que começam a ser desenhadas.

Ponto evento relacionado: um ponto de P (evento-ponto).

Evento-círculo

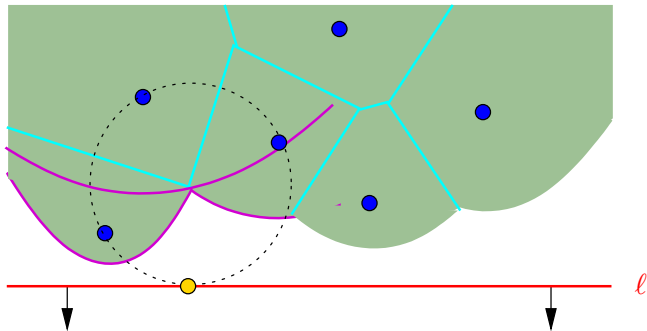
Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram, o arco entre eles sai da linha de praia.



Arcos que saem da linha de praia correspondem a vértices de $\text{Vor}(P)$.

Evento-círculo

Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram, o arco entre eles sai da linha de praia.



Arcos que saem da linha de praia correspondem a vértices de $\text{Vor}(P)$.

Ponto evento relacionado: o mais baixo do círculo com os pontos de P associados aos três arcos (**evento-círculo**).

Estruturas de dados

Para $\text{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Estruturas de dados

Para $\text{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade, que começa com os pontos de P , ordenados por Y -coordenada.

Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Estruturas de dados

Para $\text{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade, que começa com os pontos de P , ordenados por Y -coordenada.

Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Para a linha da praia, usamos uma ABBB,
com arcos nas folhas e pontos de quebra nos nós internos.

Estruturas de dados

Para $\text{Vor}(P)$: listas de arestas duplamente ligadas
(como na partição de polígono em partes monótonas).

Para a fila de eventos: uma fila de prioridade, que começa com os pontos de P , ordenados por Y -coordenada.

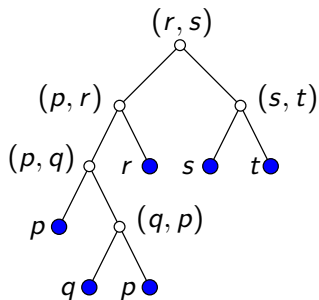
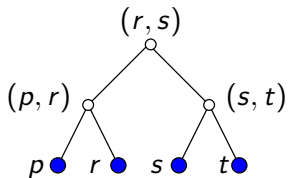
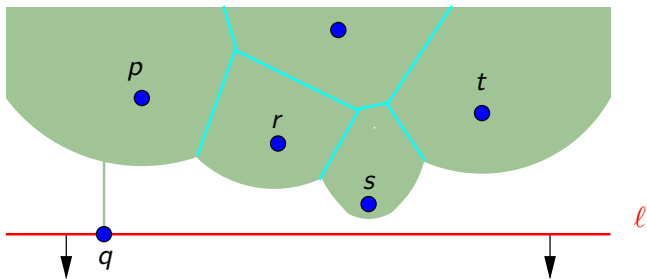
Durante o algoritmo,
inserção e remoção de candidatos a eventos-círculo.

Para a linha da praia, usamos uma ABBB,
com arcos nas folhas e pontos de quebra nos nós internos.

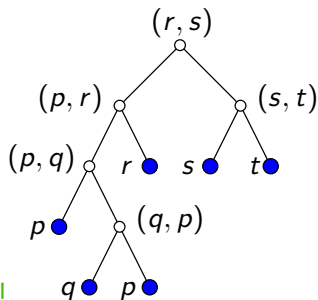
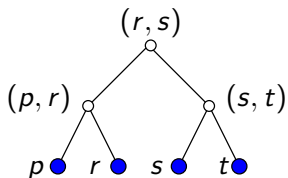
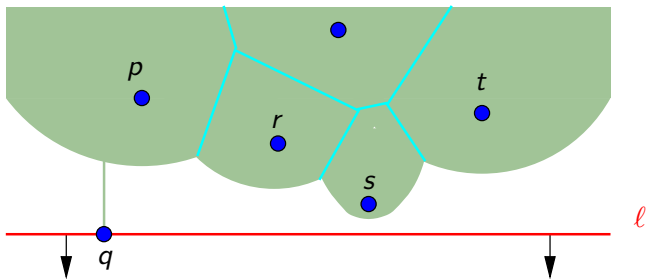
Um arco é representado pelo ponto p_j que o determina.

Um ponto de quebra é representado por um par de pontos (p_i, p_j)
cujos arcos o determinam, e está associado a uma aresta de $\text{Vor}(P)$.

ABBB da linha da praia



ABBB da linha da praia



Balanceie!

