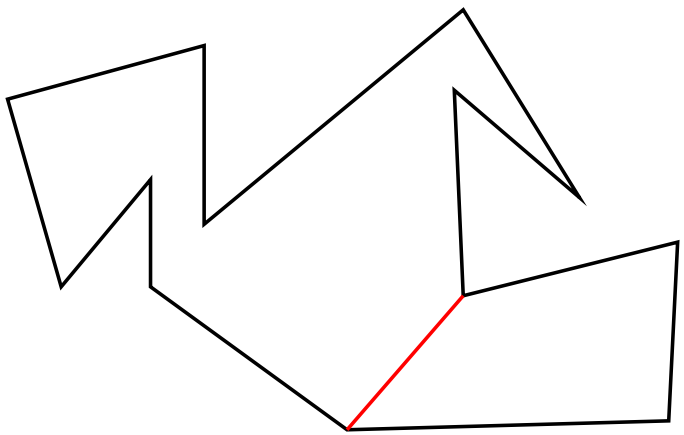
Triangulação de polígonos

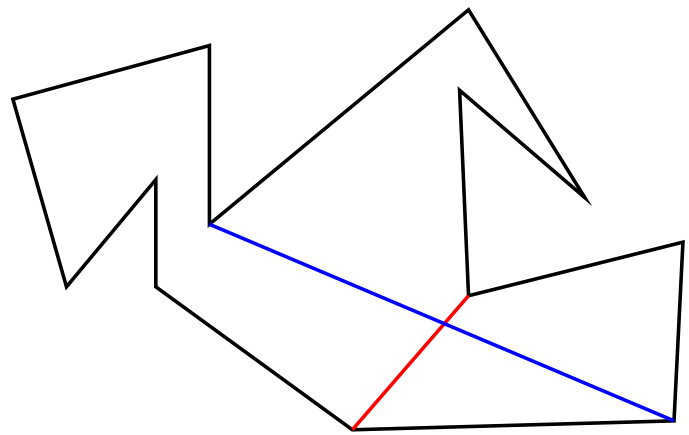
Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Triangulação de polígonos

Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

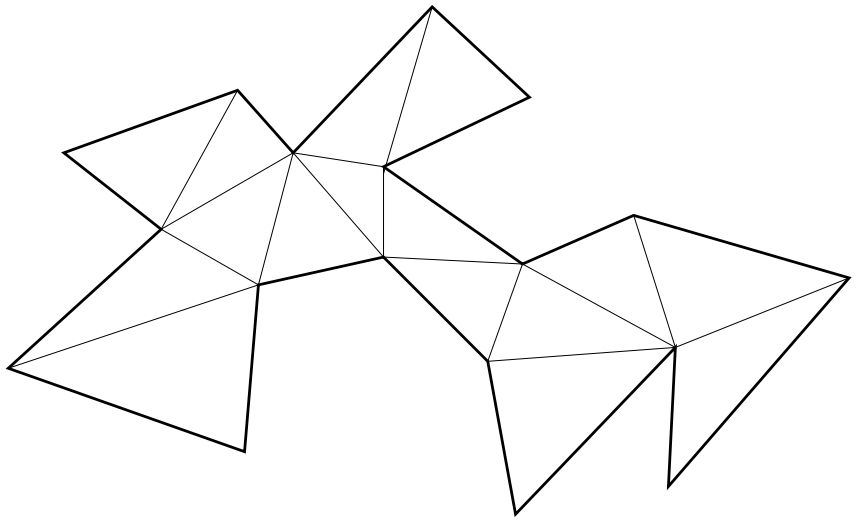
Diagonais uv e wz distintas de P se cruzam se $uv \cap wz \not\subseteq \{u, v, w, z\}$.





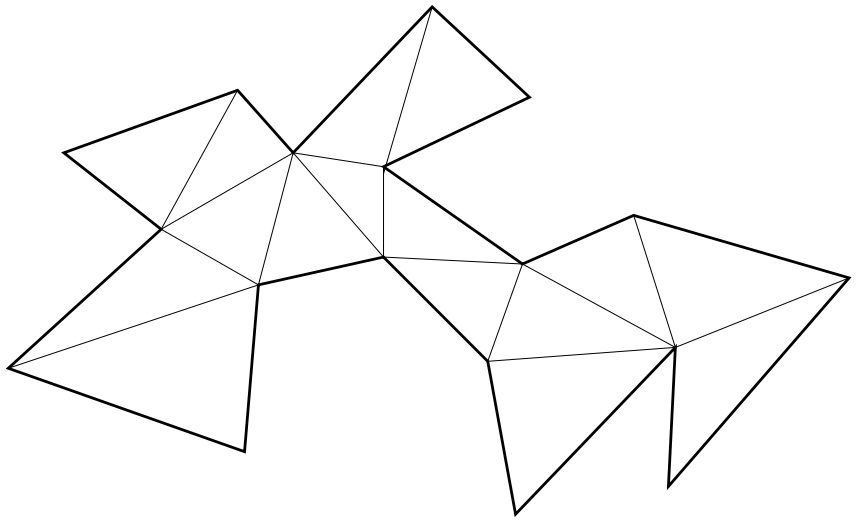
Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

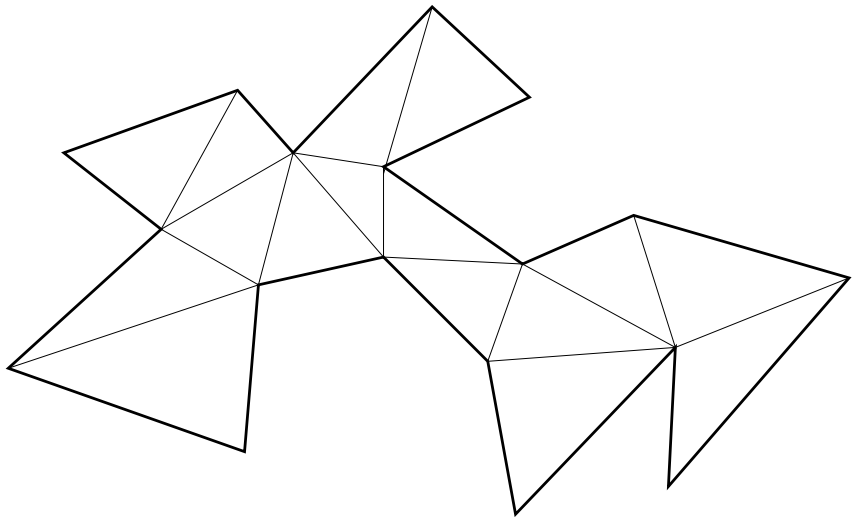
Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Triangulação de polígonos

Uma triangulação de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P.

