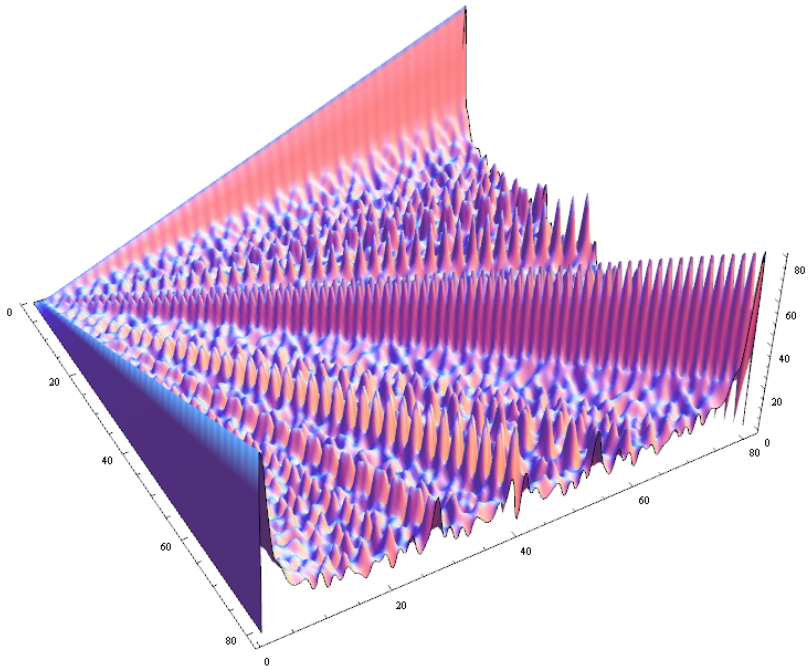
AULA 4

Hoje

- mais análise de algoritmos:
  algoritmo de Euclides
- mais recursão: curvas de Hilbert

Algoritmo de Euclides



Fonte: `http://math.stackexchange.com/`

PF 2 (Exercícios) S 5.1

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html

http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2014/aulas/mdc/

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o $\texttt{mdc}(\texttt{m}, \texttt{n})$ o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\texttt{mdc}(\texttt{m}, 0) = \texttt{m};$$
$$\texttt{mdc}(\texttt{m}, \texttt{n}) = \texttt{mdc}(\texttt{n}, \texttt{m}\%\texttt{n}), \text{ para } \texttt{n} > 0.$$

Assim, por exemplo,

$$\texttt{mdc}(12, 18) = \texttt{mdc}(18, 12) = \texttt{mdc}(12, 6) = \texttt{mdc}(6, 0) = 6.$$

Correção

A correção da recorrência proposta por Euclides é baseada no seguinte fato.

Se $\mathtt{m}$, $\mathtt{n}$ e $\mathtt{d}$ são números inteiros, $\mathtt{m} \geq 0$, $\mathtt{n}, \mathtt{d} > 0$, então

$\mathtt{d}$ divide $\mathtt{m}$ e $\mathtt{n}$ $\Leftrightarrow$ $\mathtt{d}$ divide $\mathtt{n}$ e $\mathtt{m}\%\mathtt{n}$.

Euclides recursivo

```
int euclidesR(int m, int n)
{
   if (n == 0) return m;
   return euclidesR(n, m % n);
}
```

Euclides iterativo

```
/* Pre-condicao:  a funcao supoe n > 0 */
int euclidesI(int m, int n) {
   int r;
   do
   {
       r = m % n;
       m = n;
       n = r;
   }
   while (r != 0);
   return m;
}
```