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

- 1 $Q \leftarrow \text{FilaDeEventos}(P, n)$ $\triangleright P$ ord. por Y -coordenada
- 2 CrieABB(T) \triangleright ED para a linha da praia
- 3 CrieDCEL(\mathcal{V}) \triangleright ED para Vor(P)
- 4 **enquanto** não Vazia(Q) **faça**
- 5 $q \leftarrow \text{RemoveMax}(Q)$
- 6 **se** q é um evento-ponto
- 7 **então** TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})
- 8 **senão** TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})
- 9 FinalizeVoronoi(\mathcal{V}, T) \triangleright adiciona o vértice ∞
- 10 **devolva** \mathcal{V}

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

- 1 $Q \leftarrow \text{FilaDeEventos}(P, n)$ $\triangleright P$ ord. por Y -coordenada
- 2 CrieABB(T) \triangleright ED para a linha da praia
- 3 CrieDCEL(\mathcal{V}) \triangleright ED para Vor(P)
- 4 **enquanto** não Vazia(Q) **faça**
- 5 $q \leftarrow \text{RemoveMax}(Q)$
- 6 **se** q é um evento-ponto
- 7 **então** TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})
- 8 **senão** TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})
- 9 FinalizeVoronoi(\mathcal{V}, T) \triangleright adiciona o vértice ∞
- 10 **devolva** \mathcal{V}

Há no máximo $2n - 1 = O(n)$ arcos em T ,
logo $O(n)$ eventos-círculo em Q .

Algoritmo de Fortune

Fortune(P, n)

- 1 $Q \leftarrow \text{FilaDeEventos}(P, n)$ $\triangleright P$ ord. por Y -coordenada
- 2 CrieABB(T) \triangleright ED para a linha da praia
- 3 CrieDCEL(\mathcal{V}) \triangleright ED para Vor(P)
- 4 **enquanto** não Vazia(Q) **faça**
- 5 $q \leftarrow \text{RemoveMax}(Q)$
- 6 **se** q é um evento-ponto
- 7 **então** TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})
- 8 **senão** TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})
- 9 FinalizeVoronoi(\mathcal{V}, T) \triangleright adiciona o vértice ∞
- 10 **devolva** \mathcal{V}

FinalizeVoronoi(\mathcal{V}, T): adiciona o vértice ∞ como extremo das arestas dos nós internos que restam em T .

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

- 1 se $T = \emptyset$
- 2 então $\text{Insere}(T, q)$
- 3 senão $f \leftarrow \text{Busque}(T, q)$ \triangleright folha de T do arco acima de q
- 4 $i \leftarrow \text{evento_circ}(f)$

$\text{evento_circ}(f)$: índice de Q para o evento-círculo
(se existir) associado ao arco em f .

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

```
1  se  $T = \emptyset$ 
2    então Insere( $T, q$ )
3    senão  $f \leftarrow$  Busque( $T, q$ )  $\triangleright$  folha de  $T$  do arco acima de  $q$ 
4         $i \leftarrow$  evento_circ( $f$ )
5        se  $i \neq \text{NIL}$ 
6            então Remove( $Q, i$ )
```

evento_circ(f): índice de Q para o evento-círculo
(se existir) associado ao arco em f .

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

```
1  se  $T = \emptyset$ 
2    então Insere( $T, q$ )
3    senão  $f \leftarrow$  Busque( $T, q$ )  $\triangleright$  folha de  $T$  do arco acima de  $q$ 
4           $i \leftarrow$  evento_circ( $f$ )
5          se  $i \neq \text{NIL}$ 
6            então Remove( $Q, i$ )
7          ( $u, f, v$ )  $\leftarrow$  Quebre_e_Insira( $T, f, q$ )
```

Quebre_e_Insira(T, f, q): troque f por árvore com três folhas, a do meio para o arco de q e outras duas para o arco de $p = \text{ponto}(f)$. Balanceie T se necessário.

Devolva apontadores para os nós internos novos e folha de q .

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

```
1  se  $T = \emptyset$ 
2    então Insere( $T, q$ )
3    senão  $f \leftarrow$  Busque( $T, q$ )  $\triangleright$  folha de  $T$  do arco acima de  $q$ 
4           $i \leftarrow$  evento_circ( $f$ )
5          se  $i \neq \text{NIL}$ 
6            então Remove( $Q, i$ )
7          ( $u, f, v$ )  $\leftarrow$  Quebre_e_Insira( $T, f, q$ )
8          NovaAresta( $\mathcal{V}, u, \text{NIL}, v, \text{NIL}$ )
```

NovaAresta(\mathcal{V}, u, x, v, y): cria aresta nova em $\text{Vor}(P)$, com uma gêmea do nó interno u de T , indo para o vértice x de $\text{Vor}(P)$, e outra, de v , indo para y . (Se x ou y são NIL , tal vértice ainda está indefinido.)

