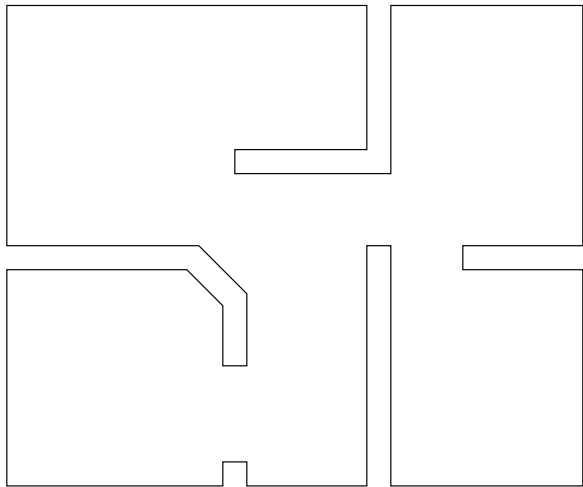
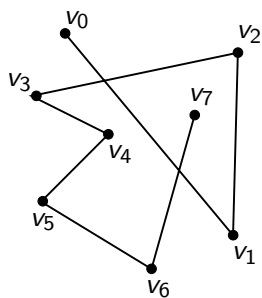


Teorema da Galeria de Arte

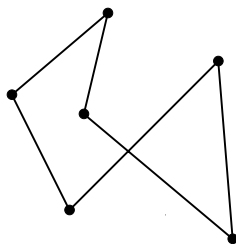


Curvas poligonais

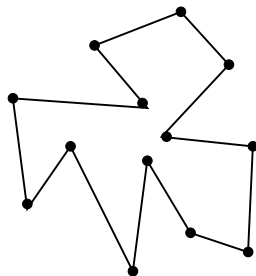
Curva poligonal: sequência $(v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde v_0, \dots, v_{n-1} são pontos em \mathbb{R}^2 e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} ($i = 0, \dots, n-2$).



curva poligonal



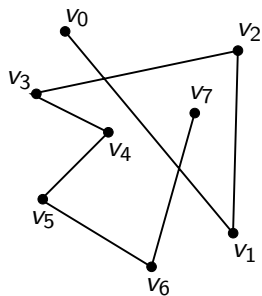
fechada não-simples



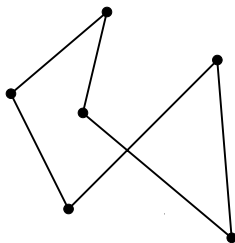
fechada simples

Curvas poligonais

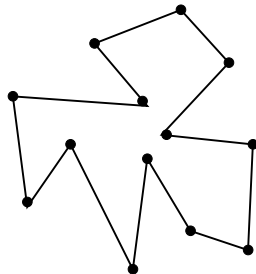
Curva poligonal: sequência $(v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde v_0, \dots, v_{n-1} são pontos em \mathbb{R}^2 e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} ($i = 0, \dots, n-2$).



curva poligonal



fechada não-simples



fechada simples

fechada: $v_0 = v_{n-1}$

simples: não se auto-intersecta

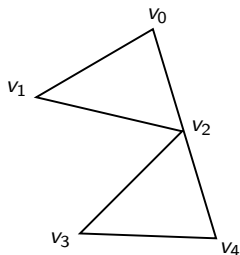
Polígonos

Teorema de Jordan: toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva.

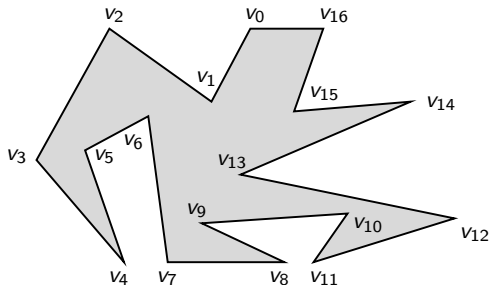
Polígonos

Teorema de Jordan: toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões: o *interior* e o *exterior* da curva.

Polígono: a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples.



curva poligonal fechada não-simples



polígono

Problema

δP : fronteira do polígono P

Note que $\partial P \subseteq P$.

Problema

δP : fronteira do polígono P

Note que $\partial P \subseteq P$.

Pontos p e q de P **vêm** ou **enxergam** um ao outro se o segmento pq está inteiramente contido em P .

Ademais, p e q se vêem **claramente** se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Problema

δP : fronteira do polígono P

Note que $\partial P \subseteq P$.

Pontos p e q de P **vêm** ou **enxergam** um ao outro se o segmento pq está inteiramente contido em P .

