

## Aula 11

### Diagrama de Voronoi

Sec 7.1 do livro de de Berg e outros

# Diagrama de Voronoi

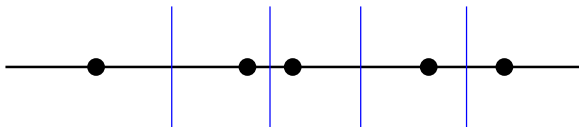
Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.



# Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:

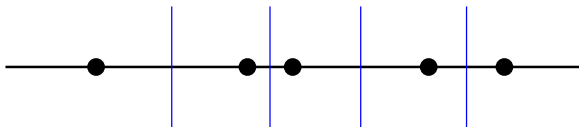


O diagrama são várias linhas paralelas.

# Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:



O diagrama são várias linhas paralelas.

Versão bidimensional:

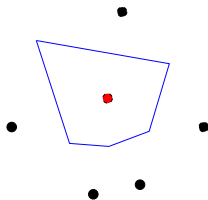
Pode ser construída em tempo  $O(n \lg n)$ , onde  $n$  é o número de pontos dados.

- ▶ **Divisão e conquista:** Shamos e Hoya (complexo)
- ▶ **Linha de varredura:** Fortune (elegante e simples)

## Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

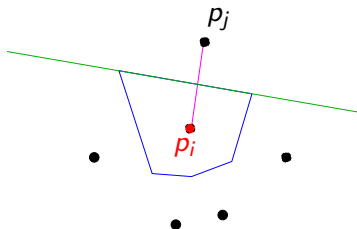
$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{Dist}(q, p_i) < \text{Dist}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



# Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{Dist}(q, p_i) < \text{Dist}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



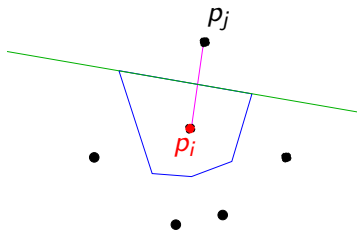
$h(p, q)$ : semiplano determinado pela reta bissetora entre  $p$  e  $q$  que contém o ponto  $p$ .

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$$

## Notação

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{Dist}(q, p_i) < \text{Dist}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$



$h(p, q)$ : semiplano determinado pela reta bissetora entre  $p$  e  $q$  que contém o ponto  $p$ .

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$$

Logo  $\mathcal{V}(p_i)$  é convexo (interseção de  $n - 1$  semiplanos), com no máximo  $n - 1$  arestas e vértices.



# Diagrama de Voronoi

$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

Célula de  $p_i$ :

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{Dist}(q, p_i) < \text{Dist}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$

# Diagrama de Voronoi

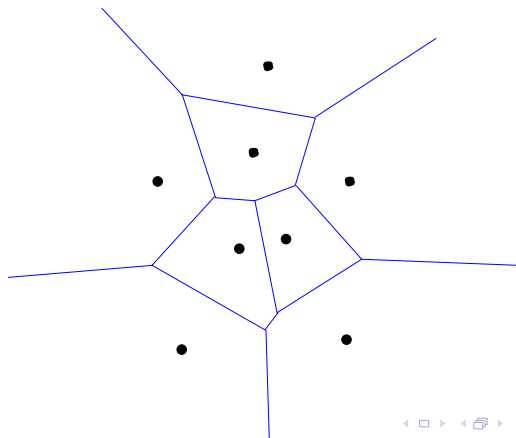
$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

Célula de  $p_i$ :

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{Dist}(q, p_i) < \text{Dist}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$

Diagrama de Voronoi de  $P$ :  $\text{Vor}(P)$

subdivisão do plano nas células  $\mathcal{V}(p_1), \dots, \mathcal{V}(p_n)$ .



# Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de  $n$ ?

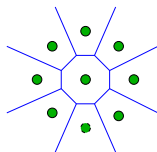
# Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de  $n$ ?

Cada célula tem  $O(n)$  arestas.

Algumas podem ter  $\Theta(n)$  arestas.



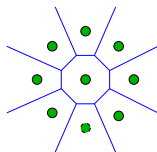
# Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de  $n$ ?

Cada célula tem  $O(n)$  arestas.

Algumas podem ter  $\Theta(n)$  arestas.