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

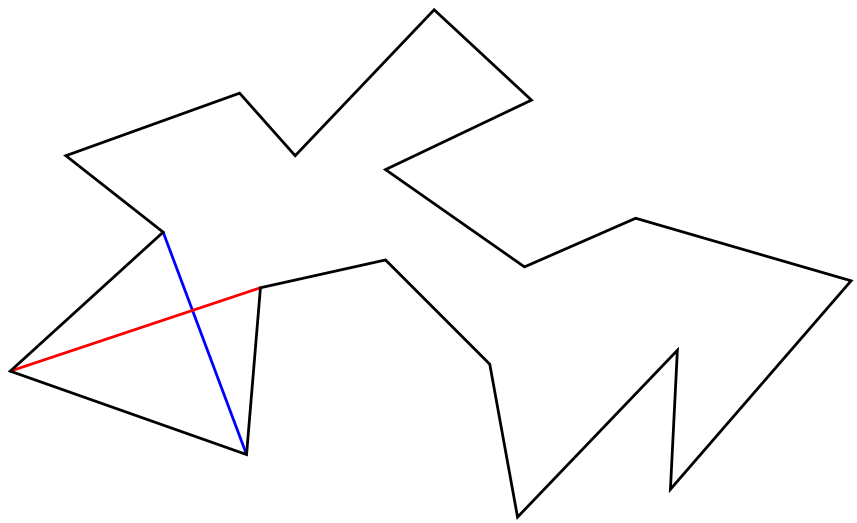
Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

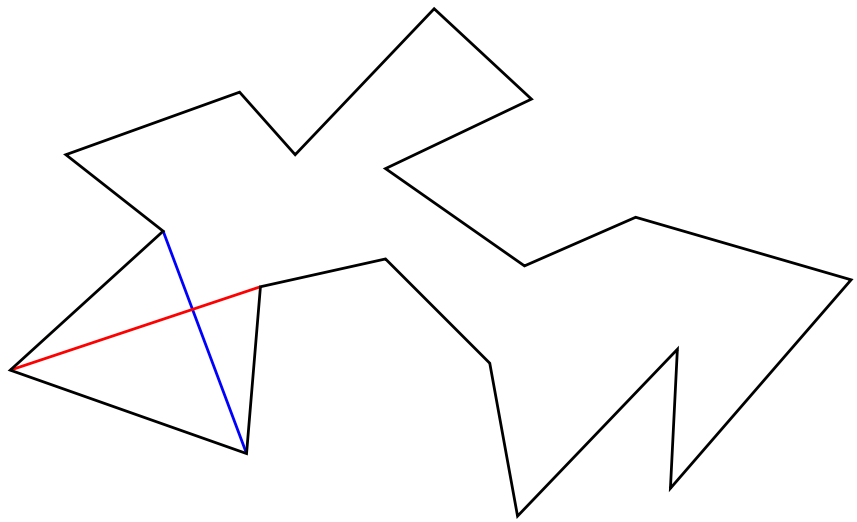
Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma orelha de P se uw é uma diagonal de P.

Duas orelhas não se sobrepõem se seus interiores são disjuntos.



Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

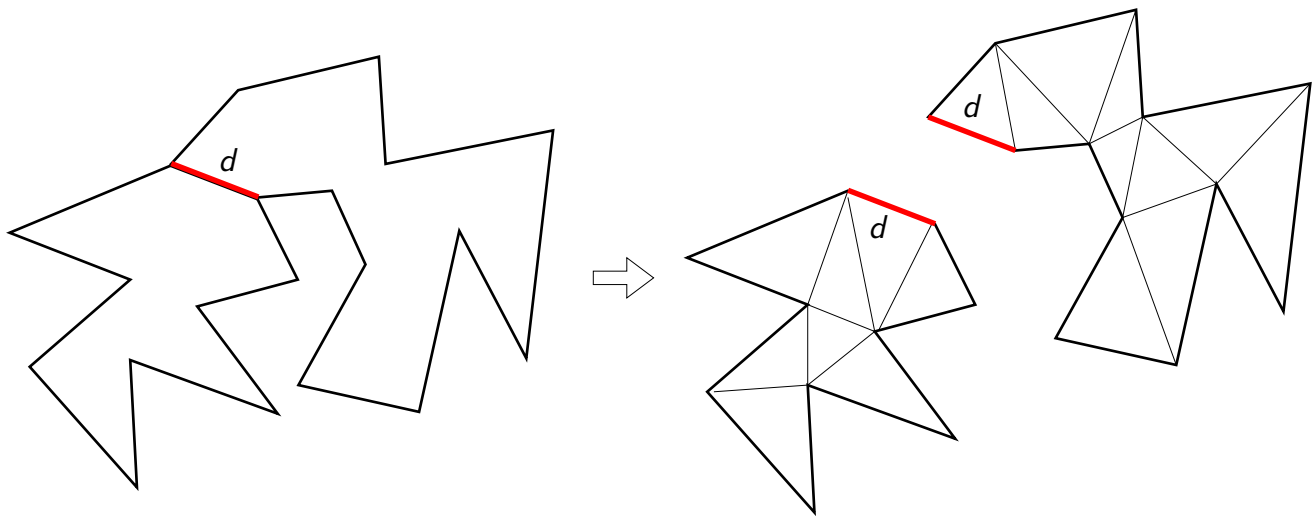
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triangulos de T formam orelhas de P.

Prova: (Feita na aula.)



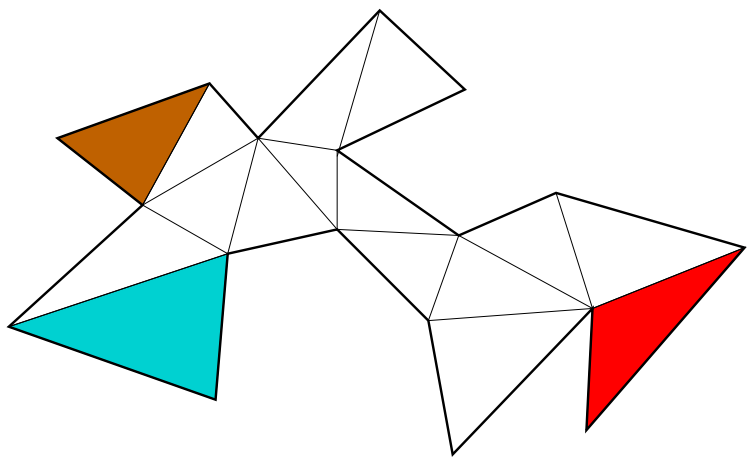
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triangulos de T formam orelhas de P.

Prova: (Feita na aula.)



Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

Coloração do grafo de triangulação

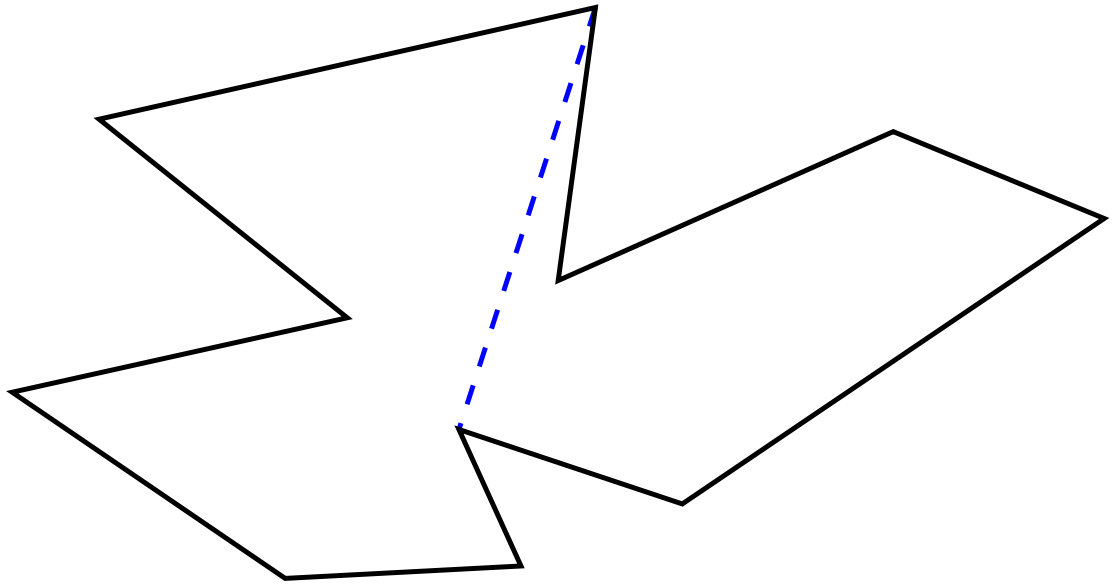
Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P. Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

Como usar estas coisas em um algoritmo?