euclidesR(317811,514229)

```
euclidesR(317811,514229)
  euclidesR(514229,317811)
    euclidesR(317811,196418)
      euclidesR(196418,121393)
        euclidesR(121393,75025)
          euclidesR(75025,46368)
            euclidesR(46368,28657)
              euclidesR(28657,17711)
                euclidesR(17711,10946)
                  euclidesR(10946,6765)
                    euclidesR(6765,4181)
                      euclidesR(4181,2584)
                        euclidesR(2584,1597)
                          euclidesR(1597,987)
                            euclidesR(987,610)
                              euclidesR(610,377)
                                euclidesR(377,233)
                                  euclidesR(233,144)
                                    euclidesR(144,89)
                                      euclidesR(89,55)
                                        euclidesR(55,34)
                                          euclidesR(34,21)
                                            euclidesR(21,13)
                                              euclidesR(13,8)
                                                euclidesR(8,5)
                                                  euclidesR(5,3)
                                                    euclidesR(3,2)
                                                      euclidesR(2,1)
                                                        euclidesR(1,0)
mdc(317811,514229) = 1.
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.004s
user  0m0.004s
sys   0m0.000s

meu_prompt>time ./euclidesR 317811 514229
mdc(317811,514229)=1
real  0m0.002s
user  0m0.000s
sys   0m0.000s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real   0m1.692s
user   0m1.684s
sys    0m0.000s

meu_prompt>time ./euclidesR 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)=1
real   0m0.002s
user   0m0.000s
sys    0m0.000s
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que `euclidesR` faz `k` chamadas recursivas e que no início da 1a. chamada ao algoritmo tem-se que $0 < \mathtt{n} \leq \mathtt{m}$.