Ademais, p e q se vêem **claramente** se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Guarda: um ponto de P

Um conjunto de guardas **cobre** ou **guarda** P se todo ponto de P pode ser visto por um dos guardas do conjunto.

Problema

δP : fronteira do polígono P

Note que $\partial P \subseteq P$.

Pontos p e q de P **vêm** ou **enxergam** um ao outro se o segmento pq está inteiramente contido em P .

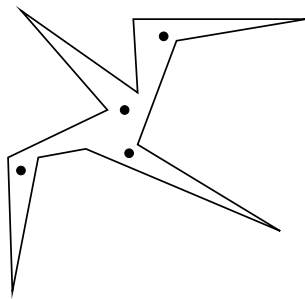
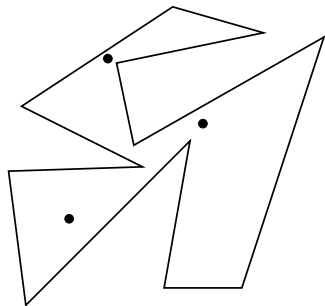
Ademais, p e q se vêm **claramente** se $pq \cap \delta P \subseteq \{p, q\}$.

Guarda: um ponto de P

Um conjunto de guardas **cobre** ou **guarda** P se todo ponto de P pode ser visto por um dos guardas do conjunto.

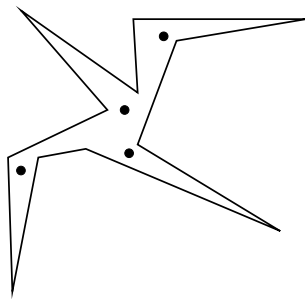
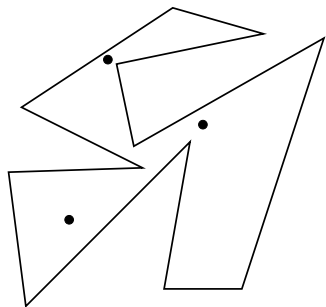
Problema: Dado n , determinar, como função de n , o número mínimo de guardas suficientes para cobrir um polígono arbitrário com n vértices.

Exemplo



Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

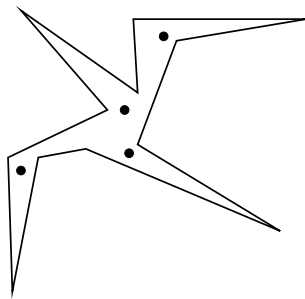
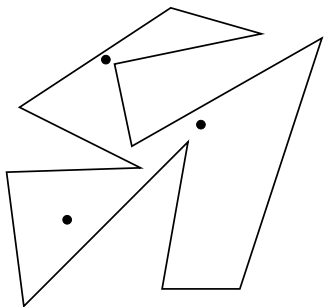
Exemplo



Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

É possível usarmos menos guardas?

Exemplo



Polígono com 12 vértices coberto por 3 guardas
e um outro coberto por 4 guardas.

É possível usarmos menos guardas?

Há polígono de 12 vértices que precise de mais guardas?

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos um polígono P

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários
para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

Fácil: $G(n) \leq n$ (como prova?)

(O que acontece no \mathbb{R}^3 ?)

Problema

$g(P)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P

$G(n)$ menor número de guardas necessários para cobrirmos qualquer polígono com n vértices:

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}$$

Problema: Quanto vale $G(n)$?

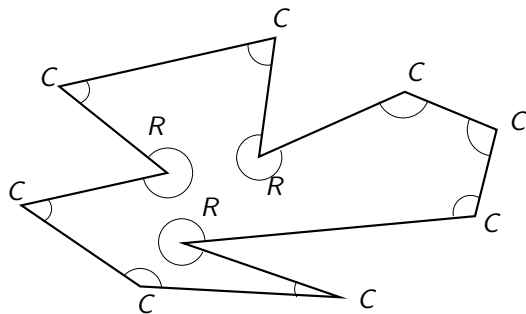
Fácil: $G(n) \leq n$ (como prova?)

(O que acontece no \mathbb{R}^3 ?)

$G(3) = 1$ pois todo polígono **convexo** pode ser coberto por um único guarda e todo triângulo é convexo.

Vértices convexos e reflexos

Um vértice é **reflexo** (ou **côncavo**) se o seu ângulo interior é maior do que π . É **convexo** caso contrário.



Um polígono e seus vértices reflexos (R) e convexos (C).

Outros valores de $G(n)$

Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.

Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.

Outros valores de $G(n)$

Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.

Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.

Polígonos de 5 vértices podem ter até 2 vértices reflexos.

Ainda assim, pode-se verificar que $G(5) = 1$.

Outros valores de $G(n)$

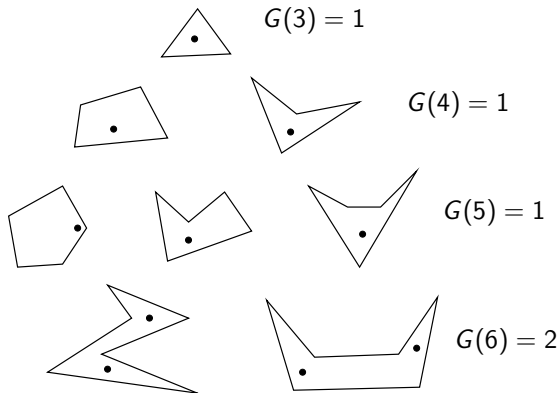
Quadriláteros têm no máximo um vértice reflexo.

Disso, é fácil concluir que $G(4) = 1$.

Polígonos de 5 vértices podem ter até 2 vértices reflexos.

Ainda assim, pode-se verificar que $G(5) = 1$.

Para alguns polígonos de 6 vértices: dois guardas.

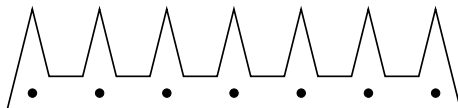


Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

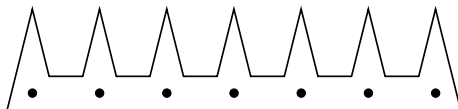
Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.



Exemplo onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.



Exemplo onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

Primeira prova: Chvátal

Prova que veremos: Fisk

Ingredientes:

triangulação de polígonos e coloração de grafos

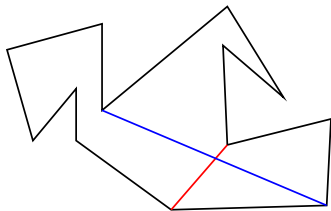
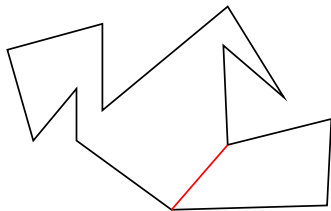
Triangulação de polígonos

Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Triangulação de polígonos

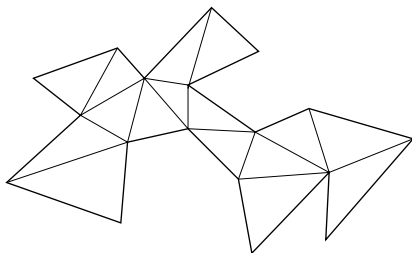
Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Diagonais uv e wz distintas de P **se cruzam** se $uv \cap wz \not\subseteq \{u, v, w, z\}$.



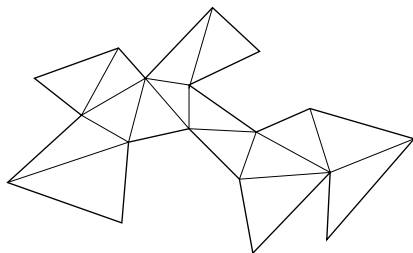
Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

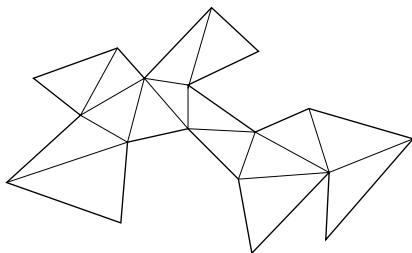
Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma k -coloração (ou é k -colorível) se existe uma função $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma **k -coloração** (ou é **k -colorível**) se existe uma função $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

P : polígono

T : triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e $uv \in E$ sse uv está em T

Coloração de grafos

Um grafo $G = (V, E)$ tem uma **k -coloração** (ou é **k -colorível**) se existe uma função $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para toda aresta uv em E .

P : polígono

T : triangulação de P

$G_T = (V, E)$ grafo onde V são os vértices de P e
 $uv \in E$ sse uv está em T

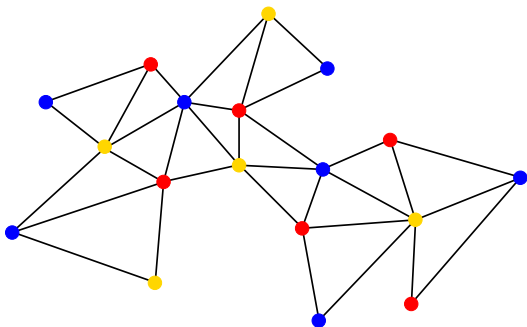
G_T é um grafo **outerplanar**

(planar com todos os vértices na face externa)

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

Coloração de grafos

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.



Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P .

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.

Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P .

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P .

Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto.

Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P .

Teorema de Chvátal

Teorema da Galeria de Arte: Dado um polígono com n vértices, existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.

Prova: Seja P um polígono com n vértices.
Pelo teorema 1, existe uma triangulação T de P .

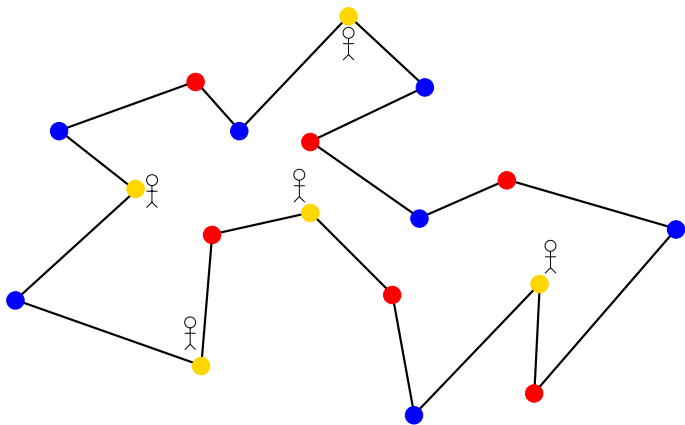
Pelo teorema 2, o grafo G_T tem uma 3-coloração.

Se colocarmos um guarda em cada um dos vértices de G_T de uma das cores, o polígono P está coberto.

Isso porque todo triângulo de T tem um vértice de cada uma das três cores, e os triângulos de T cobrem P .

Uma das cores é usada no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vezes na coloração. □

Exemplo



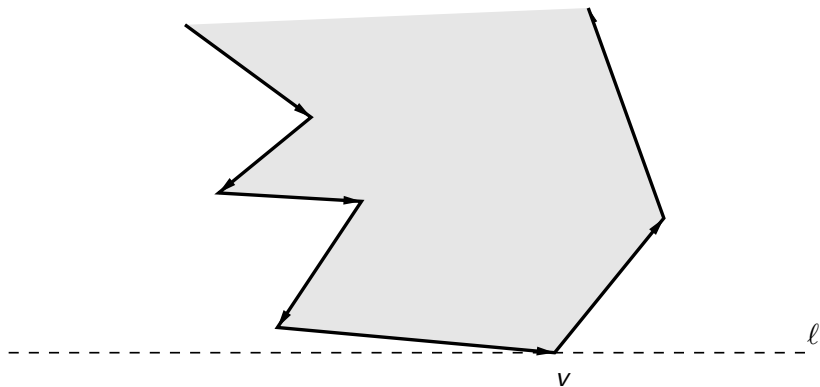
Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula.)



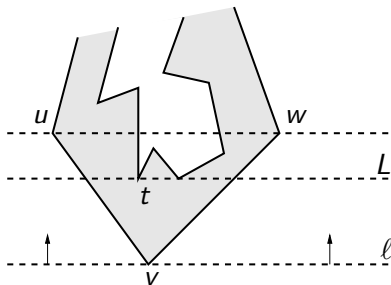
Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



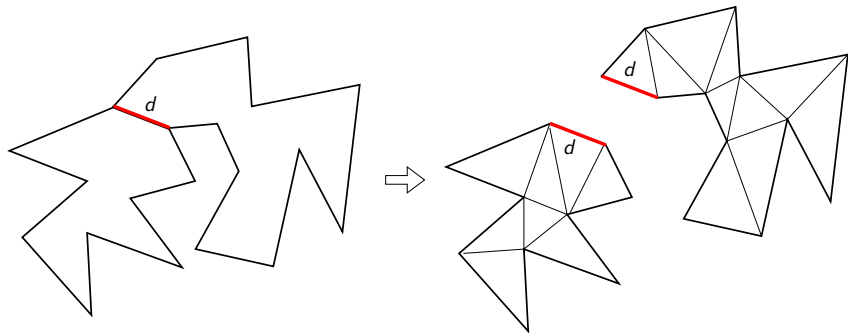
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Lema extra (soma dos ângulos): A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\pi$.

Prova: Consequência direta do Teorema da Triangulação.