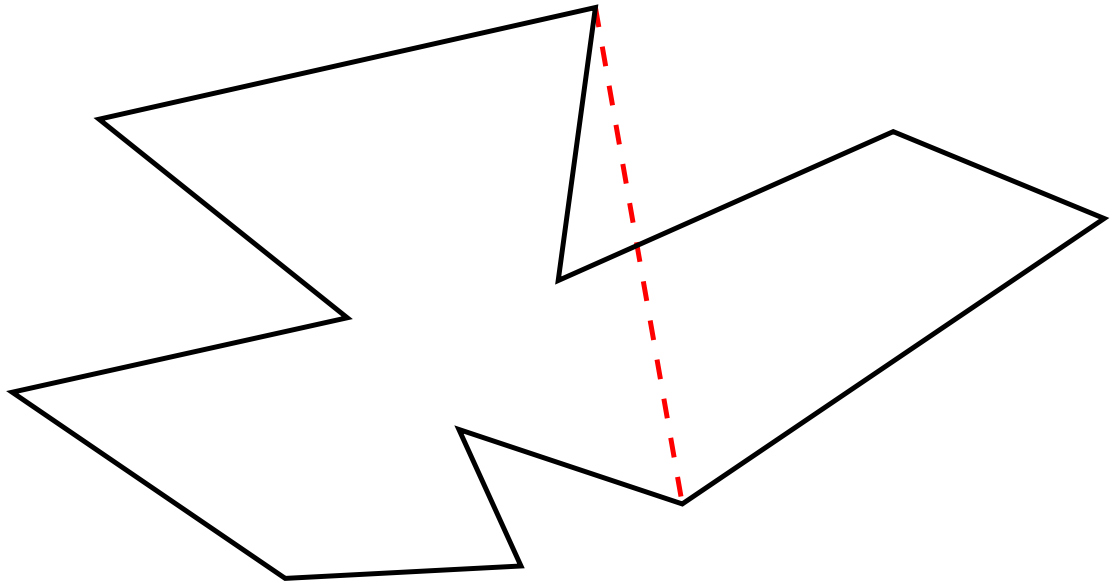
Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?



Teste de diagonal

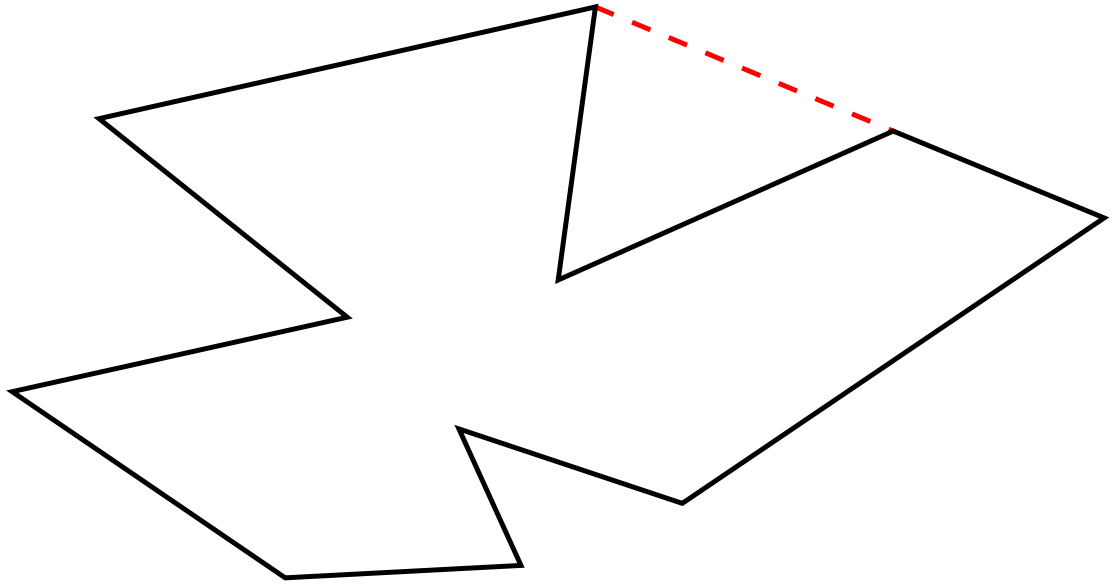
Como encontrar uma diagonal?



Interseção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?

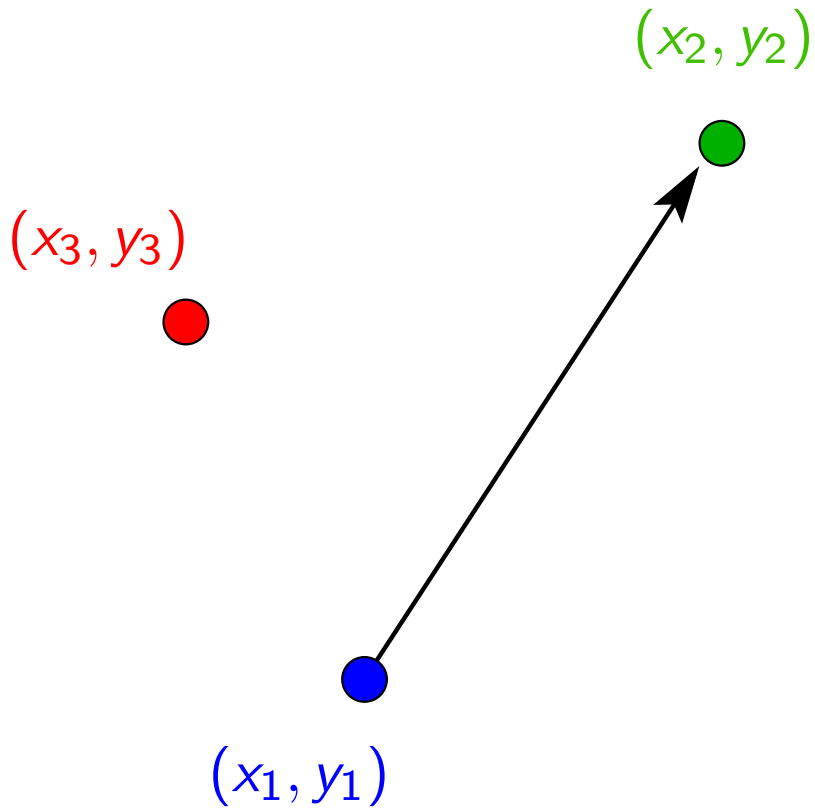


Interseção de segmentos: como decidir se
como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Pertinência: como decidir se
um segmento está dentro ou não do polígono?

