Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP
http://www.ime.usp.br/~cris/

segundo semestre de 2020

Introdução

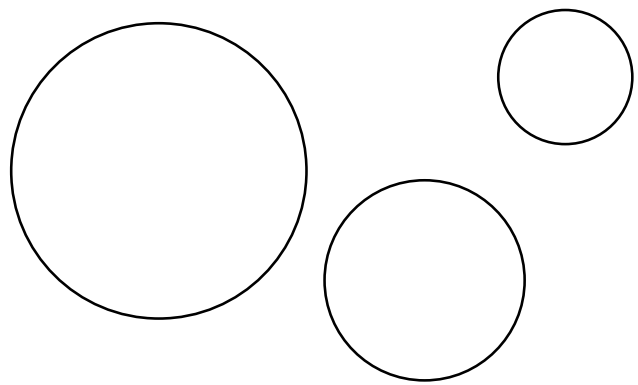
Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)

Introdução

Antiguidade:

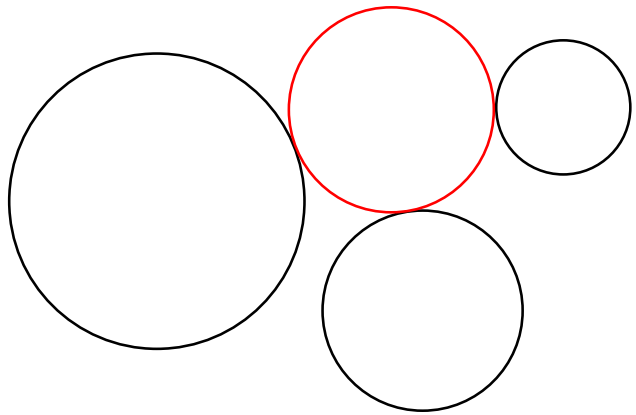
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Introdução

Antiguidade:

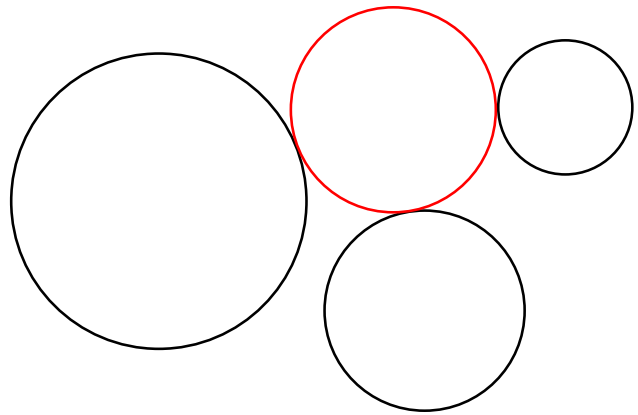
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Introdução

Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)

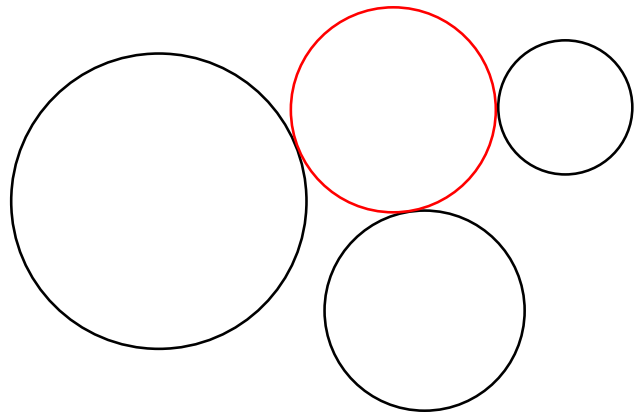


Solução de Euclides: 508 operações "elementares"

Introdução

Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 aC)



Solução de Euclides: 508 operações "elementares"

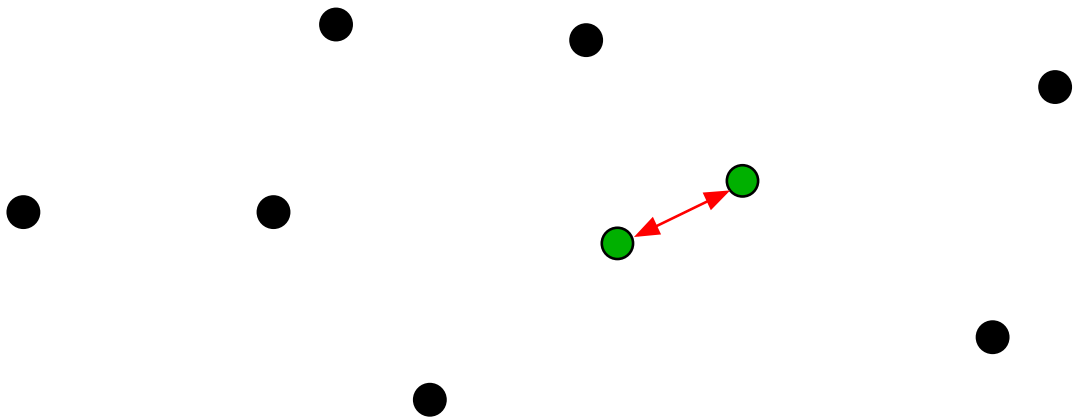
Solução de Lemoine (1902): menos de 200 operações

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

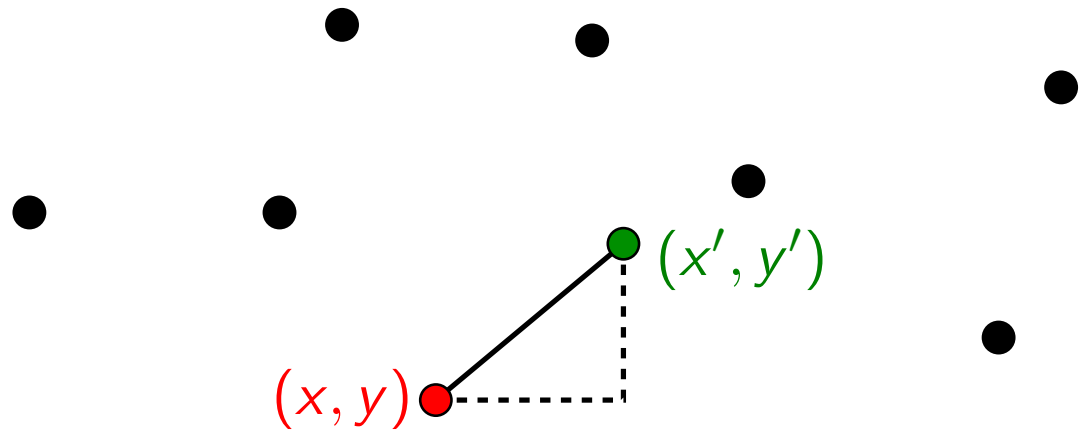
Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.



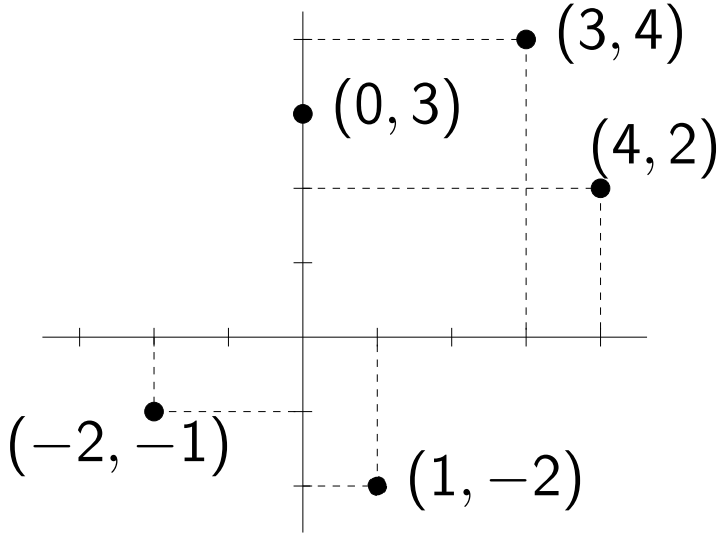
Lembre-se que, para dois pontos (x, y) e (x', y') no plano,

$$\text{Dist}(x, y, x', y') \;=\; \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$.