**Teorema:**

Para  $n \geq 3$ , o número de **vértices** no diagrama de Voronoi de um conjunto de  $n$  pontos no plano é **no máximo  $2n - 5$** , e o número de **arestas** é **no máximo  $3n - 6$** .

## Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

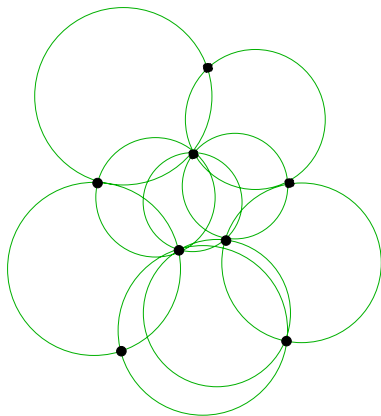
$C_P(q)$ : círculo centrado em  $q$  o maior possível que não contenha pontos de  $P$  no seu interior.

## Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

$C_P(q)$ : círculo centrado em  $q$  o maior possível que não contenha pontos de  $P$  no seu interior.

**Teorema:**

(i) Ponto  $q$  é vértice de  $\text{Vor}(P)$  sse  $C_P(q)$  contém três ou mais pontos de  $P$  (em sua fronteira).

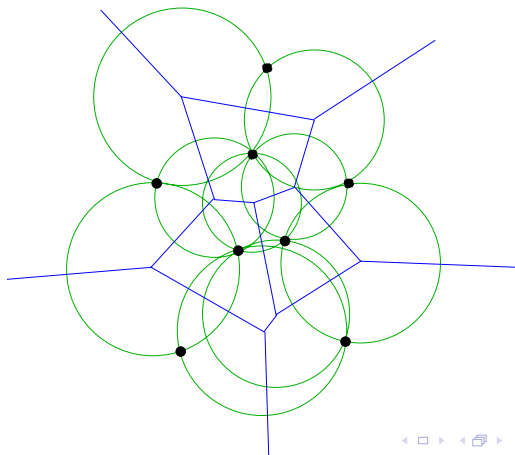


## Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

$C_P(q)$ : círculo centrado em  $q$  o maior possível que não contenha pontos de  $P$  no seu interior.

**Teorema:**

(i) Ponto  $q$  é vértice de  $\text{Vor}(P)$  sse  $C_P(q)$  contém três ou mais pontos de  $P$  (em sua fronteira).



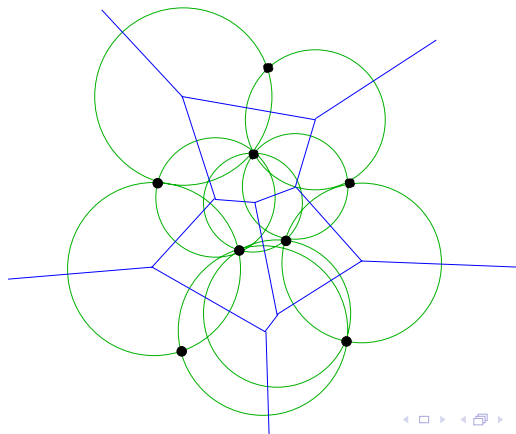


## Arestas e vértices de $\text{Vor}(P)$

### Teorema:

(i) Ponto  $q$  é vértice de  $\text{Vor}(P)$  sse  $C_P(q)$  contém três ou mais pontos de  $P$  (em sua fronteira).

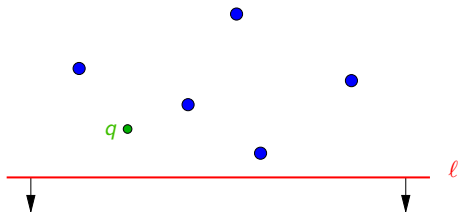
(ii) A reta bissetora entre os pontos  $p_i$  e  $p_j$  define uma aresta de  $\text{Vor}(P)$  sse existe um ponto  $q$  nela tq  $C_P(q)$  contém  $p_i$  e  $p_j$  e apenas estes (em sua fronteira).