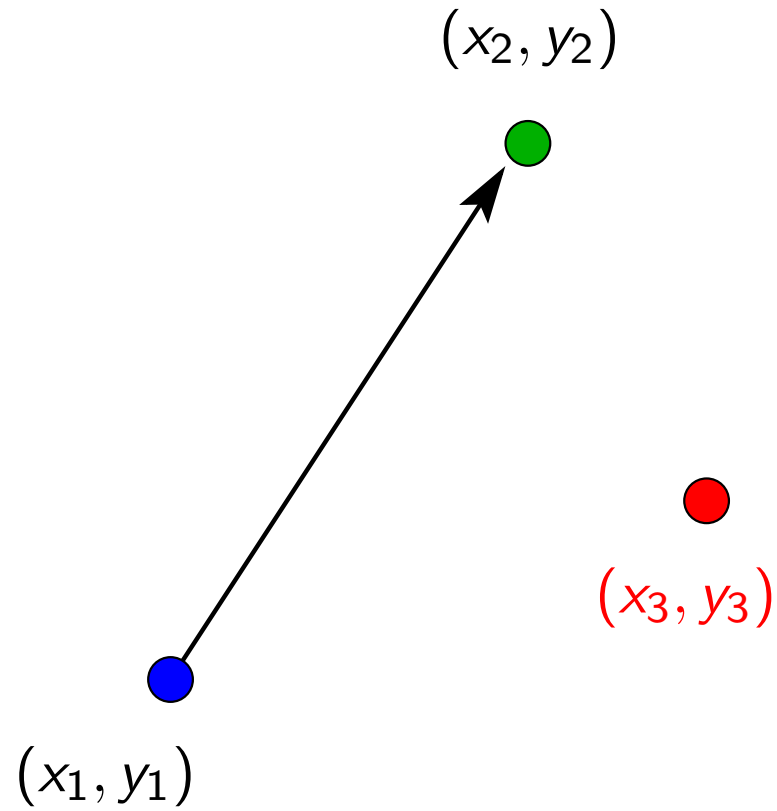
Predicados geométricos

Esquerda$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) =$ verdade



Predicados geométricos

Esquerda$(((x_1, y_1), ((x_2, y_2), (x_3, y_3)) =$ falso



Predicados geométricos

Esquerda$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$

Predicados geométricos

Esquerda$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$: sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Predicados geométricos

Esquerda$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$: sinal do determinante

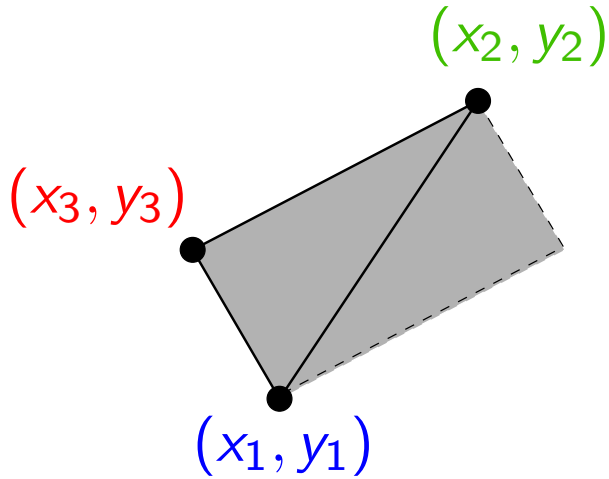
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Predicados geométricos

Esquerda($(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$): sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

O valor absoluto deste número é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3).



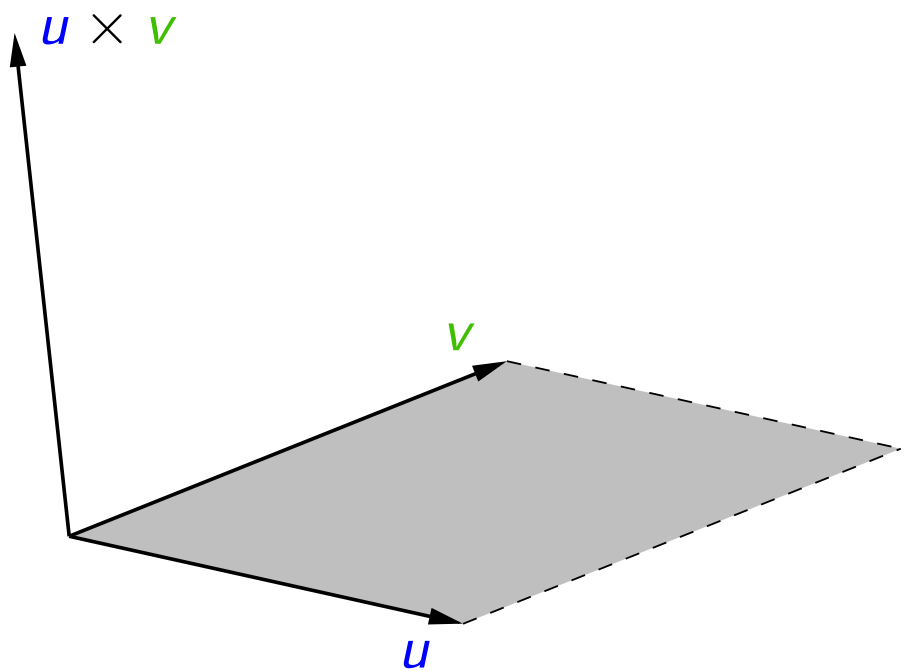
Recordação...

u e v: vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

Recordação...

u e v: vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

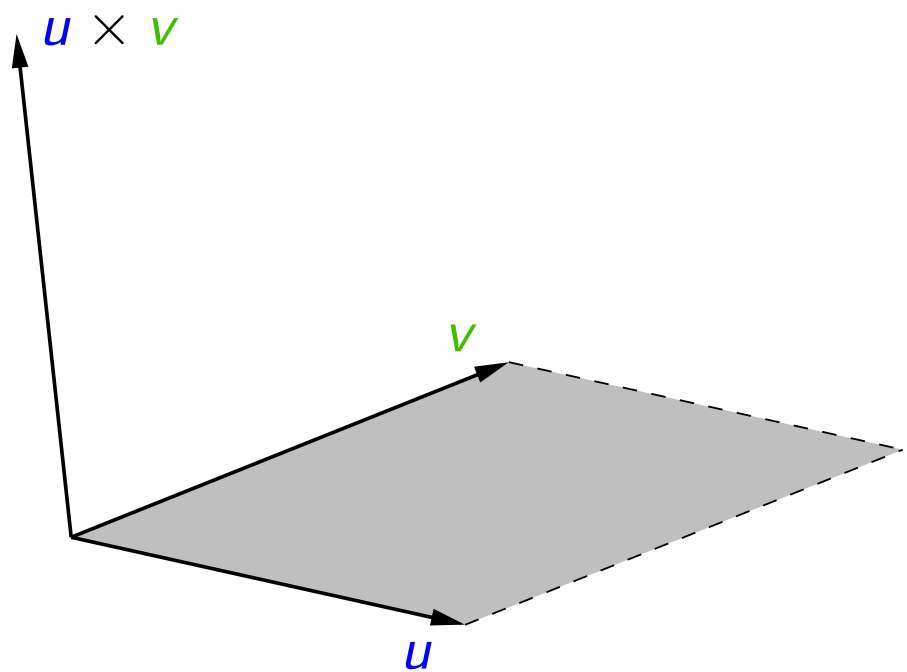
Produto vetorial $u \times v$: vetor perpendicular ao plano que contem u e v cujo comprimento é a área do parelalepípedo formado por u e v. Com que sentido?