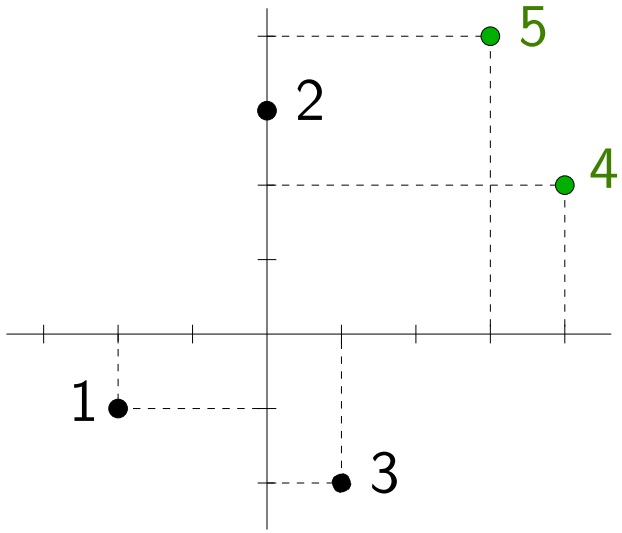


X	−2	0	1	3	4
Y	−1	3	−2	4	2
	1	2	3	4	5

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$.



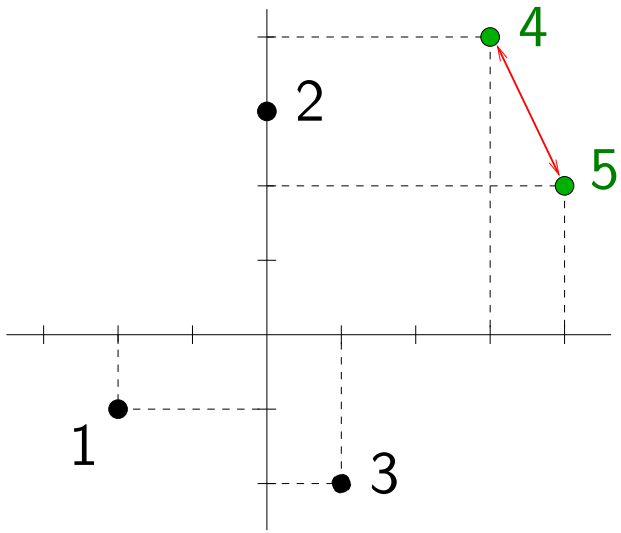
X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Saída: índices i e j indicando
dois pontos à distância mínima.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$.



X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
	1	2	3	4	5

Saída: menor distância entre dois pontos da coleção.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão à distância mínima.

Entrada: vetores $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

```
Elementar(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3      para j ← 1 até i − 1 faça
 4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Algoritmo elementar

```
Elementar(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3      para j ← 1 até i − 1 faça
 4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Algoritmo elementar

Elementar(X, Y, n)

```
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Algoritmo elementar

```
Elementar(X, Y, n)
1  d ← +∞
2  para i ← 2 até n faça
3      para j ← 1 até i − 1 faça
4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

Algoritmo elementar

```
Elementar(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3      para j ← 1 até i − 1 faça
 4          se Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5              então d ← Dist(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

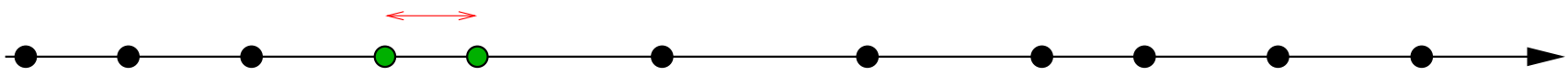
Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

É possível projetar um algoritmo mais eficiente que este?

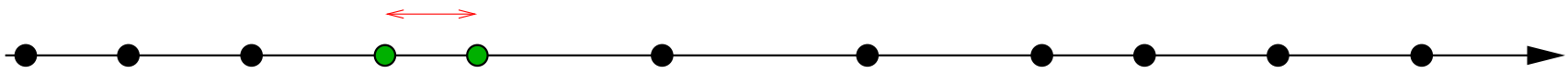
Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.

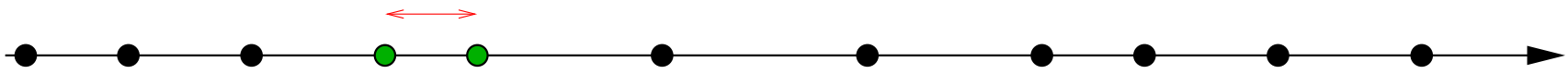


Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão à distância mínima.



Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Problema com essa solução:

não sei como generalizá-la para o plano...

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

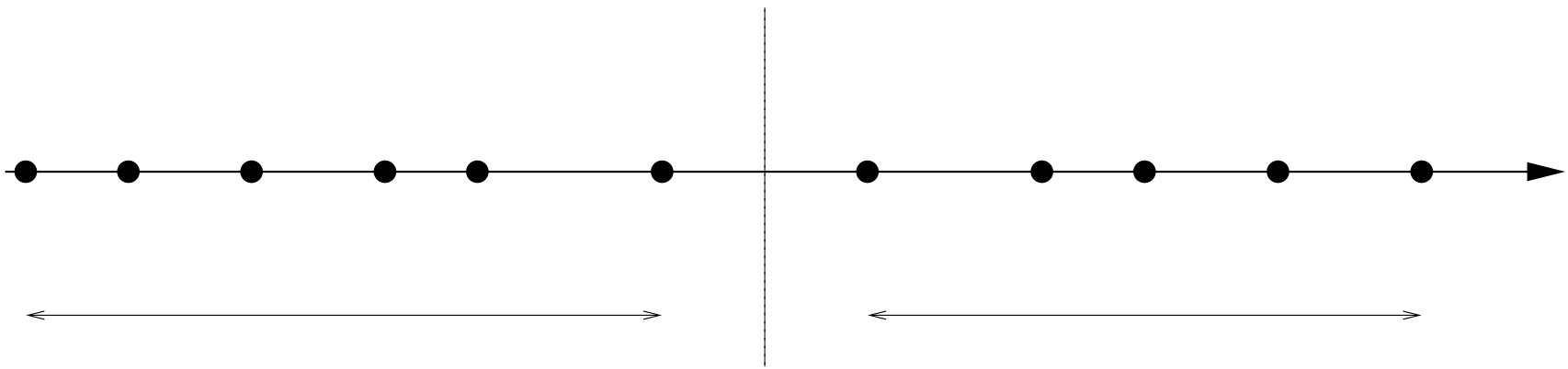
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



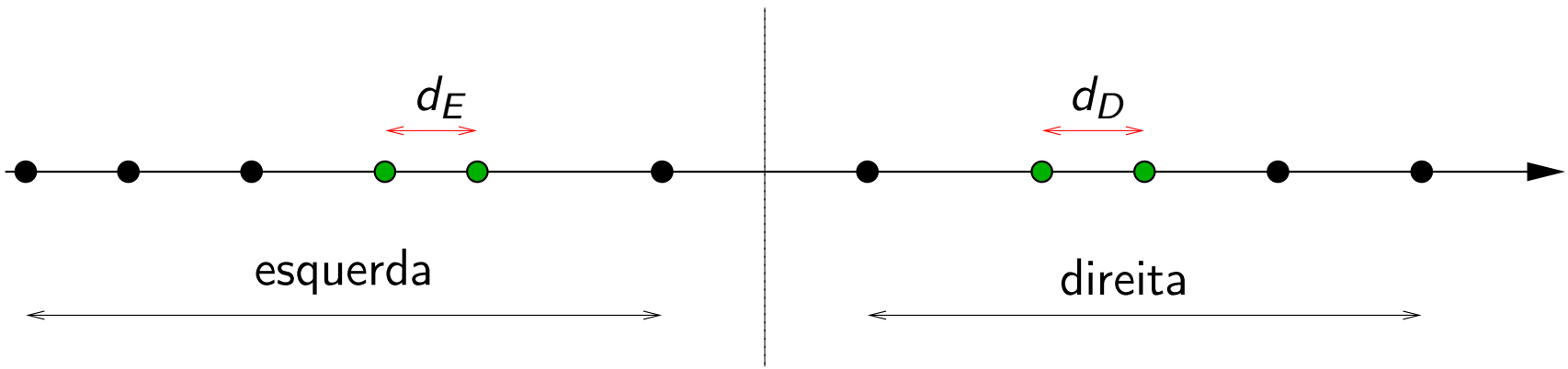
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



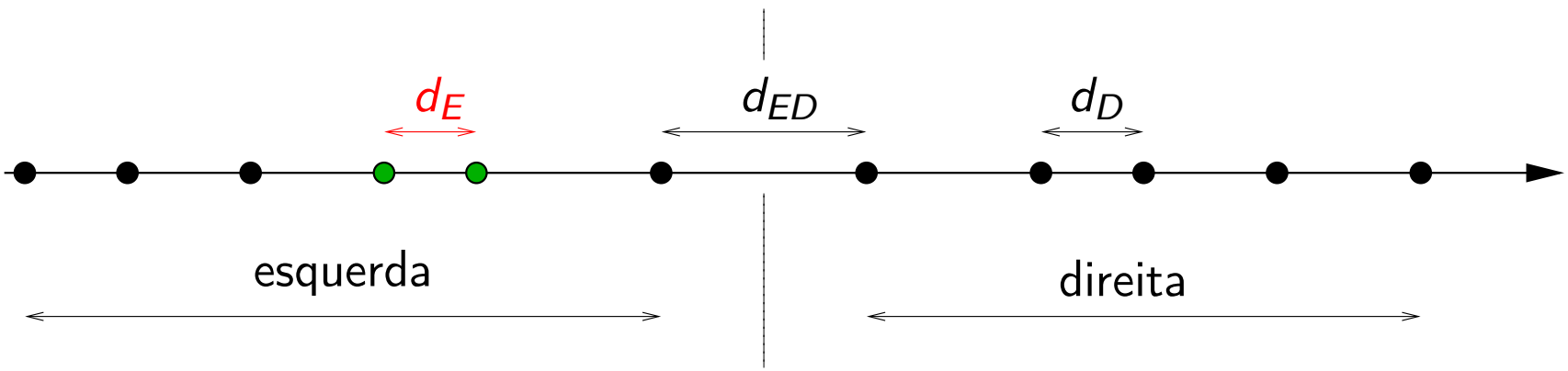
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)

1. MergeSort$(X, 1, n)$
2. devolva DistânciaRetaRec $(X, 1, n)$

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)
1. MergeSort$(X, 1, n)$
2. devolva DistânciaRetaRec $(X, 1, n)$

DistânciaRetaRec: divisão e conquista.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DistânciaReta(X, n)
1. MergeSort$(X, 1, n)$
2. devolva DistânciaRetaRec $(X, 1, n)$

DistânciaRetaRec: divisão e conquista.

Tempo consumido pelo DistânciaReta:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DistânciaRetaRec.

Par mais próximo na reta