Sejam

$$(\mathtt{m}, \mathtt{n}) = (\mathtt{m}_0, \mathtt{n}_0), (\mathtt{m}_1, \mathtt{n}_1), \ldots, (\mathtt{m}_\mathtt{k}, \mathtt{n}_\mathtt{k}) = (\mathtt{mdc}(\mathtt{m}, \mathtt{n}), 0),$$

os valores dos parâmetros no início de cada uma das chamadas da função.

Número de chamadas recursivas

Por exemplo, para $\mathtt{m} = 514229$ e $\mathtt{n} = 317811$ tem-se

$$\begin{aligned}
(\mathtt{m}_0, \mathtt{n}_0) &= (514229, 317811), \\
(\mathtt{m}_1, \mathtt{n}_1) &= (317811, 196418), \\
(\mathtt{m}_2, \mathtt{n}_2) &= (196418, 121393), \\
\ldots &= \ldots \\
(\mathtt{m}_{27}, \mathtt{n}_{27}) &= (1, 0).
\end{aligned}$$

Número de chamadas recursivas

Estimaremos o valor de `k` em função de $\texttt{n} = \min(\texttt{m}, \texttt{n})$.

Note que $\texttt{m}_{\texttt{i}+1} = \texttt{n}_{\texttt{i}}$ e $\texttt{n}_{\texttt{i}+1} = \texttt{m}_{\texttt{i}} \% \texttt{n}_{\texttt{i}}$ para `i=0,1,...,k-1`.