Tratamento de evento-ponto

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

```
1  se  $T = \emptyset$ 
2    então Insere( $T, q$ )
3    senão  $f \leftarrow$  Busque( $T, q$ )  $\triangleright$  folha de  $T$  do arco acima de  $q$ 
4           $i \leftarrow$  evento_circ( $f$ )
5          se  $i \neq \text{NIL}$ 
6            então Remove( $Q, i$ )
7          ( $u, f, v$ )  $\leftarrow$  Quebre_e_Insira( $T, f, q$ )
8          NovaAresta( $\mathcal{V}, u, \text{NIL}, v, \text{NIL}$ )
9          AtualizaEventos( $Q, T, f$ )
```

AtualizaEventos(Q, T, f): calcule o evento-círculo das duas novas triplas de arcos consecutivos em T em torno de f ; se a Y -coordenada de tal ponto é menor que q_Y , então acrescente-o a Q .

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo(q , T , Q , \mathcal{V})

- 1 $f \leftarrow \text{folha}(q)$ \triangleright folha de T do arco associado a q
- 2 $(\text{pred}, \text{suc}, \text{novo}) \leftarrow \text{Remove}(T, f)$

$\text{Remove}(T, f)$: remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f , e o seu substituto.

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})

- 1 $f \leftarrow \text{folha}(q)$ \triangleright folha de T do arco associado a q
- 2 $(\text{pred}, \text{suc}, \text{novo}) \leftarrow \text{Remove}(T, f)$
- 3 $\text{AtualizaEventos}(Q, T, \text{novo})$
- 4 $c \leftarrow \text{centro}(q)$ \triangleright centro do círculo associado a q
- 5 $u \leftarrow \text{NovoVértice}(\mathcal{V}, c)$

$\text{Remove}(T, f)$: remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f , e o seu substituto.

$\text{AtualizaEventos}(Q, T, f)$: calcule o evento-círculo das duas novas triplas de arcos consecutivos em T em torno de f ; se a Y -coordenada de tal ponto é menor que q_Y , então acrescente-o a Q .

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})

- 1 $f \leftarrow \text{folha}(q)$ \triangleright folha de T do arco associado a q
- 2 $(pred, suc, novo) \leftarrow \text{Remove}(T, f)$
- 3 AtualizaEventos($Q, T, novo$)
- 4 $c \leftarrow \text{centro}(q)$ \triangleright centro do círculo associado a q
- 5 $u \leftarrow \text{NovoVértice}(\mathcal{V}, c)$
- 6 AdicionaExtremo($\mathcal{V}, u, \text{aresta}(pred), \text{aresta}(suc)$)

$\text{Remove}(T, f)$: remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f , e o seu substituto.

$\text{AdicionaExtremo}(\mathcal{V}, u, \text{aresta}(pred), \text{aresta}(suc))$: põe u como extremo das gêmeas correspondentes aos pontos de quebra associados a q .

Tratamento de evento-círculo

TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})

- 1 $f \leftarrow \text{folha}(q)$ \triangleright folha de T do arco associado a q
- 2 $(pred, suc, novo) \leftarrow \text{Remove}(T, f)$
- 3 AtualizaEventos($Q, T, novo$)
- 4 $c \leftarrow \text{centro}(q)$ \triangleright centro do círculo associado a q
- 5 $u \leftarrow \text{NovoVértice}(\mathcal{V}, c)$
- 6 AdicionaExtremo($\mathcal{V}, u, \text{aresta}(pred), \text{aresta}(suc)$)
- 7 NovaAresta($\mathcal{V}, novo, \text{NIL}, \text{NIL}, u$)

$\text{Remove}(T, f)$: remova f e devolva os dois nós internos de T associados ao arco de f , e o seu substituto.

$\text{NovaAresta}(\mathcal{V}, u, x, v, y)$: cria aresta nova em $\text{Vor}(P)$, com uma gêmea do nó interno u de T , indo para o vértice x de $\text{Vor}(P)$, e outra, de v , indo para y .
(Se x ou y são NIL , tal vértice ainda está indefinido.)

Casos degenerados

Eventos-ponto com mesma Y -coordenada:

- ▶ se X -coordenadas são distintas, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exceto quando estes são os primeiros, quando é necessário um tratamento diferente.

Casos degenerados

Eventos-ponto com mesma Y -coordenada:

- ▶ se X -coordenadas são distintas, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exceto quando estes são os primeiros, quando é necessário um tratamento diferente.
- ▶ se X -coordenadas coincidem, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exigindo eventualmente uma limpeza final.