```
DistânciaRetaRec (X, p, r)    ▷ Divisão e conquista
 1  se r ≤ p + 1
 2      então se r = p
 3                então devolva +∞
 4                senão devolva X[r] − X[p]
 5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
 6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
 7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
 8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
 9            devolva d
```

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 1
2      então se r = p
3                então devolva +∞
4                senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$.

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 1
2      então se r = p
3                então devolva +∞
4                senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Par mais próximo na reta

DistânciaRetaRec (X, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 1
2      então se r = p
3                então devolva +∞
4                senão devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1. MergeSort($X, 1, n$)
2. devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1. MergeSort($X, 1, n$)
2. devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

MergeSort consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DistânciaRetaRec consome tempo $\Theta(n)$.

Par mais próximo na reta

Voltando...

DistânciaReta(X, n)
1. MergeSort($X, 1, n$)
2. devolva DistânciaRetaRec ($X, 1, n$)

MergeSort consome tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

DistânciaRetaRec consome tempo $\Theta(n)$.

Tempo consumido pelo DistânciaReta: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo no plano

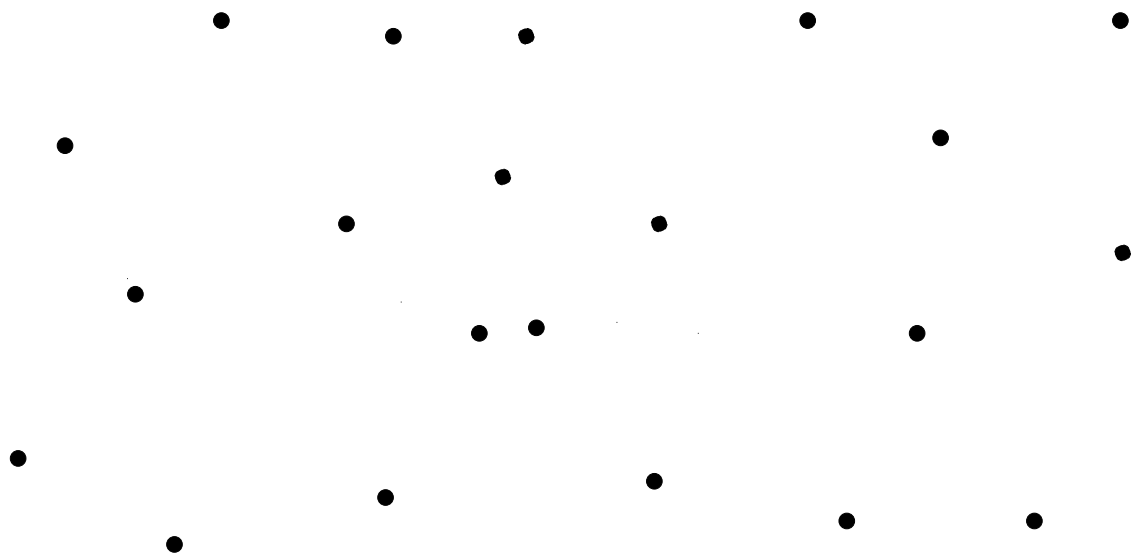
Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

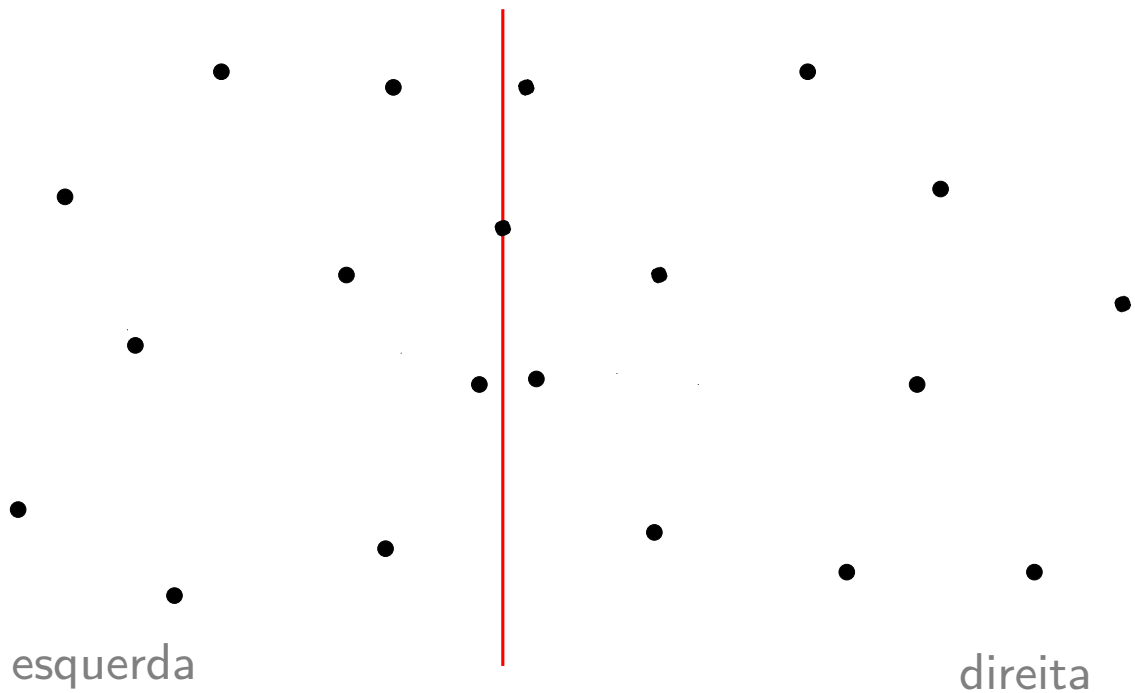


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide...

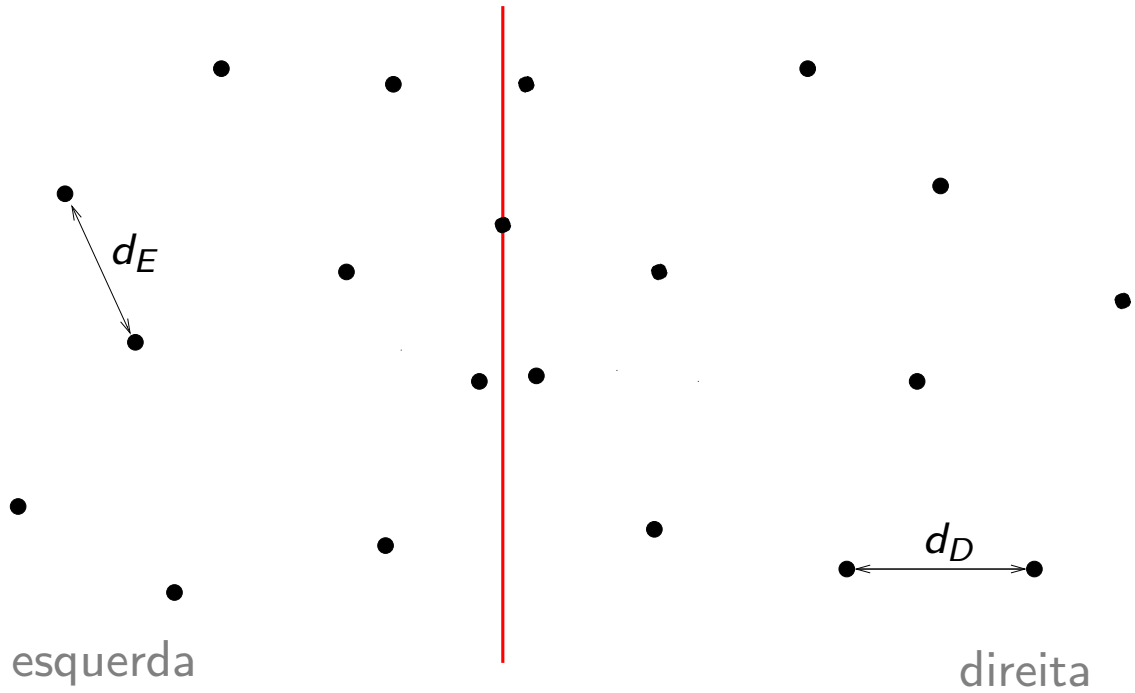


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista...

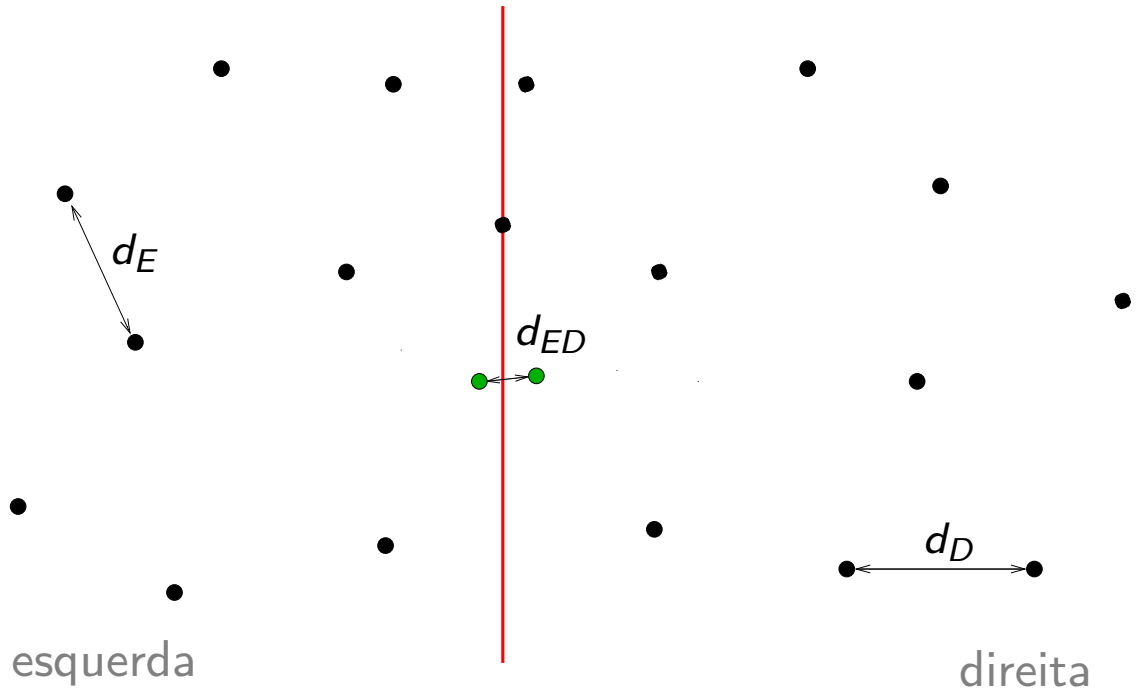


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa ideia para o plano?

Divide... Conquista... Combina...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Distância-SH(X, Y, n)
1. MergeSort$(X, Y, 1, n)$
2. devolva DistânciaRec-SH $(X, Y, 1, n)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Distância-SH(X, Y, n)
1. MergeSort$(X, Y, 1, n)$
2. devolva DistânciaRec-SH $(X, Y, 1, n)$

Consumo de tempo:
$O(n \lg n)$ mais o tempo do DistânciaRec-SH.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)

Dividir: $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q]$ (esquerda)
$X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r]$ (direita)
onde $q := \lfloor (p+r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
5 $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, q+1, r)$
6 devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
6            devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
6            devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
6            devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
6            devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que Combine é linear.

Consumo de tempo do DistânciaRec-SH:

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

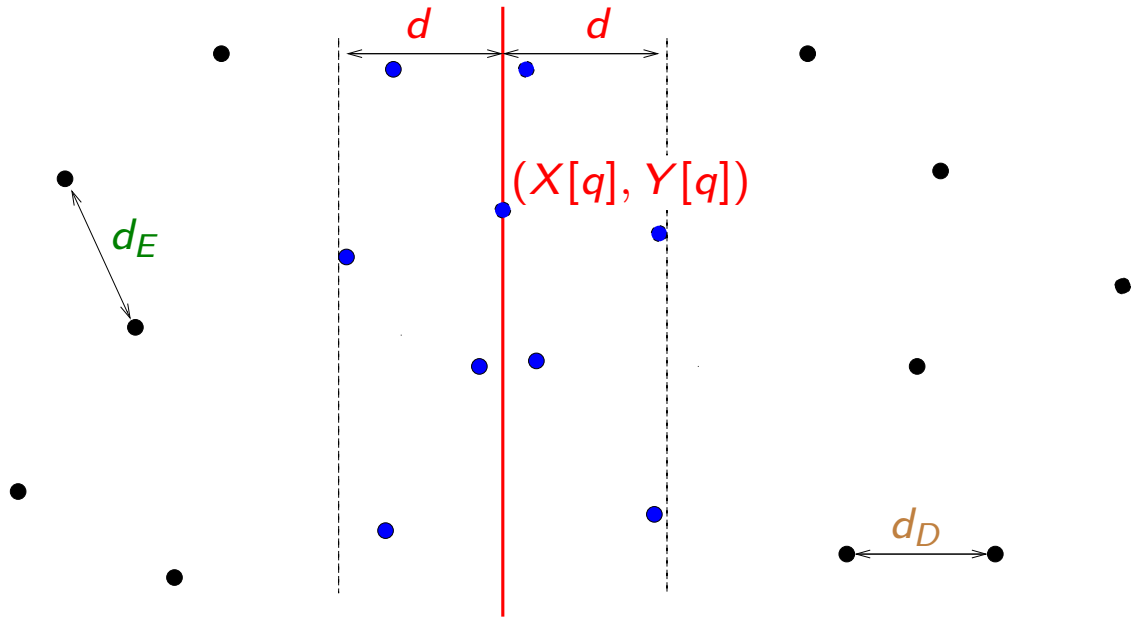