Note ainda que para inteiros `a` e `b`, $0 < \texttt{b} \leq \texttt{a}$ vale que

$$\texttt{a} \% \texttt{b} < \frac{\texttt{a}}{2} \quad \text{(verifique!)}.$$

Número de chamadas recursivas

Desta forma tem-se que

$$
\begin{array}{lllllllll}
n_2 & = & m_1 \% n_1 & = & n_0 \% n_1 & < & n_0/2 & = & n/2 & = & n/2^1 \\
n_4 & = & m_3 \% n_3 & = & n_2 \% n_3 & < & n_2/2 & < & n/4 & = & n/2^2 \\
n_6 & = & m_5 \% n_5 & = & n_4 \% n_5 & < & n_4/2 & < & n/8 & = & n/2^3 \\
n_8 & = & m_7 \% n_7 & = & n_6 \% n_7 & < & n_6/2 & < & n/16 & = & n/2^4 \\
n_{10} & = & m_9 \% n_9 & = & n_8 \% n_9 & < & n_8/2 & < & n/32 & = & n/2^5
\end{array}
$$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$

Percebe-se que depois de cada 2 chamadas recursivas o valor do segundo parâmetro é reduzido a menos da sua metade.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que

$$2^t \leq n < 2^{t+1}$$

Da primeira desigualdade temos que

$$t \leq \lg n,$$

onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.