Recordação...

u e v: vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

Produto vetorial $u \times v$: vetor perpendicular ao plano que contem u e v cujo comprimento é a área do parelalepípedo formado por u e v. Com que sentido?



Regra da mão direita: indicador na direção de u, dedo médio na direção de v; o polegar indica o sentido de $u \times v$.

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$
$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$
$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Produto vetorial

$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Alternativamente,

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Produto vetorial

$u = (u_1, u_2, u_3)$
$v = (v_1, v_2, v_3)$

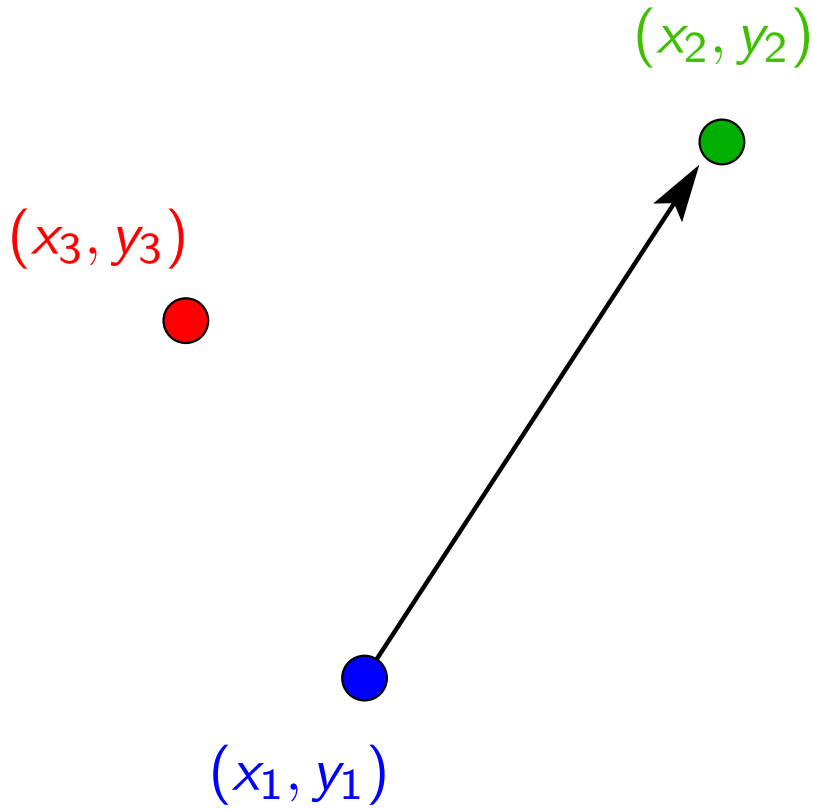
$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Alternativamente,

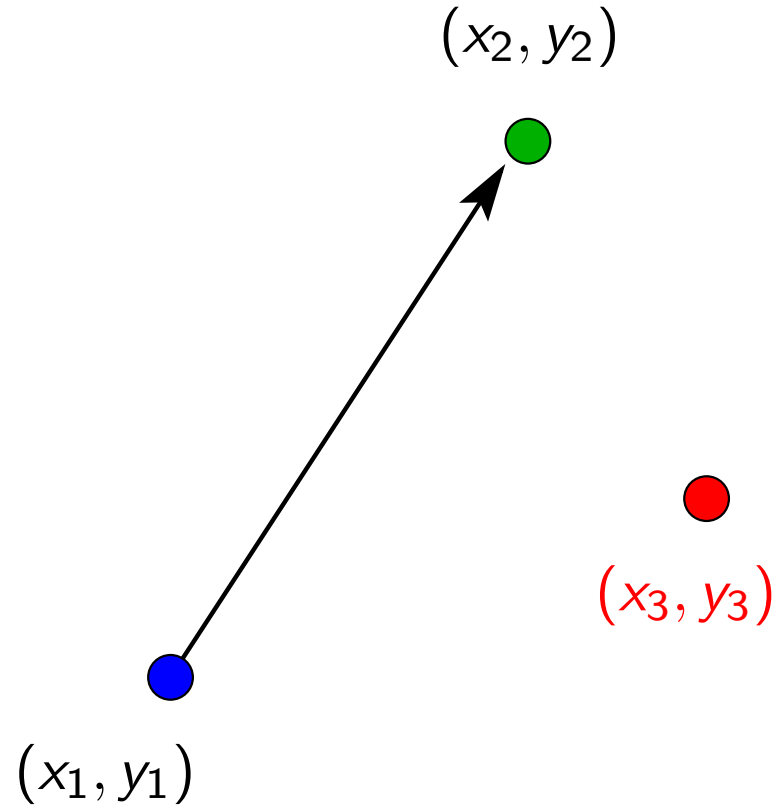
$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Como usar isso para decidir entre esquerda e direita?