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

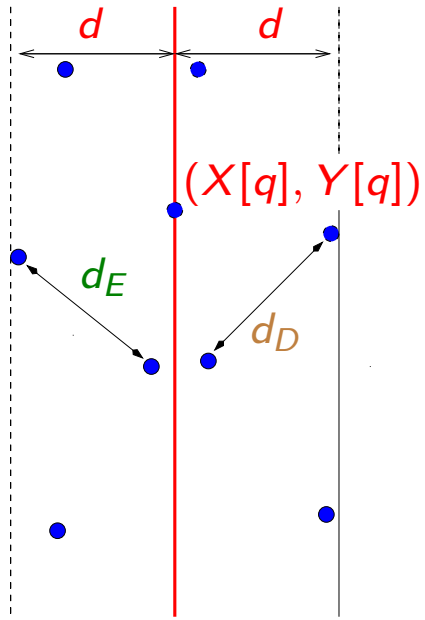
Combine precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Combine precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Infelizmente todos os pontos podem estar nesta faixa...

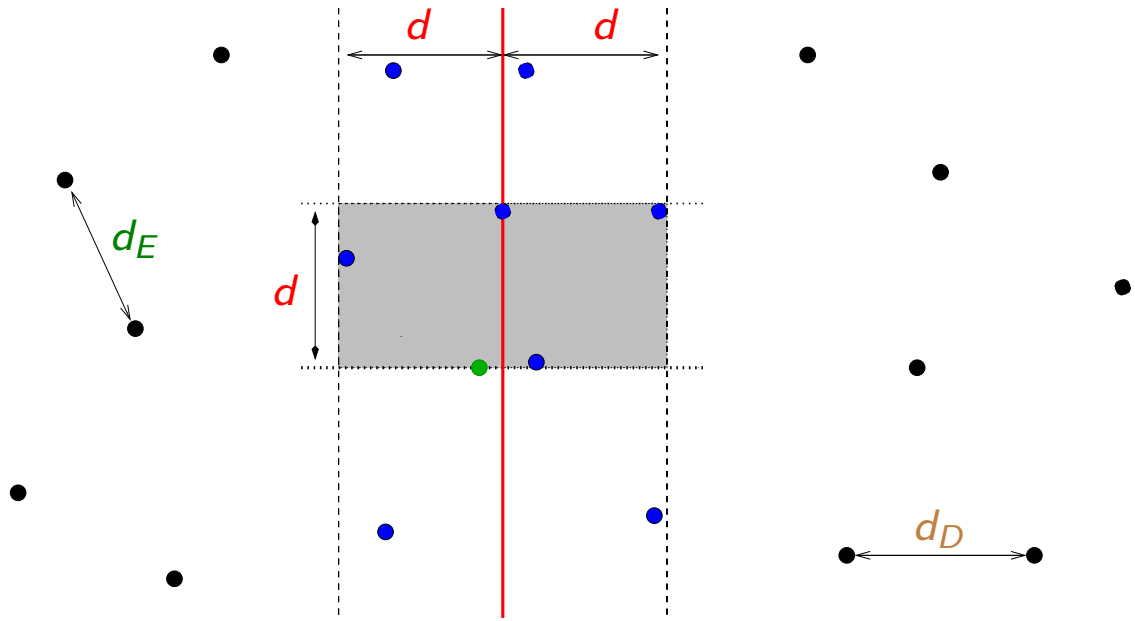
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

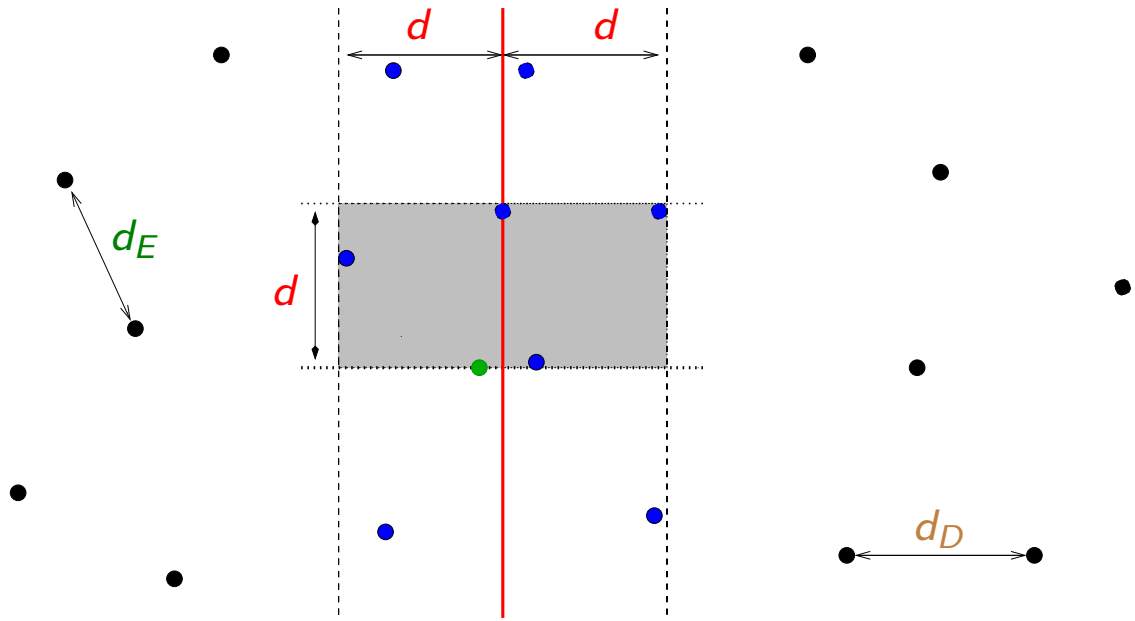
Ideia...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

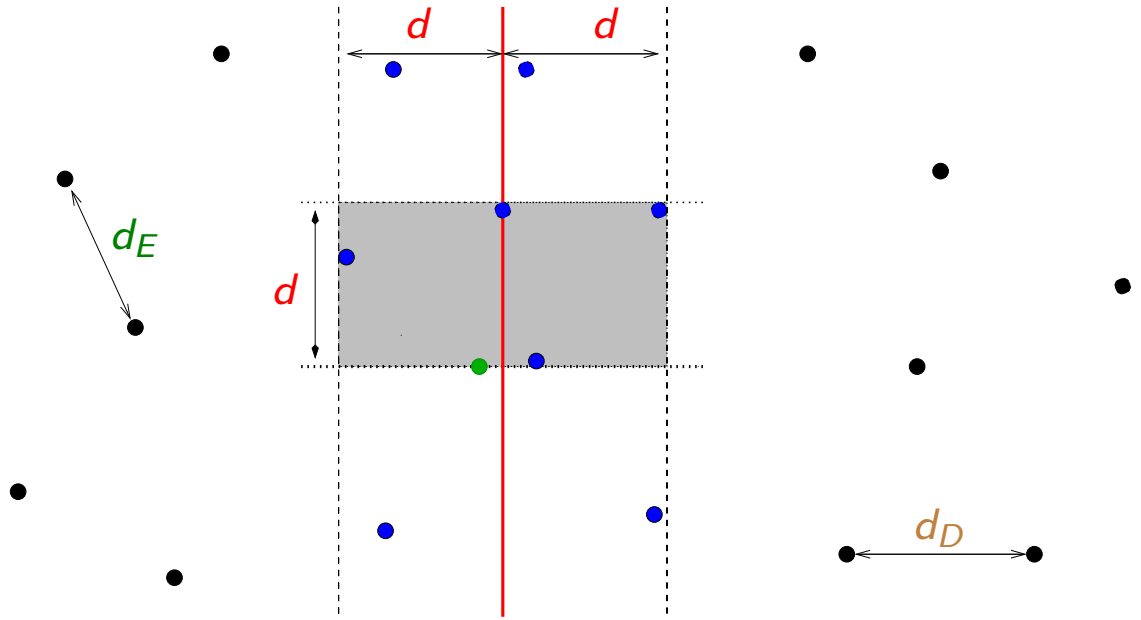
Ideia...



Para cada ponto na faixa, olhamos apenas para pontos da faixa que tenham Y-coordenada no máximo d mais que este ponto.

Algoritmo de Shamos e Hoey

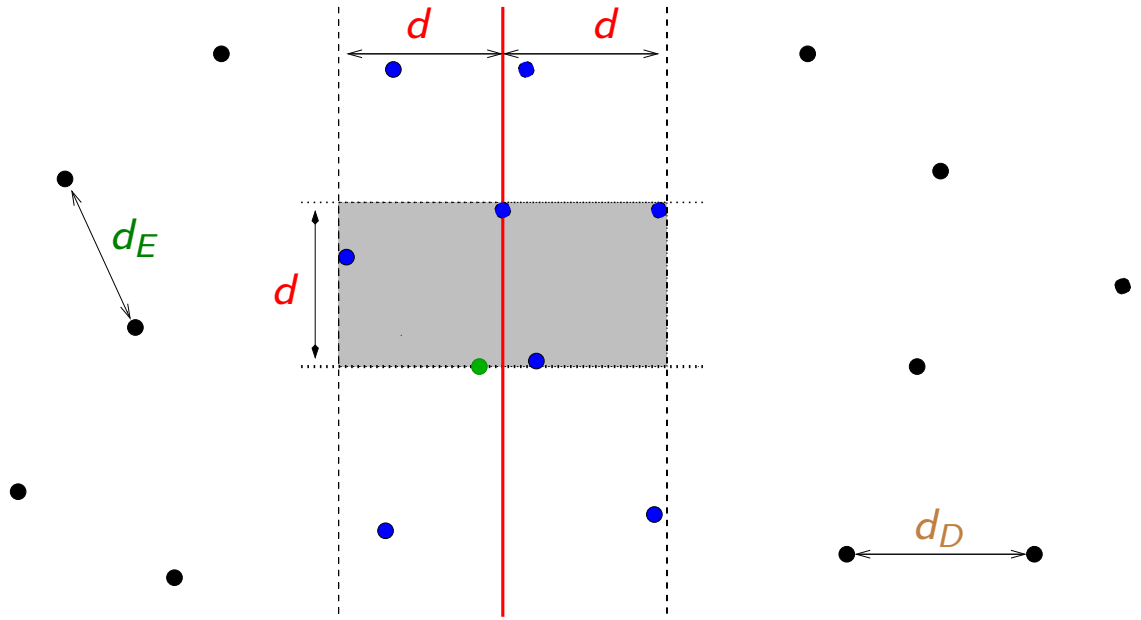
Como fazer o Combine linear?



Quantos pontos assim há?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

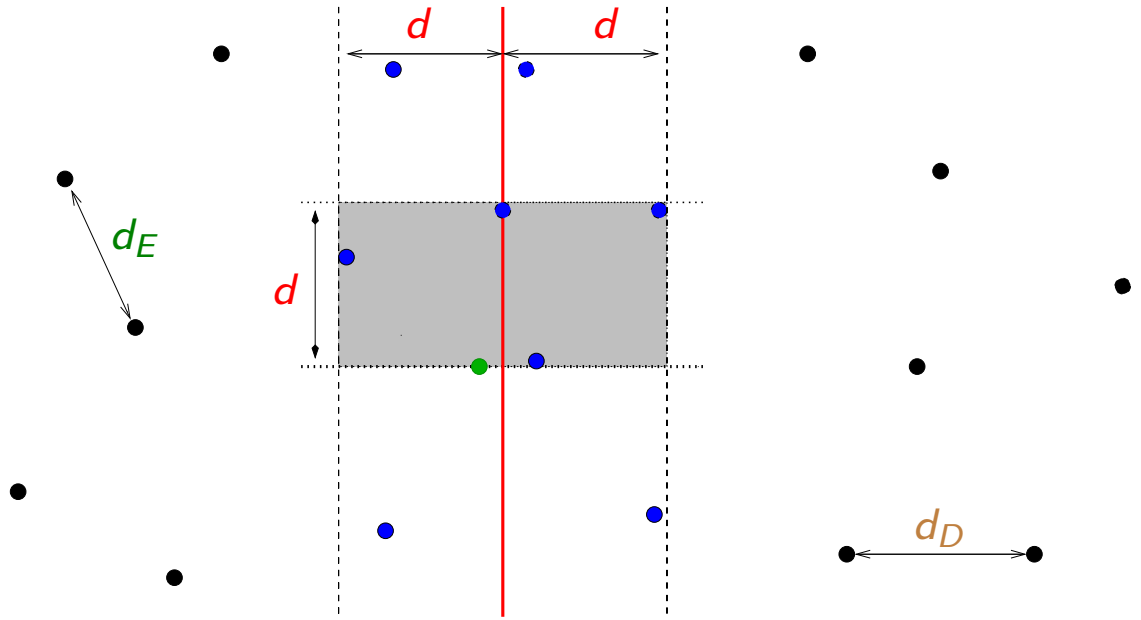


Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?



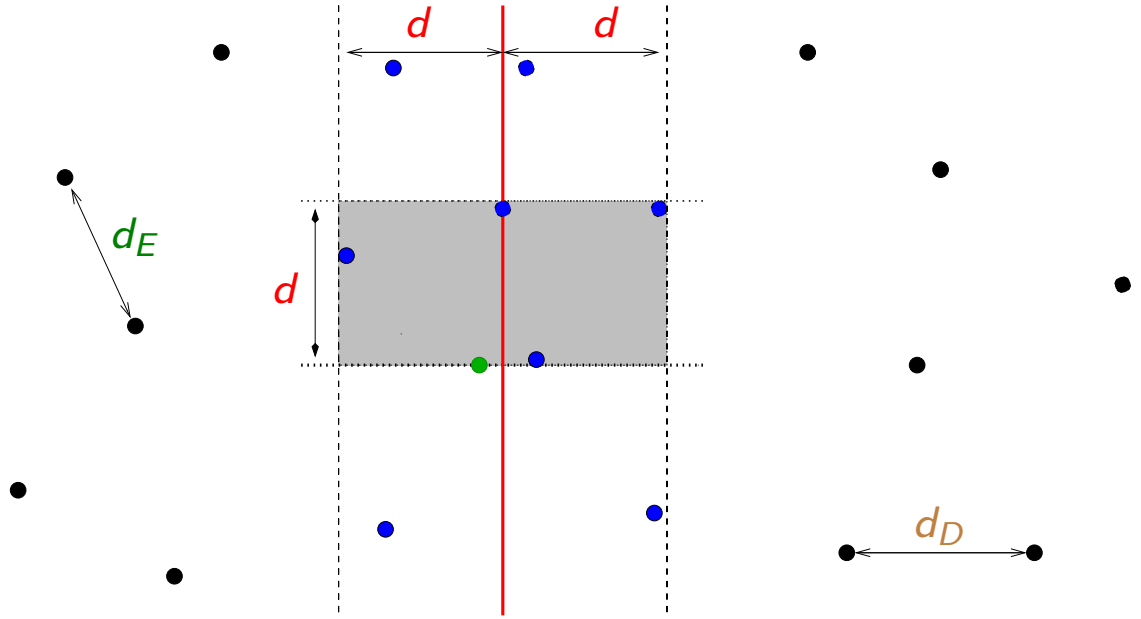
Quantos pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Logo há não mais que 7 pontos assim (excluindo o ponto).

Algoritmo de Shamos e Hoey

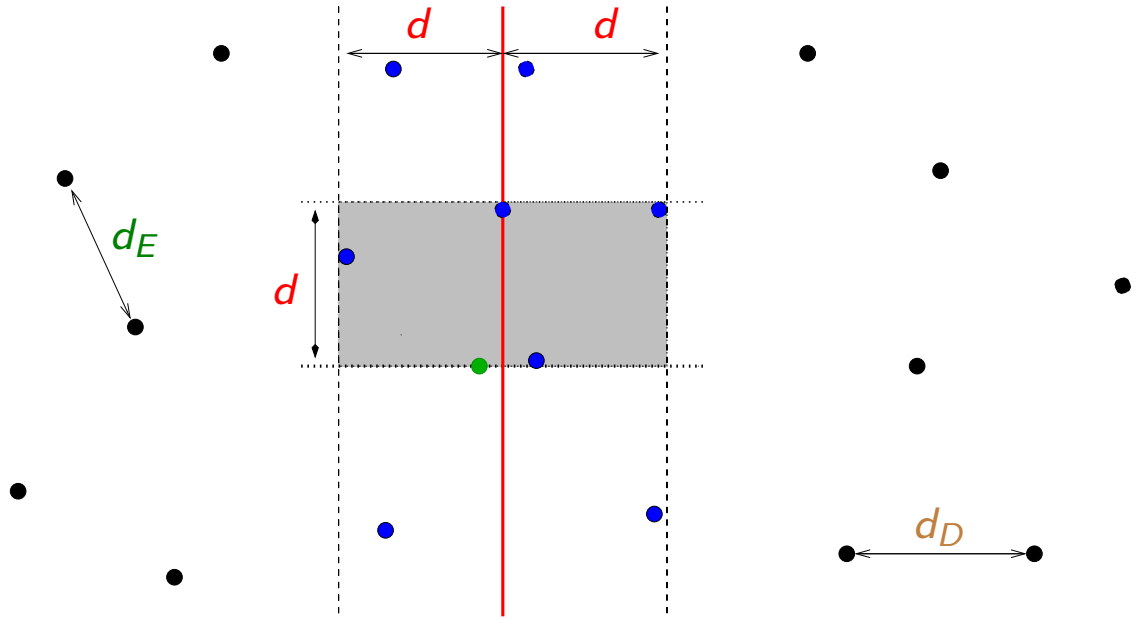
Como fazer o Combine linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?

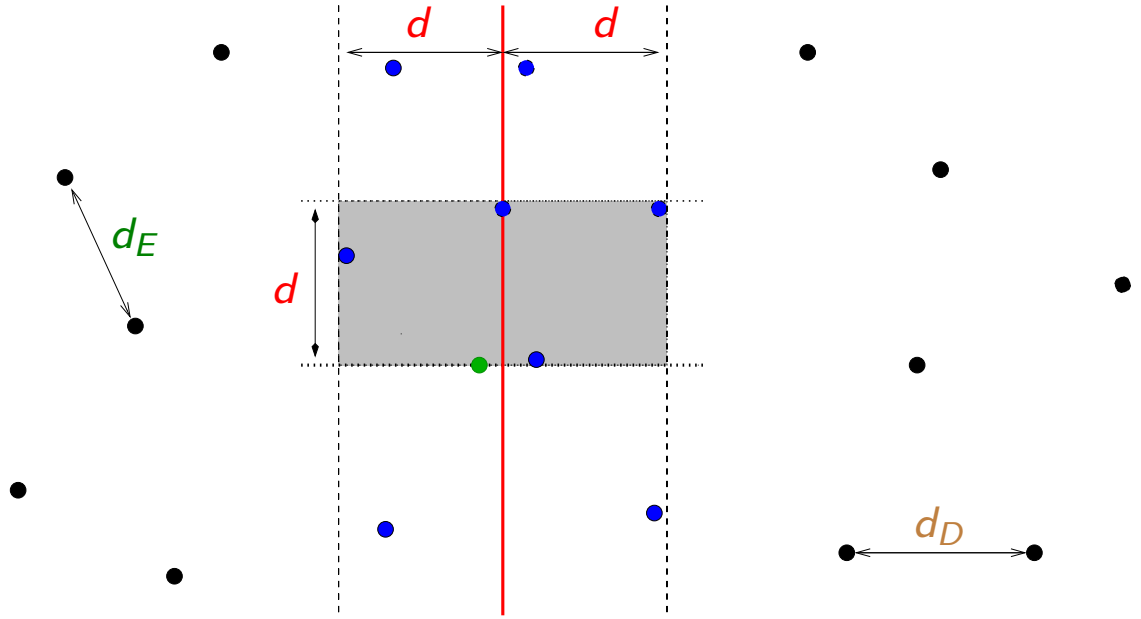


Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No Combine, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o Combine linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

No Combine, precisamos ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas.

Alteraremos o pré-processamento, para ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas!

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

Distância-SH(X, Y, n)
1 MergeSort$(X, Y, 1, n)$
2 para $i \leftarrow 1$ até n faça
3 $\quad a[i] \leftarrow i$
4 MergeSortInd$(Y, 1, n, a)$ ▷ ordenação indireta
5 devolva DistânciaRec-SH $(X, Y, a, 1, n)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

Distância-SH(X, Y, n)
1 MergeSort$(X, Y, 1, n)$
2 para $i \leftarrow 1$ até n faça
3 $\quad a[i] \leftarrow i$
4 MergeSortInd$(Y, 1, n, a)$ ▷ ordenação indireta
5 devolva DistânciaRec-SH $(X, Y, a, 1, n)$

Consumo de tempo:
De novo, $\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DistânciaRec-SH.

Divisão e conquista

DistânciaRec-SH (X, Y, a, p, r)

Dividir: Seja $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$. Obtenha um vetor $b[p\,..\,r]$ tal que $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q], b[p\,..\,q]$ seja uma representação ordenada dos pontos mais à esquerda e $X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r], b[q{+}1\,..\,r]$, uma representação ordenada dos pontos mais à direita.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $b \leftarrow$ Divida (X, Y, a, p, r)
5 $d_E \leftarrow$ DistânciaRec-SH (X, Y, b, p, q)
6 $d_D \leftarrow$ DistânciaRec-SH $(X, Y, b, q + 1, r)$
7 devolva Combine $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então  ▷ resolva o problema diretamente
3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
4             b ← Divida (X, Y, a, p, r)
5             d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, p, q)
6             d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, q + 1, r)
7             devolva Combine (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

