Geometria Computacional

Departamento de Ciência da Computação – IME/USP

Primeiro Semestre de 2020

Lista 6

1. (Exercício 5.4.5.2 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi unidimensional) Um diagrama de Voronoi unidimensional de um conjunto $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de pontos na reta (digamos, no eixo das abscissas) é um conjunto de pontos $\mathrm{Vor}(P) = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ tal que x_i é o ponto médio do segmento $p_i p_{i+1}$. Descreva um critério que permite que determinemos se um dado conjunto $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ de pontos é o diagrama de Voronoi unidimensional de alguma coleção de pontos na reta. Qual é o consumo de tempo do algoritmo resultante do critério que você obteve?
2. Prove que se P é um conjunto de n pontos do plano com no máximo k pontos cocirculares então cada vértice do diagrama de Voronoi de P tem grau entre 3 e k.
3. (Exercício 5.4.5.3 do livro de O'Rourke — Diagrama de Voronoi cinético) Imagine um conjunto de pontos movendo-se no plano, cada ponto com uma direção e velocidade fixas. Seja $V(t)$ o diagrama de Voronoi destes pontos no instante t. É um problema em aberto obter uma delimitação justa para o número de diagramas combinatorialmente distintos que podemos obter ao longo do tempo. Tente obter a conhecida cota inferior de $\Omega(n^2)$. Em outra palavras, encontre um conjunto de n pontos tal que $V(t)$ muda a sua estrutura combinatória cn^2 vezes onde c é uma constante. Ninguém foi capaz até agora de encontrar um exemplo onde mais de n^2 mudanças são necessárias, mas a melhor delimitação superior conhecida é $\mathrm{O}(n^3)$ (cf. Fu e Lee [1]; veja também Guibas, Mitchell e Roos [2]).
4. (Exercício 5.3.3.1 do livro de O'Rourke — Polígono regular) Descreva o diagrama de Voronoi e o grafo de Delaunay dos vértices de um polígono regular.
5. ($DG(P) \Rightarrow \mathrm{Vor}(P)$) Descreva um algoritmo que, dado o grafo de Delaunay $DG(P)$ de um conjunto de pontos P, constrói $\mathrm{Vor}(P)$. Tente fazer um algoritmo linear.
6. (Vértice de Delaunay de grau grande) Descreva um conjunto P de n pontos, para um n arbitrário, que não contenha quatro pontos cocirculares, tal que o grafo de Delaunay tenha um vértice de grau $n - 1$.
7. (Aresta de $DG(P)$ a partir de P_1 e P_2) Seja P um conjunto de pontos no plano e seja $\{P_1, P_2\}$ uma partição de P. Prove que, se uv é um segmento de menor comprimento entre os segmentos em $\{p_1 p_2 \mid p_1 \in P_1 \text{ e } p_2 \in P_2\}$, então uv é uma aresta do grafo de Delaunay.
8. (Atualização dinâmica do grafo de Delaunay) Dado o grafo de Delaunay de um conjunto P de n pontos e um ponto p em P, descreva um algoritmo que constrói o grafo de Delaunay de $P \setminus \{p\}$. O consumo de tempo do seu algoritmo deve ser $\mathrm{O}(k \lg k)$, onde k é o número de arestas adjacentes ao ponto p. Mostre a correção e analise o consumo de tempo do seu algoritmo.

9. (Grafo de vizinhança relativa) Um *grafo de vizinhança relativa* (*relative neighborhood graph*) de um conjunto P de n pontos do plano, denotado por RNG(P), é um grafo cujo conjunto de vértices é P e existe uma aresta ligando dois pontos p e q de S se

$$\textsc{Dist}(p,q) \ \leq \ \min_{r \in S \setminus \{p,q\}} \max\{\textsc{Dist}(p,r), \textsc{Dist}(q,r)\}.$$

Esta desigualdade determina uma região 'proibida' para o ponto r se p e q são adjacentes no grafo de RNG(P). Esta região é formada pela interseção dos círculos de centro p e q e raio $\textsc{Dist}(p,q)$.

(a) Prove que toda aresta de RNG(P) é uma aresta de $DG(S)$.

(b) (MST $\subseteq$ RNG) Prove que toda aresta de uma árvore geradora Euclideana mínima de P (MST(P)) é uma aresta de RNG(P).

(c) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(n^2)$ que constrói o grafo de vizinhança relativa de um dado conjunto P de n pontos. Mostre a correção e analise do consumo de tempo do seu algoritmo.

10. (Construção do diagrama de Delaunay *on-line*) Seja P um conjunto de n pontos e seja p um ponto tal que $p \notin P$ mas está no fecho convexo de P.

(a) Mostre que se p é um ponto no interior do triângulo $\triangle(a,b,c)$ do grafo $DG(P)$ então pa, pb e pc são arestas de $DG(P \cup \{p\})$.

(b) Mostre que se p é um ponto da aresta ab de $DG(P)$ que é compartilhada pelos triângulos $\triangle(a,b,c)$ e $\triangle(d,b,a)$ de $DG(P)$, então pa, pb, pc e pd são arestas de $DG(P \cup \{p\})$.

(c) Chamaremos de *suspeitas* as arestas de $DG(P)$ que suspeitamos que não fazem parte de $DG(P \cup \{p\})$. Após as operações descritas nos itens (a) e (b), quais arestas de $DG(P)$ são supeitas? Mostre como testar em tempo constante se uma aresta suspeita pertence ou não a $DG(P \cup \{p\})$.

(d) Se constatarmos que uma aresta suspeita ab não pertence a $DG(P \cup \{p\})$, então qual aresta deverá ser inserida no grafo? Depois de inserirmos esta aresta, quais arestas que não eram suspeitas passam a ser suspeitas?

(e) Quantas vezes uma aresta suspeita será testada?

(f) Dados o grafo de Delaunay de um conjunto P de n pontos, um ponto $p \notin S$ e o triângulo $\triangle(a,b,c)$ do grafo de Delaunay de P que contém p, descreva um algoritmo que constrói o grafo de Delaunay de $P \cup \{p\}$. Seu algoritmo deve consumir tempo $O(k)$, onde k é o número de arestas inseridas mais o número de arestas removidas. (Se você não conseguir um algoritmo $O(k)$, então tente descrever um algoritmo $O(n)$.) Mostre a correção e analise o consumo de tempo do seu algoritmo. (Note que o algoritmo pedido por este item é o passo central de um algoritmo *on-line* que constrói o diagrama de Delaunay de um conjunto de n pontos em tempo $O(n^2)$.)

Referências

[1] J.-J. Fu e R.C.T. Lee, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *International Journal on Computational Geometry and Applications* **1** (1991), no. 1, 23–32.

[2] L.J. Guibas, J.S.B. Mitchell e T. Roos, Voronoi diagrams of moving points in the plane, *Proceedings of the 17th International Workshop Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, Lecture Notes Computer Science, vol. 570, Springer-Verlag, 1991, pp. 113–125.