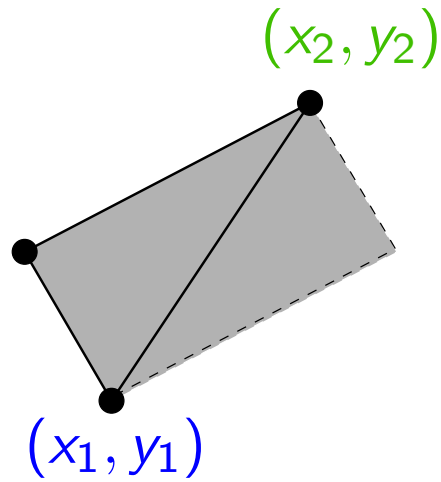
Esquerda e direita



Esquerda e direita

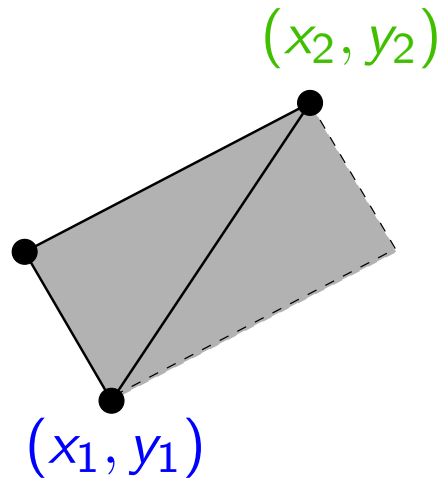


Esquerda e direita



Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

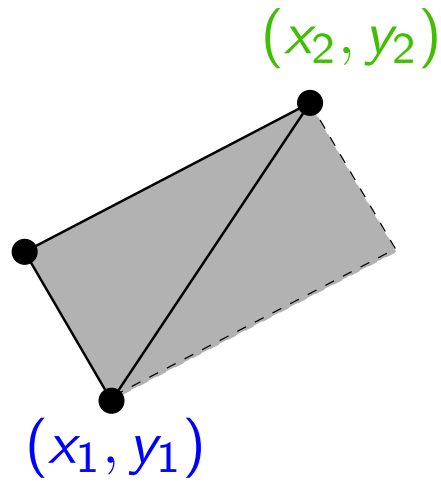
Esquerda e direita



Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

$$u \times v = (0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))$$

Esquerda e direita



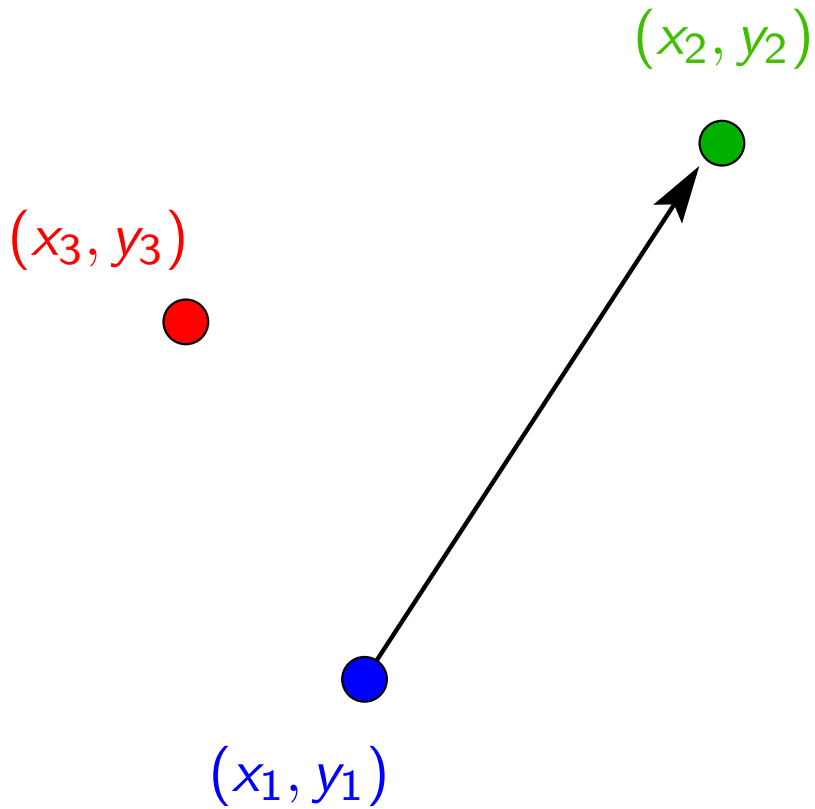
Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

$$u \times v = (0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))$$

Se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \geq 0$,
(x_3, y_3) está à esquerda, senão está à direita.

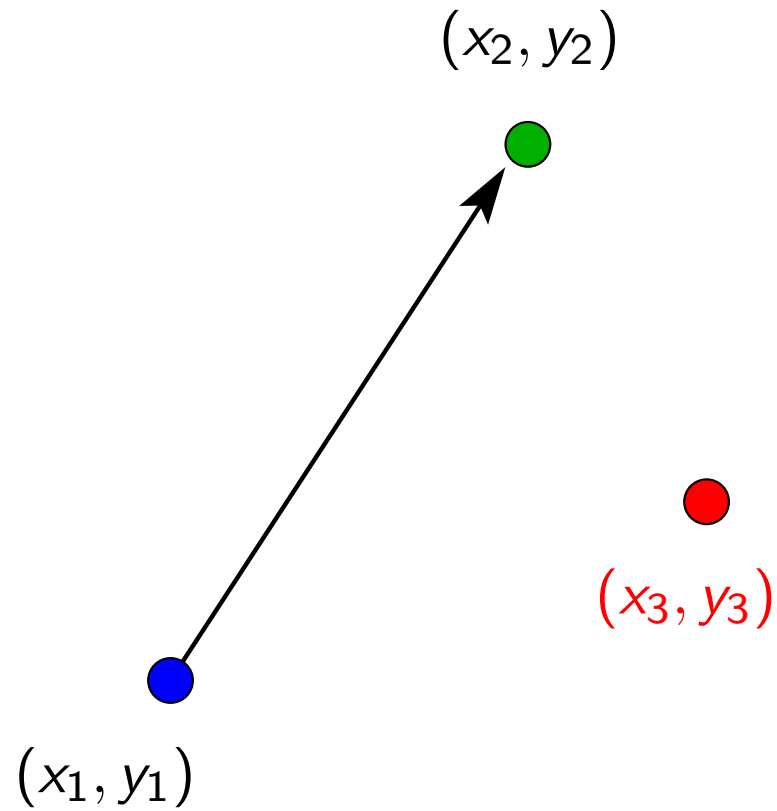
Predicados geométricos

Esquerda$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) =$ verdade



Predicados geométricos

Esquerda$(((x_1, y_1), ((x_2, y_2), (x_3, y_3)) = \text{falso}$



Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível.

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível.

```
#define X 0
#define Y 1
#define DIM 2 /* dimensão do espaço */

/* tipo ponto inteiro */
typedef int tPointi[DIM];

/* tipo ponto real */
typedef double tPointd[DIM];
```

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? Depende...

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? Depende...

Com vetor...

```
/* número máximo de pontos em um polígono */
#define PMAX 1000

/* tipo polígono de pontos inteiros */
typedef tPointi tPolygoni[PMAX];

/* tipo polígono de pontos reais */
typedef tPointd tPolygond[PMAX];
```

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

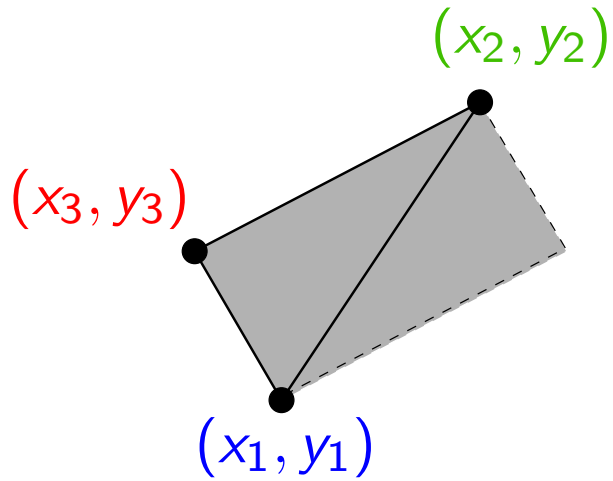
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3).



Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {
   return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]
          -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];
}
```

Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {
   return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]
          -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];
}
```

Com menos multiplicações e em pseudocódigo:

Área2(a, b, c)
1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
$(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Cálculos de área

Triângulo

Área2(a, b, c)

1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
$(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Polígono

Cálculos de área

Triângulo

Área2(a, b, c)
1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
$(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Polígono

ÁreaPolígono2(n, P)
1 $s \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 2$ **faça**
3 $s \leftarrow s +$Área2$(P[0], P[i], P[i + 1])$
4 **devolva** s

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por $\vec{ab}$

Esquerda$^+(a, b, c)$
1 **devolva** Área2$(a, b, c) > 0$

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por $\vec{ab}$

Esquerda$^+(a, b, c)$
1 **devolva** Área2$(a, b, c) > 0$

Ponto c à esquerda ou sobre a reta dada por $\vec{ab}$

Esquerda(a, b, c)
1 **devolva** Área2$(a, b, c) \geq 0$

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por $\vec{ab}$

Esquerda$^+(a, b, c)$
1 **devolva** Área2$(a, b, c) > 0$

Ponto c à esquerda ou sobre a reta dada por $\vec{ab}$

Esquerda(a, b, c)
1 **devolva** Área2$(a, b, c) \geq 0$

Pontos a, b e c são colineares

Colinear(a, b, c)
1 **devolva** Área2$(a, b, c) = 0$

Interseção de segmentos

Interseção própria entre ab e cd:
a interseção é um único ponto no interior dos segmentos.

```
IntersectaProp(a, b, c, d)
1  se Colinear(a, b, c) ou Colinear(a, b, d)
       ou Colinear(c, d, a) ou Colinear(c, d, b)
2     então devolva falso
3  devolva Xor(Esquerda+(a, b, c),Esquerda+(a, b, d))
              e Xor(Esquerda+(c, d, a),Esquerda+(c, d, b))
```

A rotina Xor devolve o
ou exclusivo entre duas expressões booleanas.