Divida e Combine são algoritmos lineares.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DistânciaRec-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            b ← Divida (X, Y, a, p, r)
5            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, p, q)
6            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, q + 1, r)
7            devolva Combine (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

Divida e Combine são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
DistânciaRec-SH (X, Y, a, p, r)    ▷ Divisão e conquista
 1  se r ≤ p + 2
 2     então  ▷ resolva o problema diretamente
 3     senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
 4            b ← Divida (X, Y, a, p, r)
 5            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, p, q)
 6            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, b, q + 1, r)
 7            devolva Combine (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

Divida e Combine são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$$

onde $n = r - p + 1$. Como antes, $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1    j ← q
3  para k ← p até r faça
4      se a[k] ≤ q    ▷ (X[a[k]], Y[a[k]]) está à esquerda da reta x = X[q]?
5          então  i ← i + 1
6                 b[i] ← a[k]
7          senão  j ← j + 1
8                 b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1     j ← q
3  para k ← p até r faça
4       se a[k] ≤ q
5            então  i ← i + 1
6                   b[i] ← a[k]
7            senão  j ← j + 1
8                   b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
b					

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1     j ← q
3  para k ← p até r faça
4       se a[k] ≤ q
5            então  i ← i + 1
6                   b[i] ← a[k]
7            senão  j ← j + 1
8                   b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

	k				
X	−2	0	1	3	4
Y	−1	3	−2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
b	3				

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1    j ← q
3  para k ← p até r faça
4      se a[k] ≤ q
5          então  i ← i + 1
6                 b[i] ← a[k]
7          senão  j ← j + 1
8                 b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

		k				
X		−2	0	1	3	4
Y		−1	3	−2	4	2
a		3	1	5	2	4
		1	2	3	4	5
b		3	1			

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1     j ← q
3  para k ← p até r faça
4       se a[k] ≤ q
5            então  i ← i + 1
6                   b[i] ← a[k]
7            senão  j ← j + 1
8                   b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

		k				
X		-2	0	1	3	4
Y		-1	3	-2	4	2
a		3	1	5	2	4
		1	2	3	4	5
b		3	1		5	

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1    j ← q
3  para k ← p até r faça
4      se a[k] ≤ q
5          então  i ← i + 1
6                 b[i] ← a[k]
7          senão  j ← j + 1
8                 b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
b	3	1	2	5	4

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Divida (X, Y, a, p, r)
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1    j ← q
3  para k ← p até r faça
4      se a[k] ≤ q
5          então  i ← i + 1
6                 b[i] ← a[k]
7          senão  j ← j + 1