# Algoritmo de Fortune

$\ell^+$ : semiplano acima da linha de varredura  $\ell$

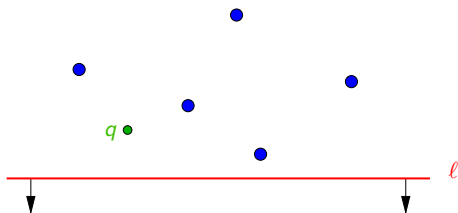
Para quais pontos  $q$  em  $\ell^+$   
já conhecemos o ponto de  $P$  mais próximo a  $q$ ?



# Algoritmo de Fortune

$\ell^+$ : semiplano acima da linha de varredura  $\ell$

Para quais pontos  $q$  em  $\ell^+$   
já conhecemos o ponto de  $P$  mais próximo a  $q$ ?

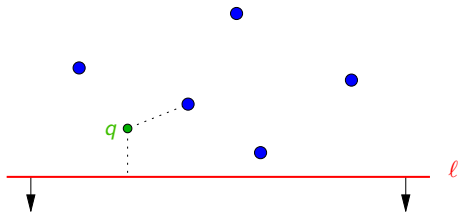


A distância de  $q$  a qualquer ponto abaixo de  $\ell$   
é pelo menos a distância de  $q$  a  $\ell$ .

# Algoritmo de Fortune

$\ell^+$ : semiplano acima da linha de varredura  $\ell$

Para quais pontos  $q$  em  $\ell^+$   
já conhecemos o ponto de  $P$  mais próximo a  $q$ ?

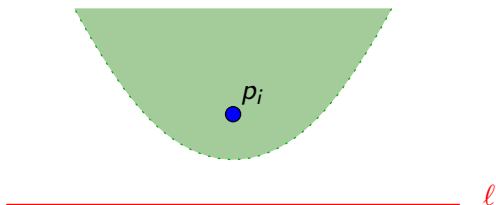


A distância de  $q$  a qualquer ponto abaixo de  $\ell$   
é pelo menos a distância de  $q$  a  $\ell$ .

Se  $q$  está mais próximo de um  $p_i$  acima de  $\ell$  do que de  $\ell$ ,  
então  $q$  está em  $\mathcal{V}(p_i)$ .

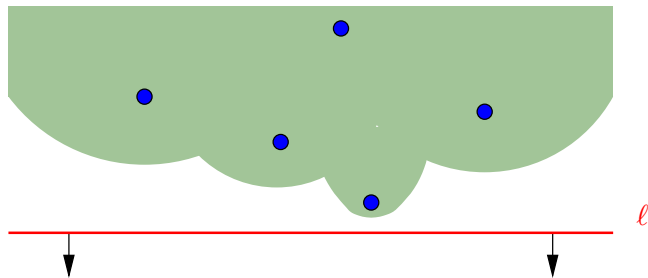
# Algoritmo de Fortune

O conjunto dos pontos mais próximos a  $p_i$  do que  $\ell$  é delimitado por uma **parábola**.



# Algoritmo de Fortune

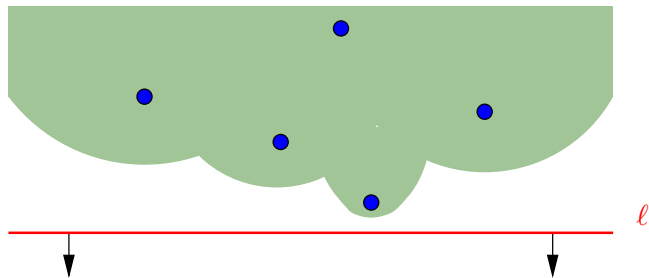
O conjunto dos pontos mais próximos a  $p_i$  do que  $\ell$  é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de  $\ell^+$  onde  $\text{Vor}(P)$  é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**,

# Algoritmo de Fortune

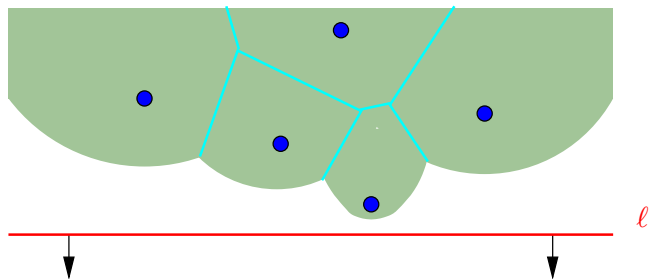
O conjunto dos pontos mais próximos a  $p_i$  do que  $\ell$  é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de  $\ell^+$  onde  $\text{Vor}(P)$  é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**, ou **arcos parabolóides**, que definem a chamada **linha da praia**.