Da desigualde estrita, concluímos que

$$k \leq 2(t+1) - 1 = 2t + 1$$

Logo, o número k de chamadas recursivas é não superior a

$$2t + 1 \leq 2 \lg n + 1.$$

Número de chamadas recursivas

Para o exemplo acima, onde `m`=514229 e `n`=317811, temos que

$$2 \lg \texttt{n} + 1 = 2 \lg(317811) + 1 < 2 \times 18{,}3 + 1 < 37{,}56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por `euclidesR`(514229,317811) foram 27.

Consumo de tempo

Resumindo, a quantidade de tempo consumida pelo algoritmo de Euclides é, no pior caso, proporcional a $\lg \mathtt{n}$.

Este desempenho é significativamente melhor que o desempenho do algoritmo *café com leite*, já que a função $f(\mathtt{n}) = \lg \mathtt{n}$ cresce muito mais lentamente que a função $g(\mathtt{n}) = \mathtt{n}$.

Consumo de tempo

n	$(\text{int})\ \lg n$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29

Conclusões

Suponha que $\mathtt{m} > \mathtt{n}$.

O número de chamadas recursivas da função `euclidesR` é $\leq 2(\lg \mathtt{n}) - 1$.

No pior caso, o consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional a $\lg \mathtt{n}$.

Conclusões

Suponha que $\mathtt{m} > \mathtt{n}$.

O consumo de tempo da função `euclidesR` é $\mathrm{O}(\lg \mathtt{n})$.

Para que o consumo de tempo da função `euclidesR` dobre é necessário que o valor de `n` seja elevado ao quadrado.

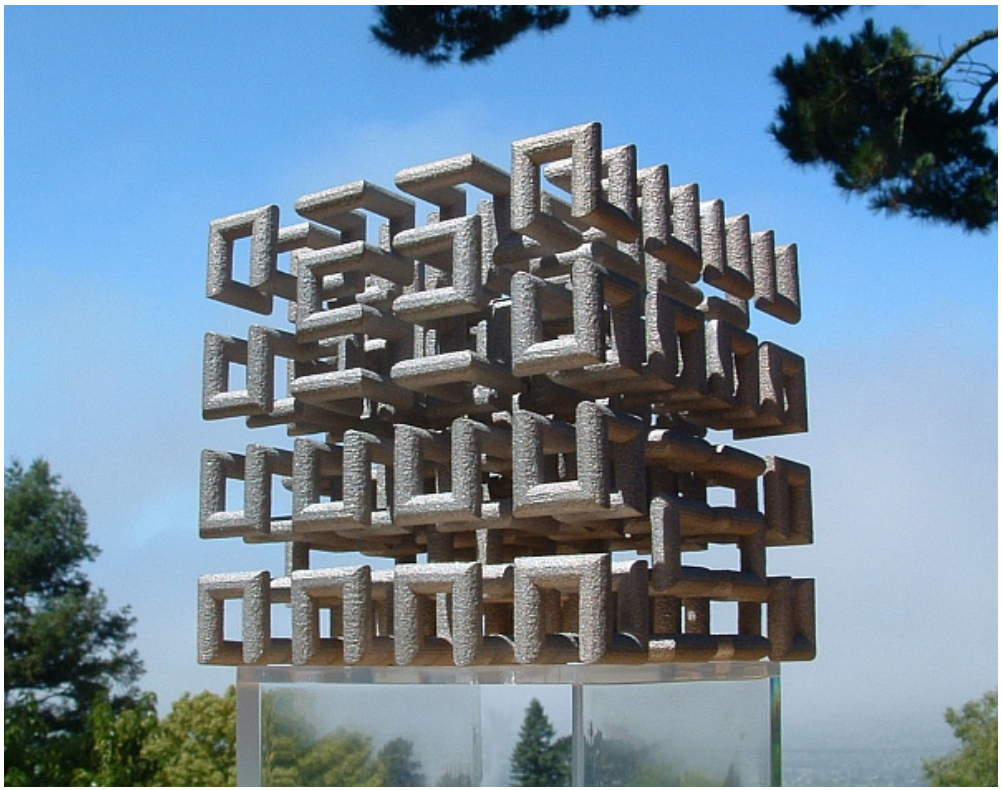
Euclides e Fibonacci

Demonstre por indução em $\texttt{k}$ que:

Se $\texttt{m} > \texttt{n} \geq 0$ e se a chamada $\texttt{euclidesR}(\texttt{m},\texttt{n})$ faz $\texttt{k} \geq 0$ chamadas recursivas, então

$$\texttt{m} \geq \texttt{fibonacci}(\texttt{k}+1) \text{ e } \texttt{n} \geq \texttt{fibonacci}(\texttt{k}).$$

Curvas de Hilbert



Fonte: http://momath.org/home/math-monday-03-22-10

Niklaus Wirth, *Algorithms and Data Structures*
Prentice Hall, 1986.

http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve

Curvas de Hilbert