8                 b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
b	3	1	2	5	4

$q = 3 \quad X[q] = 1$

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

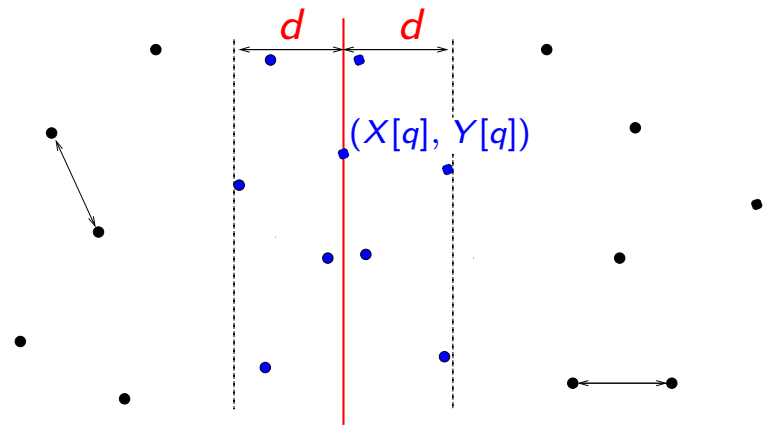
A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, a, p, r, d)

1 $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
2 $t \leftarrow 0$
3 para $k \leftarrow p$ até r faça
4 se $|X[a[k]] - X[q]| < d$
5 então $t \leftarrow t + 1$
6 $f[t] \leftarrow a[k]$
7 devolva (f, t)



Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, a, p, r, d)

1 $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
2 $t \leftarrow 0$
3 para $k \leftarrow p$ até r faça
4 se $|X[a[k]] - X[q]| < d$
5 então $t \leftarrow t + 1$
6 $f[t] \leftarrow a[k]$
7 devolva (f, t)

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
f					

$X[3] = 1$ $\quad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, a, p, r, d)

1 $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
2 $t \leftarrow 0$
3 para $k \leftarrow p$ até r faça
4 se $|X[a[k]] - X[q]| < d$
5 então $t \leftarrow t + 1$
6 $f[t] \leftarrow a[k]$
7 devolva (f, t)

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
f	3	2	4		

$X[3] = 1$ $\quad d = \sqrt{5}$

Algoritmo de Shamos e Hoey

A rotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa, ordenados pela Y-coordenada.

Candidatos (X, a, p, r, d)

1 $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
2 $t \leftarrow 0$
3 para $k \leftarrow p$ até r faça
4 se $|X[a[k]] - X[q]| < d$
5 então $t \leftarrow t + 1$
6 $f[t] \leftarrow a[k]$
7 devolva (f, t)

X	-2	0	1	3	4
Y	-1	3	-2	4	2
a	3	1	5	2	4
	1	2	3	4	5
f	3	2	4		

$X[3] = 1$ $\quad d = \sqrt{5}$

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Combine $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

1 $d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
2 $(f, t) \leftarrow$ Candidatos (X, a, p, r, d) ▷ pontos na faixa
3 para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
4 para $j \leftarrow i + 1$ até $\min\{i + 7, t\}$ faça ▷ ≤ 7 próximos
5 $d' \leftarrow \text{Dist}(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
6 se $d' < d$
7 então $d \leftarrow d'$
8 devolva d

Algoritmo de Shamos e Hoey

Combine $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

1 $d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
2 $(f, t) \leftarrow$ Candidatos (X, a, p, r, d) ▷ pontos na faixa
3 para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
4 para $j \leftarrow i + 1$ até $\min\{i + 7, t\}$ faça ▷ ≤ 7 próximos
5 $d' \leftarrow \text{Dist}(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
6 se $d' < d$
7 então $d \leftarrow d'$
8 devolva d

Consumo de tempo:
É fácil ver que o consumo é $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
Combine (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
 1  d ← min{d_E, d_D}
 2  (f, t) ← Candidatos (X, a, p, r, d)      ▷ pontos na faixa
 3  para i ← 1 até t − 1 faça
 4      j ← i + 1
 5      enquanto j ≤ t e Y[f[j]] − Y[f[i]] < d faça      ▷ ≤ 7 próximos
 6          d′ ← Dist(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
 7          se d′ < d
 8              então d ← d′
 9          j ← j + 1
10  devolva d
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

Combine $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