Casos degenerados

Eventos-ponto com mesma Y -coordenada:

- ▶ se X -coordenadas são distintas, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exceto quando estes são os primeiros, quando é necessário um tratamento diferente.
- ▶ se X -coordenadas coincidem, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exigindo eventualmente uma limpeza final.

Ponto de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- ▶ qual arco está acima dele?
pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

Casos degenerados

Eventos-ponto com mesma Y -coordenada:

- ▶ se X -coordenadas são distintas, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exceto quando estes são os primeiros, quando é necessário um tratamento diferente.
- ▶ se X -coordenadas coincidem, podem ser tratados numa ordem arbitrária, exigindo eventualmente uma limpeza final.

Ponto de P exatamente abaixo de um ponto de quebra:

- ▶ qual arco está acima dele?
pode-se escolher qualquer um dos dois candidatos.

Tripla de arcos de pontos colineares:

- ▶ definem um círculo?
não, logo não geram um evento-círculo.

Consumo de tempo

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

```
1  se  $T = \emptyset$ 
2    então Insere( $T, q$ )
3    senão  $f \leftarrow$  Busque( $T, q$ )  $\triangleright$  folha de  $T$  do arco acima de  $q$ 
4           $i \leftarrow$  evento_circ( $f$ )
5          se  $i \neq \text{NIL}$ 
6            então Remove( $Q, i$ )
7           $(u, f, v) \leftarrow$  Quebre_e_Insira( $T, f, q$ )
8          NovaAresta( $\mathcal{V}, u, \text{NIL}, v, \text{NIL}$ )
9          AtualizaEventos( $Q, T, f$ )
```

Consumo de tempo: $O(\lg n)$.

Consumo de tempo

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

Consumo de tempo: $O(\lg n)$.

TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})

- 1 $f \leftarrow \text{folha}(q)$ \triangleright folha de T do arco associado a q
- 2 $(pred, suc, novo) \leftarrow \text{Remove}(T, f)$
- 3 $\text{AtualizaEventos}(Q, T, f)$
- 4 $c \leftarrow \text{centro}(q)$ \triangleright centro do círculo associado a q
- 5 $u \leftarrow \text{NovoVértice}(\mathcal{V}, c)$
- 6 $\text{AdicionaExtremo}(\mathcal{V}, u, \text{aresta}(pred), \text{aresta}(suc))$
- 7 $\text{NovaAresta}(\mathcal{V}, novo, \text{NIL}, \text{NIL}, u)$

Consumo de tempo: $O(\lg n)$.

Consumo de tempo

TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})

TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})

Consumo de tempo: $O(\lg n)$.

Fortune(P, n)

- 1 $Q \leftarrow$ FilaDeEventos(P, n) $\triangleright P$ ord. por Y-coordenada
- 2 CrieABB(T) \triangleright ED para a linha da praia
- 3 CrieDCEL(\mathcal{V}) \triangleright ED para Vor(P)
- 4 enquanto não Vazia(Q) faça
- 5 $q \leftarrow$ RemovaMin(Q)
- 6 se q é um evento-ponto
- 7 então TrataEventoPonto(q, T, Q, \mathcal{V})
- 8 senão TrataEventoCírculo(q, T, Q, \mathcal{V})
- 9 FinalizeVoronoi(\mathcal{V}, T) \triangleright adiciona o vértice ∞
- 10 devolva \mathcal{V}

Consumo de tempo: $O(n \lg n)$.

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Toda comparação “=” deve ser feita permitindo um erro de até ϵ , para um ϵ pequeno, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

- 1 se $a = b$
- 2 então ...
- 3 senão ...

Cuidados numéricos nos cálculos

Como lidar com erros numéricos nos cálculos dos nossos algoritmos?

Se possível, fique nos inteiros.

Exemplo: cálculo do par mais próximo.

Toda comparação “=” deve ser feita permitindo um erro de até ϵ , para um ϵ pequeno, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

```
1 se  $a = b$   
2   então ...  
3   senão ...
```

escreva

```
1 se  $\text{abs}(a - b) \leq \epsilon$   
2   então ...  
3   senão ...
```


Cuidados numéricos nos cálculos

Similarmente, comparações “ $<$ ” ou “ \leq ” devem ser feita permitindo um erro de até ϵ , para, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

- 1 se $a < b$ \triangleright se $a - b < 0$
- 2 **então** ...
- 3 **senão** ...

Cuidados numéricos nos cálculos

Similarmente, comparações “ $<$ ” ou “ \leq ” devem ser feita permitindo um erro de até ϵ , para, por exemplo, $\epsilon = 10^{-9}$.

Exemplo: em vez de

1 **se** $a < b$ \triangleright **se** $a - b < 0$

2 **então** ...

3 **senão** ...

escreva

1 **se** $a - b < \epsilon$

2 **então** ...

3 **senão** ...