Interseção de segmentos

Ponto c está no segmento ab

Entre(a, b, c)
1 **se não** Colinear(a, b, c)
2 **então devolva** falso
3 **se** $a[X] \neq b[X]$ ▷ ab não é vertical
4 **então devolva** $a[X] \leq c[X] \leq b[X]$ **ou** $b[X] \leq c[X] \leq a[X]$
5 **senão devolva** $a[Y] \leq c[Y] \leq b[Y]$ **ou** $b[Y] \leq c[Y] \leq a[Y]$

Interseção de segmentos

Ponto c está no segmento ab

```
Entre(a, b, c)
1   se não Colinear(a, b, c)
2       então devolva falso
3   se a[X] ≠ b[X]                ▷ ab não é vertical
4       então devolva a[X] ≤ c[X] ≤ b[X] ou b[X] ≤ c[X] ≤ a[X]
5       senão devolva a[Y] ≤ c[Y] ≤ b[Y] ou b[Y] ≤ c[Y] ≤ a[Y]
```

Interseção entre ab e cd

```
Intersecta(a, b, c, d)
1   se IntersectaProp(a, b, c, d)
2       então devolva verdade
3   devolva Entre(a, b, c) ou Entre(a, b, d)
                ou Entre(c, d, a) ou Entre(c, d, b)
```

Dentro ou fora?

Candidata a diagonal $P[i]P[j]$ está no interior do polígono?

Está no cone das arestas vizinhas do polígono?

```
NoCone(n, P, i, j)
1  u ← i − 1 (mod n)
2  w ← i + 1 (mod n)
3  se Esquerda(P[u], P[i], P[w])                ▷ P[i] é convexo
4     então devolva Esquerda+(P[i], P[j], P[u]) e
                    Esquerda+(P[j], P[i], P[w])
5     senão devolva não (Esquerda(P[i], P[j], P[w]) e
                         Esquerda(P[j], P[i], P[u]))
```

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

QuaseDiagonal(n, P, i, j)

```
1  para k ← 0 até n − 1
2      ℓ ← k + 1 ( mod n)
3      se k ≠ i e k ≠ j e ℓ ≠ i e ℓ ≠ j
4          então se Intersecta(P[i], P[j], P[k], P[ℓ])
5                      então devolva falso
6  devolva verdade
```

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

QuaseDiagonal(n, P, i, j)

```
1  para k ← 0 até n − 1
2      ℓ ← k + 1 ( mod n)
3      se k ≠ i e k ≠ j e ℓ ≠ i e ℓ ≠ j
4          então se Intersecta(P[i], P[j], P[k], P[ℓ])
5                      então devolva falso
6  devolva verdade
```

Diagonal de fato...

Diagonal(n, P, i, j)

```
1  devolva NoCone(n, P, i, j) e NoCone(n, P, j, i)
               e QuaseDiagonal(n, P, i, j)
```

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

QuaseDiagonal(n, P, i, j)

```
1  para k ← 0 até n − 1
2      ℓ ← k + 1 ( mod n)
3      se k ≠ i e k ≠ j e ℓ ≠ i e ℓ ≠ j
4          então se Intersecta(P[i], P[j], P[k], P[ℓ])
5                      então devolva falso
6  devolva verdade
```

Diagonal de fato...

Diagonal(n, P, i, j)

```
1  devolva NoCone(n, P, i, j) e NoCone(n, P, j, i)
              e QuaseDiagonal(n, P, i, j)
```

Tempo de execução: $\Theta(n)$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

```
para i ← 0 até n − 3 faça
    para j ← i + 2 até n − 1 faça
        se Diagonal(n, P, i, j)      i e j vértices não adjacentes
```

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

```
para i ← 0 até n − 3 faça
    para j ← i + 2 até n − 1 faça
        se Diagonal(n, P, i, j)      i e j vértices não adjacentes
            determine os polígonos P1 e P2 obtidos
            da partição de P pela diagonal P[i]P[j]
```

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n-3$ faça
para $j \leftarrow i+2$ até $n-1$ faça
se Diagonal(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes
determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos
da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$
encontre recursivamente coleções D_1 e D_2
de diagonais que triangulem P_1 e P_2

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0\,..\,n-1]$ (vetor de n pontos)
Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

```
para i ← 0 até n − 3 faça
    para j ← i + 2 até n − 1 faça
        se Diagonal(n, P, i, j)      i e j vértices não adjacentes
            determine os polígonos P1 e P2 obtidos
            da partição de P pela diagonal P[i]P[j]
            encontre recursivamente coleções D1 e D2
            de diagonais que triangulem P1 e P2
            devolva D1 ∪ D2 ∪ {P[i]P[j]}
```

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça
  para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça
    se Diagonal(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes
      determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos
      da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$
      encontre recursivamente coleções D_1 e D_2
      de diagonais que triangulem P_1 e P_2
      devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça
  para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça
    se Diagonal(n, P, i, j) *i e j vértices não adjacentes*
      determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos
      da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$
      encontre recursivamente coleções D_1 e D_2
      de diagonais que triangulem P_1 e P_2
      devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Consumo de tempo no pior caso:

$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n^3)$, onde $n_1 + n_2 = n + 2$.

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio
se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça
para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça
se Diagonal(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes
determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos
da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$
encontre recursivamente coleções D_1 e D_2
de diagonais que triangulem P_1 e P_2
devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Consumo de tempo no pior caso:

$$T(n) = T(n-1) + \mathrm{O}(n^3) = \mathrm{O}(n^4)$$

Um primeiro algoritmo de triangulação

```
Triang-n4(n, P)
 1   se n > 3
 2      então i ← 0          j ← 2
 3            enquanto não Diagonal(n, P, i, j) faça
 4               j ← j + 1
 5               se j = n
 6                  então i ← i + 1
 7                        j ← i + 2
 8            imprima {i, j}
 9            n1 ← j − i + 1
10            n2 ← n − n1 + 2
11            P1[0 . . n1 − 1] ← P[i . . j]
12            P2[0 . . n2 − 1] ← P[0 . . i] · P[j . . n − 1]
13            Triang-n4(n1, P1)
14            Triang-n4(n2, P2)
```

Um primeiro algoritmo de triangulação

```
Triang-n4(n, P)
 1   se n > 3
 2      então i ← 0          j ← 2
 3            enquanto não Diagonal(n, P, i, j) faça
 4               j ← j + 1
 5               se j = n
 6                  então i ← i + 1
 7                        j ← i + 2
 8            imprima {i, j}
 9            n1 ← j − i + 1
10            n2 ← n − n1 + 2
11            P1[0 . . n1 − 1] ← P[i . . j]
12            P2[0 . . n2 − 1] ← P[0 . . i] · P[j . . n − 1]
13            Triang-n4(n1, P1)
14            Triang-n4(n2, P2)
```