```
 1  d ← min{d_E, d_D}
 2  (f, t) ← Candidatos (X, a, p, r, d)      ▷ pontos na faixa
 3  para i ← 1 até t − 1 faça
 4      j ← i + 1
 5      enquanto j ≤ t e Y[f[j]] − Y[f[i]] < d faça      ▷ ≤ 7 próximos
 6          d′ ← Dist(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
 7          se d′ < d
 8              então d ← d′
 9          j ← j + 1
10  devolva d
```

Consumo de tempo: $\Theta(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Um jeito mais bonito!

Recebe uma coleção de pontos dada por $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$, com $X[p] \leq X[p+1] \leq \cdots \leq X[r]$.

Um jeito mais bonito!

Recebe uma coleção de pontos dada por $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$, com $X[p] \leq X[p+1] \leq \cdots \leq X[r]$.

Devolve $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$ rearranjados de modo que $Y[p] \leq Y[p+1] \leq \cdots \leq Y[r]$ e retorna a menor distância entre dois pontos da coleção.

Um jeito mais bonito!

Recebe uma coleção de pontos dada por $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$, com $X[p] \leq X[p+1] \leq \cdots \leq X[r]$.

Devolve $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$ rearranjados de modo que $Y[p] \leq Y[p+1] \leq \cdots \leq Y[r]$ e retorna a menor distância entre dois pontos da coleção.

