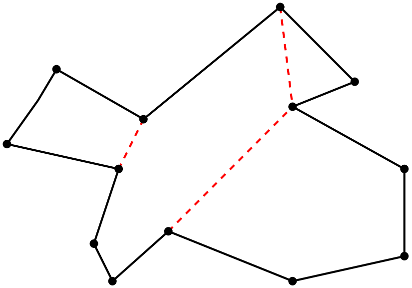
Aula 9

Partição em polígonos convexos

Sec 2.5 do O'Rourke

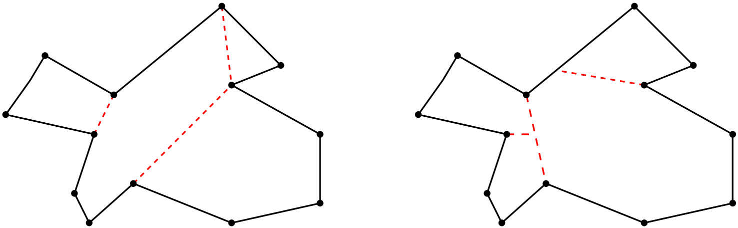
Partição em polígonos convexos

Problema: Dado um polígono P, determinar uma partição de P em um número mínimo de partes convexas.



Partição em polígonos convexos

Problema: Dado um polígono P, determinar uma partição de P em um número mínimo de partes convexas.



Dois tipos de partição:

- por diagonais de P
- por segmentos arbitrários contidos em P

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Consumo de tempo: linear, usando o algoritmo
de triangulação de Chazelle (que não vimos).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de P por diagonais.

Vértice reflexo: vértice com ângulo interno maior que π.

Uma diagonal d é essencial para um vértice v se
a remoção de d torna v reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Consumo de tempo: linear, usando o algoritmo
de triangulação de Chazelle (que não vimos).

Mas a partição devolvida tem número mínimo de partes?

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja Φ^* o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de P.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja Φ^* o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de P.

Algoritmo de aproximação: produz uma partição convexa de P por diagonais com no máximo $\alpha\,\Phi^*$ diagonais, e consome tempo polinomial.

Um tal algoritmo é chamado de α-aproximação, e α é sua razão de aproximação.

Algoritmos de aproximação

Problema: Dado P, determinar uma partição de P por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja Φ^* o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de P.

Algoritmo de aproximação: produz uma partição convexa de P por diagonais com no máximo $\alpha\,\Phi^*$ diagonais, e consome tempo polinomial.

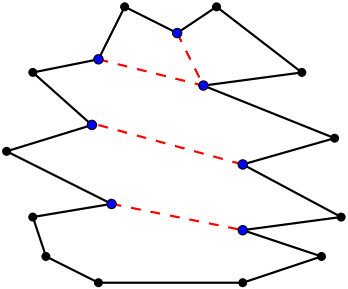
Um tal algoritmo é chamado de α-aproximação, e α é sua razão de aproximação.

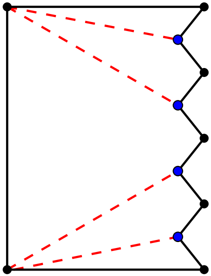
O algoritmo de Hertel e Mehlhorn produz uma partição de P por diagonais, sempre com no máximo $4\Phi^*$ diagonais, ou seja, é uma 4-aproximação.

Partição em polígonos convexos

Teorema: Seja Φ^* o menor número de partes convexas em que um polígono com r vértices reflexos pode ser particionado. Então

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \;\leq\; \Phi^* \;\leq\; r + 1.$$

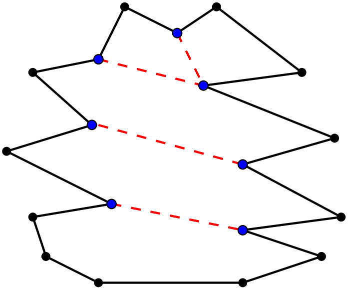


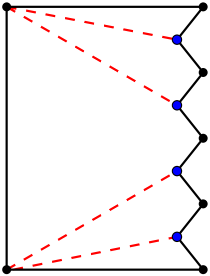


Partição em polígonos convexos

Teorema: Seja Φ^* o menor número de partes convexas em que um polígono com r vértices reflexos pode ser particionado. Então

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \;\le\; \Phi^* \;\le\; r + 1.$$





Esboço da prova: Há pelo menos um segmento particionador incidindo em cada vértice reverso, e cada segmento particionador acerta a situação de no máximo dois vértices reversos.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Teorema: O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:
Construa uma triangulação de P e
remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais.
Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

Lema: Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

Prova: Feita na aula.

Teorema: O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

Prova: O número de partes do algoritmo é

$$\leq 2r + 1 \leq 4(r/2 + 1) \leq 4(\lceil r/2 \rceil + 1) \leq 4\phi^*.$$

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

Os dois algoritmos são de programação dinâmica.

Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n^2) = \mathrm{O}(n^4)$,
onde n é o número de vértices e
r é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(r^2 n \lg n)$.

Os dois algoritmos são de programação dinâmica.

Se a partição é por segmentos, o problema fica mais complicado.
Há um algoritmo de Chazelle que consome tempo $\mathrm{O}(n + r^3) = \mathrm{O}(n^3)$ para este caso.