# Algoritmo de Fortune

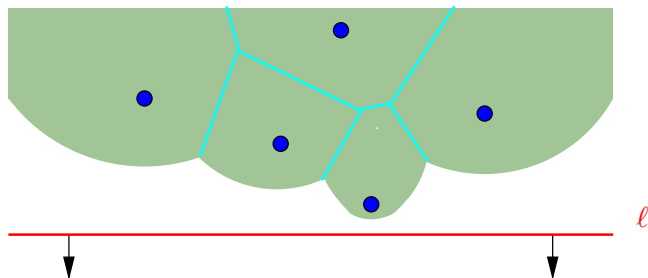
Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de  $\text{Vor}(P)$ .





# Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de  $\text{Vor}(P)$ .



Esses pontos de encontro desenham  $\text{Vor}(P)$ .  
Vejam a animação do algoritmo.

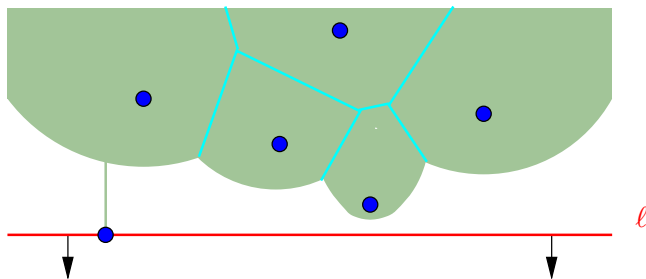
# Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de  $\ell$ ?

# Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de  $\ell$ ?

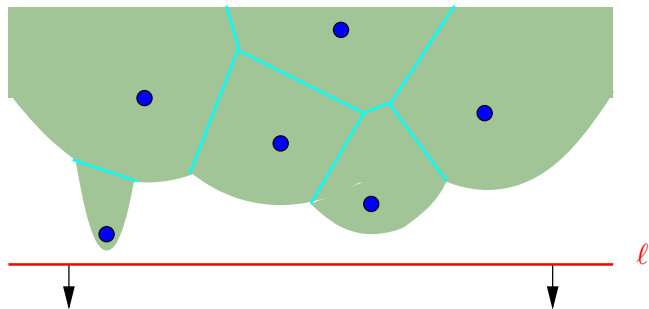
Um arco novo aparece na linha quando  $\ell$  passa por um ponto de  $P$ .



# Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de  $\ell$ ?

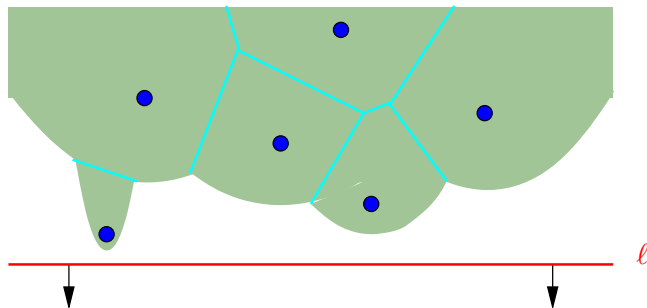
Um arco novo aparece na linha quando  $\ell$  passa por um ponto de  $P$ .



# Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de  $\ell$ ?

Um arco novo aparece na linha quando  $\ell$  passa por um ponto de  $P$ .

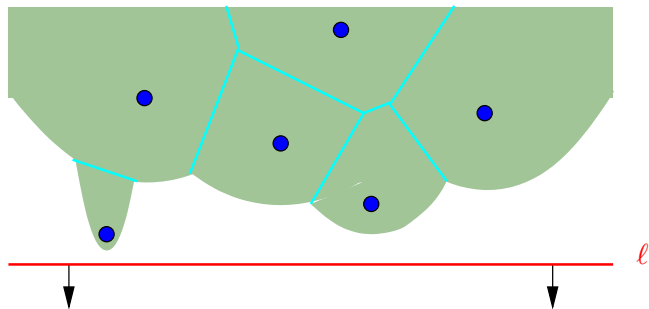


Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

# Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de  $\ell$ ?