```
DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)    ▷ Divisão e conquista
 1  se r ≤ p + 2
 2      então  ▷ resolva o problema diretamente
 3      senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
 4             d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
 5             d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
 6             Intercale (Y, X, p, q, r)    ▷ ordena por Y
 7             devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

Recebe $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$, com $X[p] \le X[p+1] \le \cdots \le X[r]$.

Devolve $X[p\,..\,r]$ e $Y[p\,..\,r]$ rearranjados de modo que $Y[p] \le Y[p+1] \le \cdots \le Y[r]$ e retorna a menor distância entre dois pontos da coleção.

```
DistânciaRec-SH (X, Y, p, r)      ▷ Divisão e conquista
 1  se r ≤ p + 2
 2     então  ▷ resolva o problema diretamente
 3     senão  q ← ⌊(p + r)/2⌋
 4            d_E ← DistânciaRec-SH (X, Y, p, q)
 5            d_D ← DistânciaRec-SH (X, Y, q+1, r)
 6            Intercale (Y, X, p, q, r)
 7            devolva Combine (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Consumo de tempo: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \mathrm{O}(n)$, onde $n = r - p + 1$. Como antes, $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Quase finalizando...

Exercício: Adapte o algoritmo Combine para a versão mais bonita do algoritmo.

Quase finalizando...

Exercício: Adapte o algoritmo Combine para a versão mais bonita do algoritmo.

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Quase finalizando...

Exercício: Adapte o algoritmo Combine para a versão mais bonita do algoritmo.

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Quase finalizando...

Exercício: Adapte o algoritmo Combine para a versão mais bonita do algoritmo.

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa 1: UVA 10245 - The Closest Pair Problem

Quase finalizando...

Exercício: Adapte o algoritmo Combine para a versão mais bonita do algoritmo.

Exercício: Adapte os algoritmos vistos nesta aula para que devolvam dois pontos da coleção que estejam à distância mínima (em vez de devolver a distância apenas).

Exercício: O algoritmo de divisão e conquista funciona se trocarmos o 7 na implementação com o comando **para** por 6? E se trocarmos o 6 por 5?

Tarefa 1: UVA 10245 - The Closest Pair Problem

Material coberto nas duas primeiras aulas:
Secs 7.1 – 7.3 do livro das JAI.

Agora, às animações!