Pior caso: $\mathrm{O}(n^3)$ chamadas a Diagonal

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)
1 $j \leftarrow (i-1) \bmod n$
2 $k \leftarrow (i+1) \bmod n$
3 **devolva** Diagonal(n, P, j, k)

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

```
PontaDeOrelha(n, P, i)
1  j ← (i − 1) mod n
2  k ← (i + 1) mod n
3  devolva Diagonal(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P)
1  se n > 3
2     então i ← 0
3           enquanto não PontaDeOrelha(n, P, i) faça
4              i ← i + 1
5           imprima {(i − 1) mod n, (i + 1) mod n}
6           m, P' ← Remove(n, P, i)
7           Triang-n3(m, P')
```

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

```
PontaDeOrelha(n, P, i)
1  j ← (i − 1) mod n
2  k ← (i + 1) mod n
3  devolva Diagonal(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P)          ▷ sem recursão de cauda
1  enquanto n > 3
2      i ← 0
3      enquanto não PontaDeOrelha(n, P, i) faça
4          i ← i + 1
5      imprima {(i − 1) mod n, (i + 1) mod n}
6      P[i .. n − 2] ← P[i + 1 .. n − 1]    ▷ remove o i
7      n ← n − 1
```

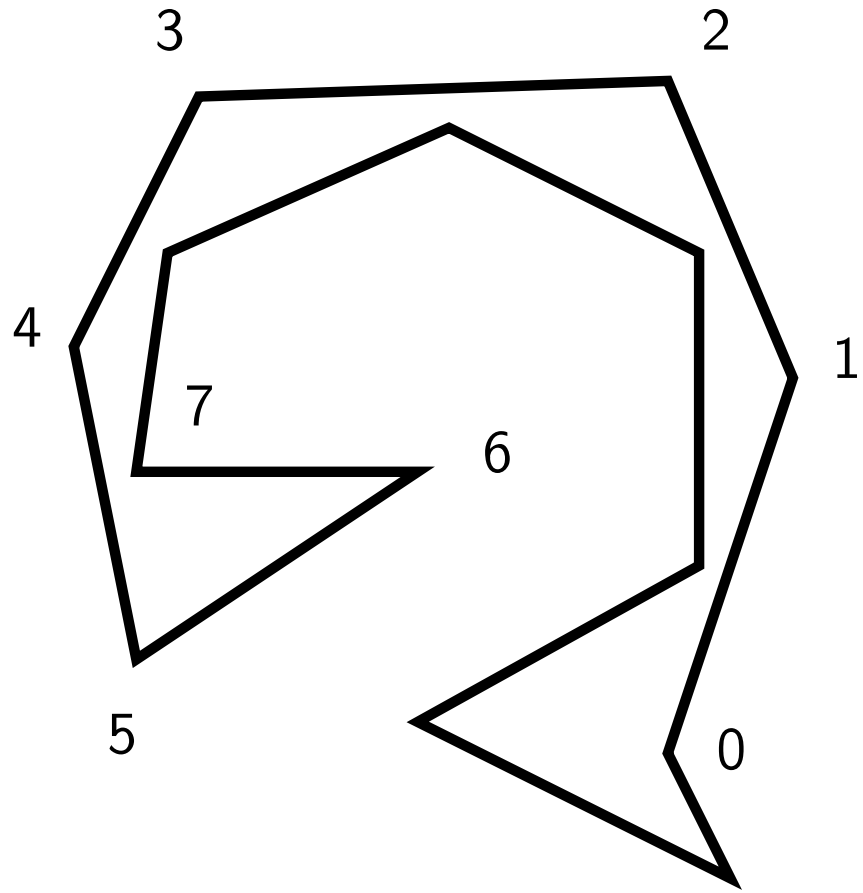
Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)
1 $j \leftarrow (i-1) \bmod n$
2 $k \leftarrow (i+1) \bmod n$
3 **devolva** Diagonal(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P) ▷ sem recursão de cauda
1 **enquanto** $n > 3$
2 $i \leftarrow 0$
3 **enquanto não** PontaDeOrelha(n, P, i) **faça**
4 $i \leftarrow i+1$
5 **imprima** $\{(i-1) \bmod n, (i+1) \bmod n\}$
6 $P[i \,..\, n-2] \leftarrow P[i+1 \,..\, n-1]$ ▷ remove o i
7 $n \leftarrow n-1$

Pior caso: $\Theta(n^2)$ chamadas a Diagonal

Exemplo ruim



Triangulação em $O(n^2)$

```
Triang-n2(n, P)
 1   MarcaOrelha(P)
 2   enquanto n > 3 faça
 3       v2 ← P
 4       enquanto não orelha[v2] faça
 5           v2 ← prox[v2]
 6       v1 ← prev[v2]
 7       v3 ← prox[v2]
 8       imprima {vert[v1], vert[v3]}
 9       prox[v1] ← v3
10       prev[v3] ← v1
11       P ← v3
12       n ← n − 1
13       orelha[v1] ← PontaDeOrelha(P, v1)
14       orelha[v3] ← PontaDeOrelha(P, v3)
```

Triangulação em $O(n^2)$

```
Triang-n2(n, P)
 1  MarcaOrelha(P)
 2  enquanto n > 3 faça
 3      v2 ← P
 4      enquanto não orelha[v2] faça
 5          v2 ← prox[v2]
 6      v1 ← prev[v2]
 7      v3 ← prox[v2]
 8      imprima {vert[v1], vert[v3]}
 9      prox[v1] ← v3
10      prev[v3] ← v1
11      P ← v3
12      n ← n − 1
13      orelha[v1] ← PontaDeOrelha(P, v1)
14      orelha[v3] ← PontaDeOrelha(P, v3)
```

Pior caso: $\Theta(n)$ chamadas a Diagonal.

Orelhas com listas ligadas

PontaDeOrelha(P, v)
1 $u \leftarrow prev[v]$
2 $w \leftarrow prox[v]$
3 **devolva** Diagonal(P, u, w)

Orelhas com listas ligadas

```
PontaDeOrelha(P, v)
1  u ← prev[v]
2  w ← prox[v]
3  devolva Diagonal(P, u, w)
```

```
MarcaOrelha(P)
1  v ← P
2  repita
3     u ← prev[v]
4     w ← prox[v]
5     orelha[v] ← Diagonal(P, u, w)
6     v ← w
7  até que v = P
```

Orelhas com listas ligadas

```
PontaDeOrelha(P, v)
1  u ← prev[v]
2  w ← prox[v]
3  devolva Diagonal(P, u, w)
```

```
MarcaOrelha(P)
1  v ← P
2  repita
3     u ← prev[v]
4     w ← prox[v]
5     orelha[v] ← Diagonal(P, u, w)
6     v ← w
7  até que v = P
```

Diagonal também teria que ser reescrita para listas ligadas.

Exercícios

1. É verdade que um vértice de um polígono ou é ponta de orelha ou existe uma diagonal do polígono com extremo nele?
2. Qual é a relação da pergunta anterior com o consumo de tempo do algoritmo Triang-n4?
3. Escreva um algoritmo PertenceConvexo(P, n, q) que decide se um ponto q pertence ou não ao polígono convexo P, dado no vetor $P[0\,..\,n-1]$. Dica: Use a rotina Área2.
4. A ideia do algoritmo do exercício anterior funciona também caso o polígono P não seja convexo? Elabore sobre isso.