Um arco novo aparece na linha quando  $\ell$  passa por um ponto de  $P$ .



Pontos de  $P$  são **pontos eventos**.

## Quantos arcos há na linha?

**Lema.** O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de  $P$ .

## Quantos arcos há na linha?

**Lema.** O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de  $P$ .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.



## Quantos arcos há na linha?

**Lema.** O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de  $P$ .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo  $2n - 1$  arcos na linha:  
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

## Quantos arcos há na linha?

**Lema.** O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de  $P$ .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo  $2n - 1$  arcos na linha:  
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

## Quantos arcos há na linha?

**Lema.** O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de  $P$ .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo  $2n - 1$  arcos na linha:  
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram!  
Veja a animação.

## Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

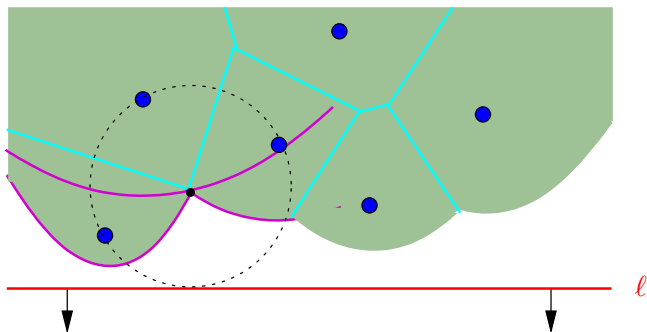
Quando isso ocorre?

## Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.

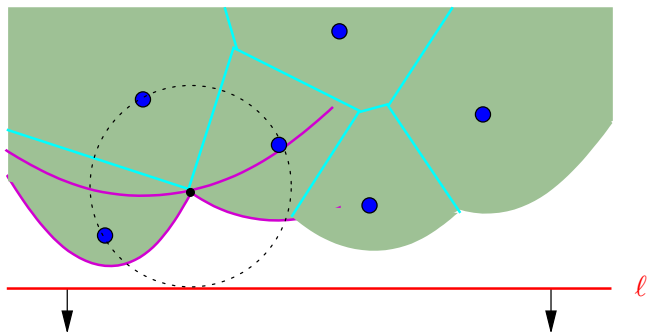


## Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

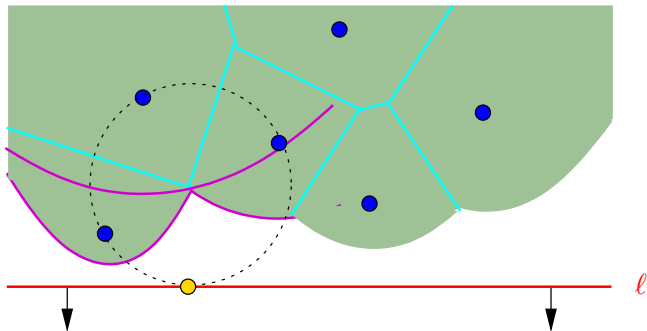
Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.



Esse ponto está equidistante de três pontos de  $P$  e é um vértice de  $\text{Vor}(P)$ .

## Segundo tipo de ponto evento

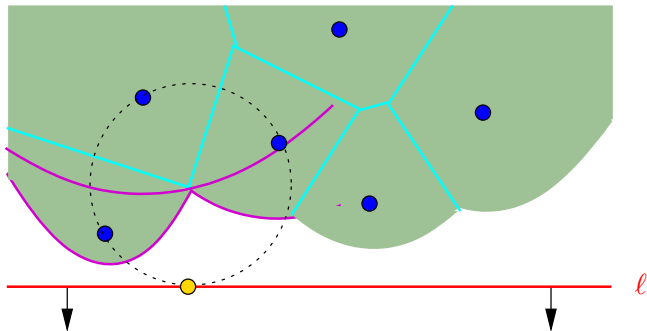
Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

## Segundo tipo de ponto evento

Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

**Lema.** O único jeito de um arco desaparecer da linha de praia é por meio de um evento-círculo.