As curvas a seguir seguem um certo padrão regular e podem ser desenhadas na tela sobre o controle de um programa.

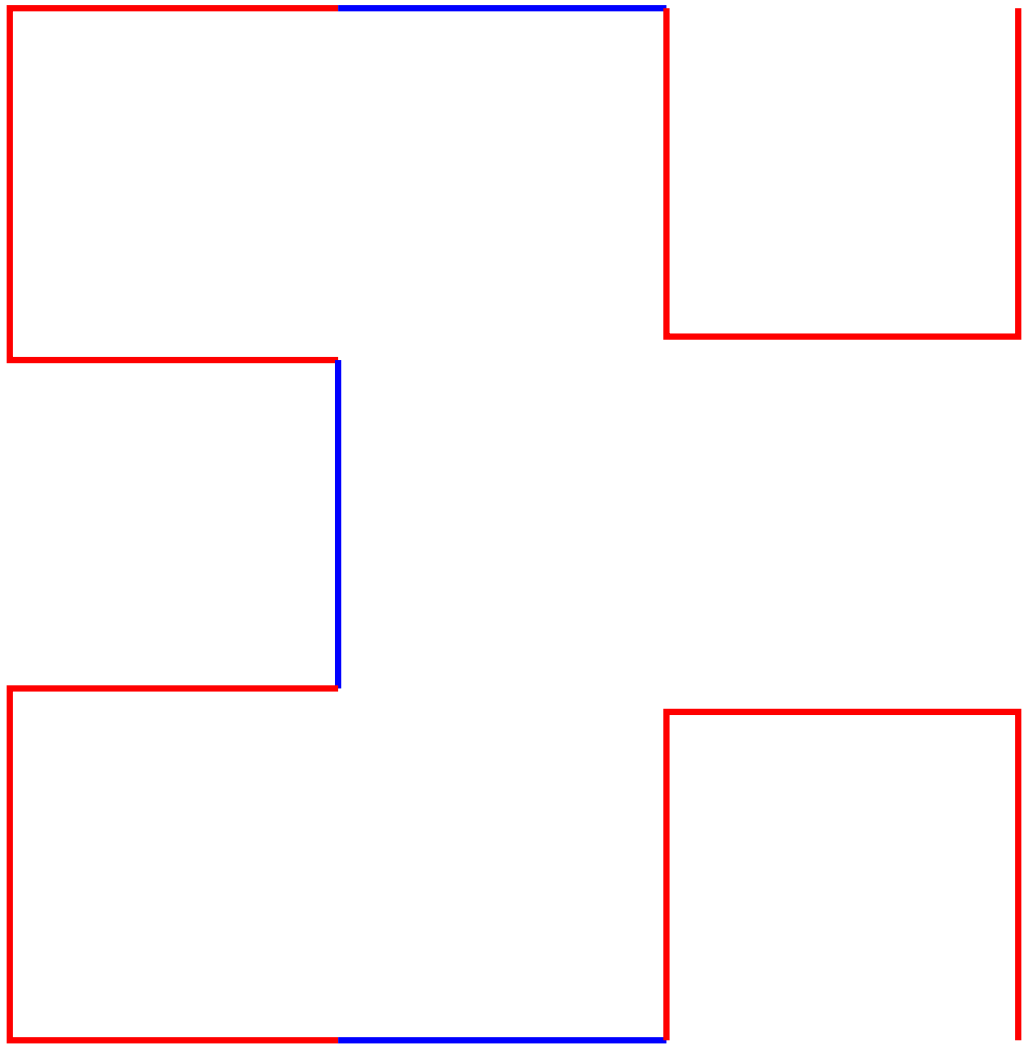
O objetivo é descobrir o esquema de recursão para construir tais curvas.

Estes padrões serão chamados de $\mathtt{H}_0, \mathtt{H}_1, \mathtt{H}_2, \ldots$

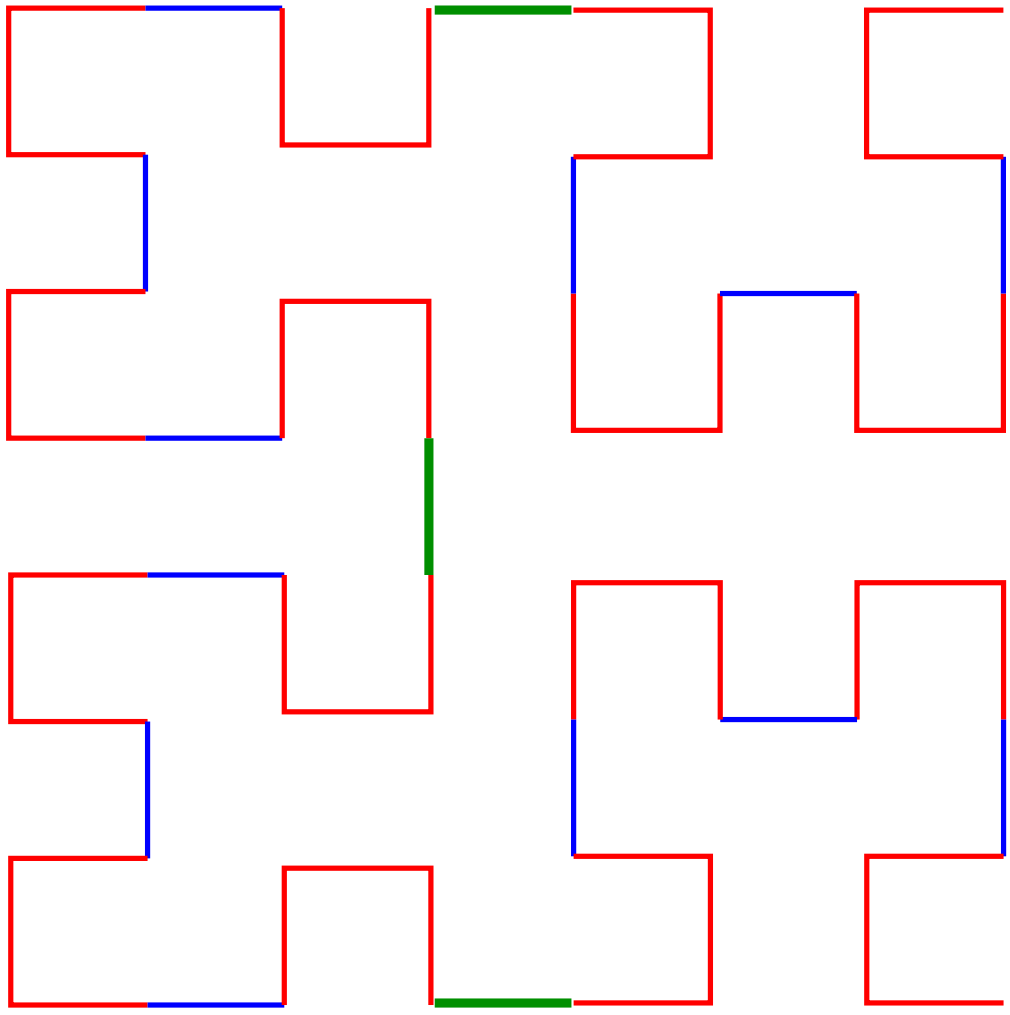
Cada $\mathtt{H}_\mathtt{i}$ denomina a **curva de Hilbert** de ordem $\mathtt{i}$, em homenagem a seu inventor, o matemático *David Hilbert*.

H_1

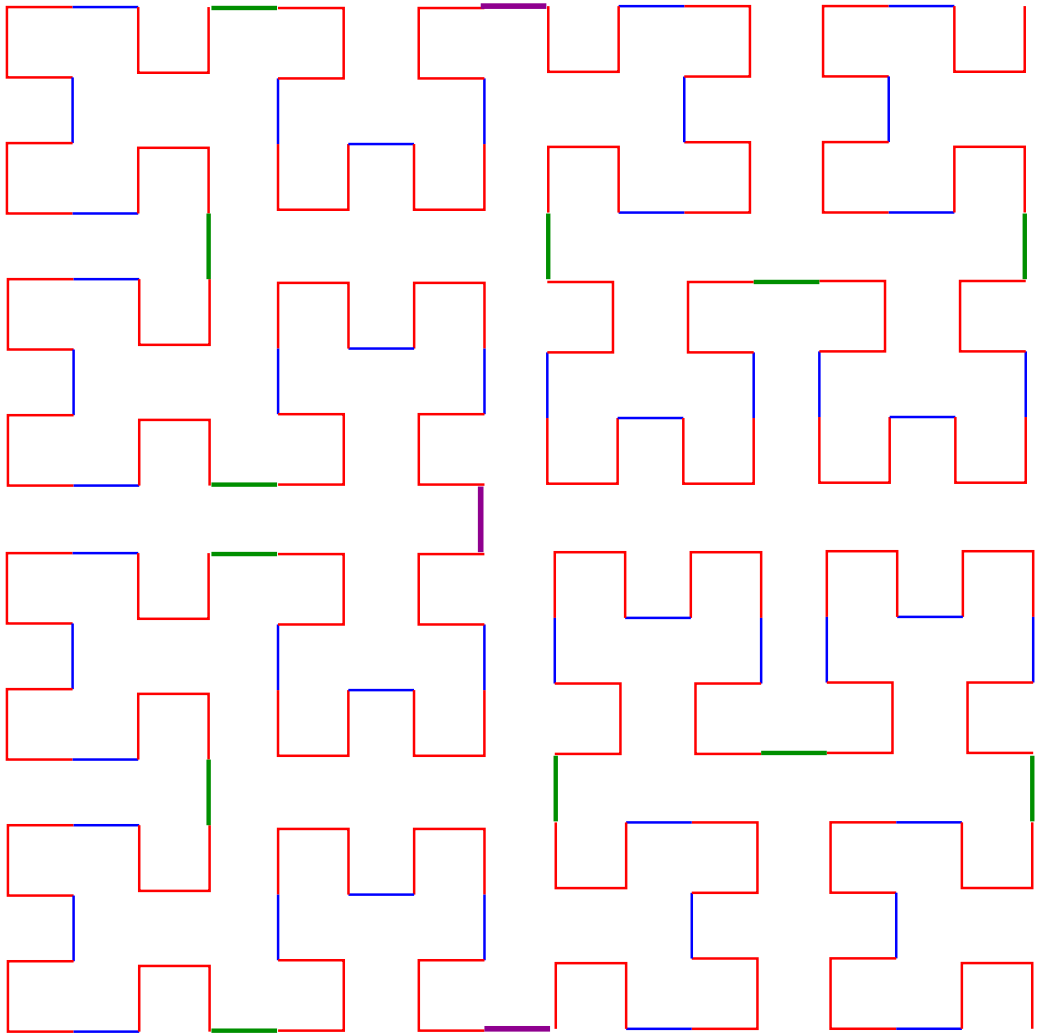
H_2



H_3



H_4



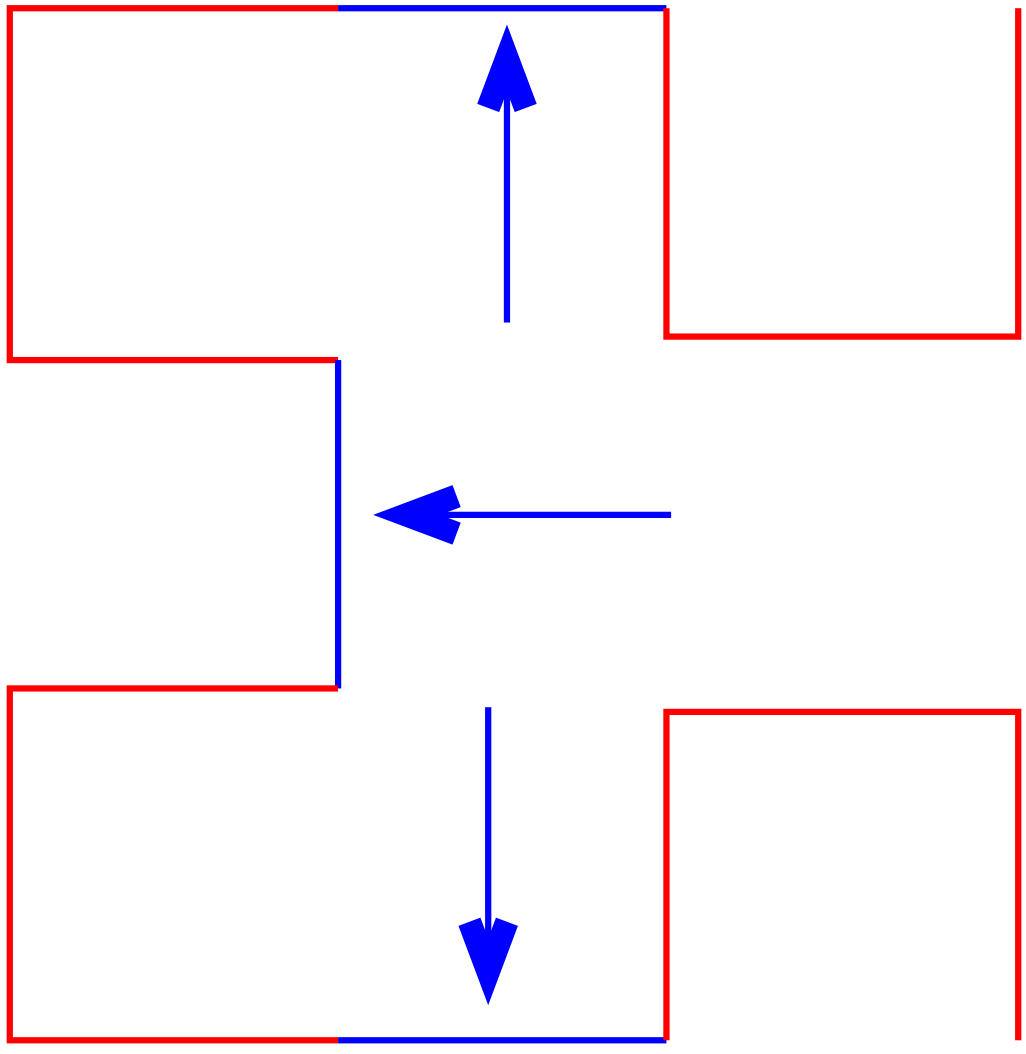
Padrão

As figuras mostram que H_{i+1} é obtida pela composição de 4 instâncias de H_i de metade do tamanho e com a rotação apropriada, ligadas entre si por meio de 3 linhas de conexão.

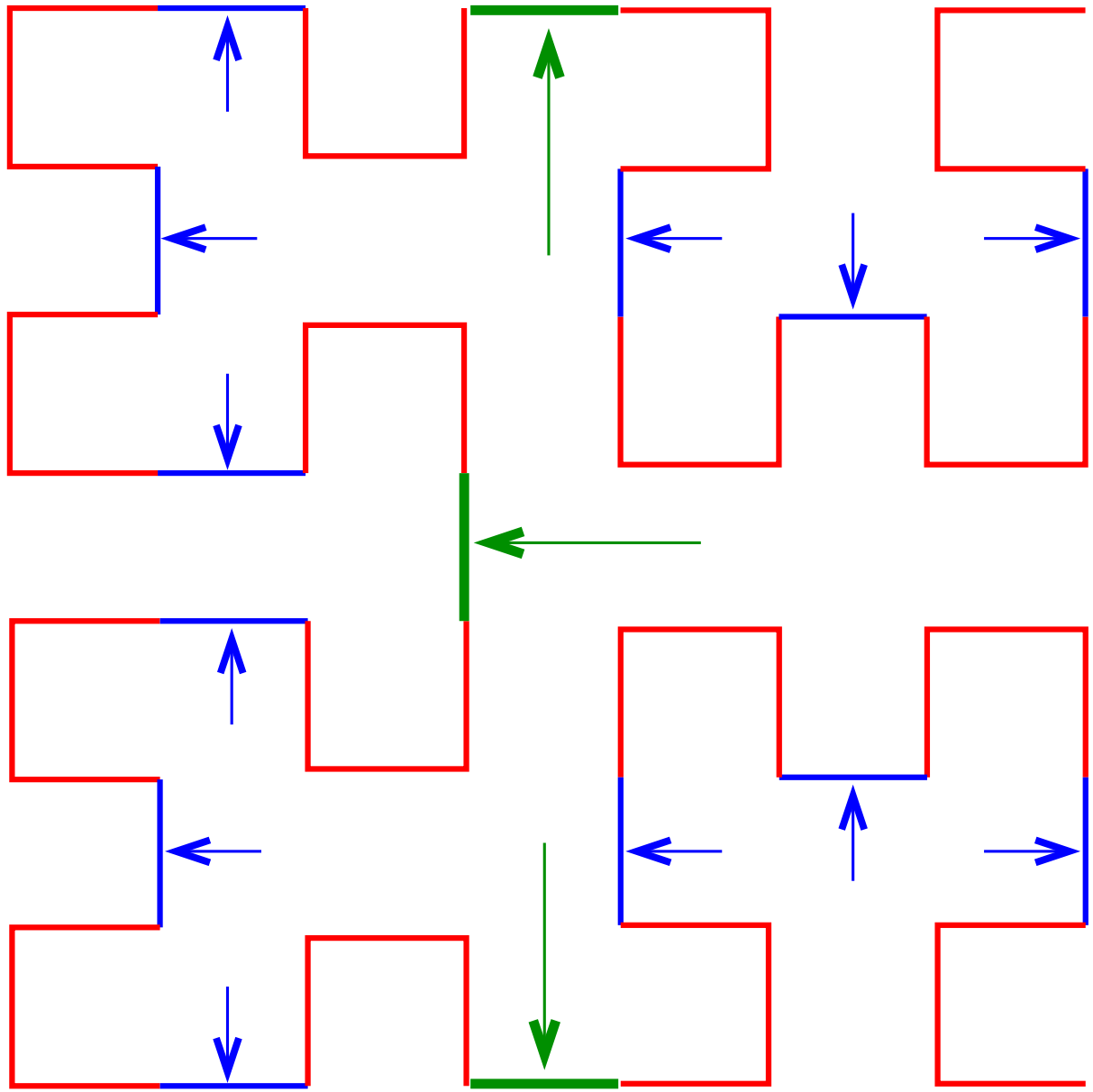
Por exemplo:

- H_1 é formada por 4 H_0 (vazio) conectados por 3 linhas.
- H_2 é formada por 4 H_1 conectados por 3 linhas
- H_3 é formada por 4 H_2 conectados por 3 linhas

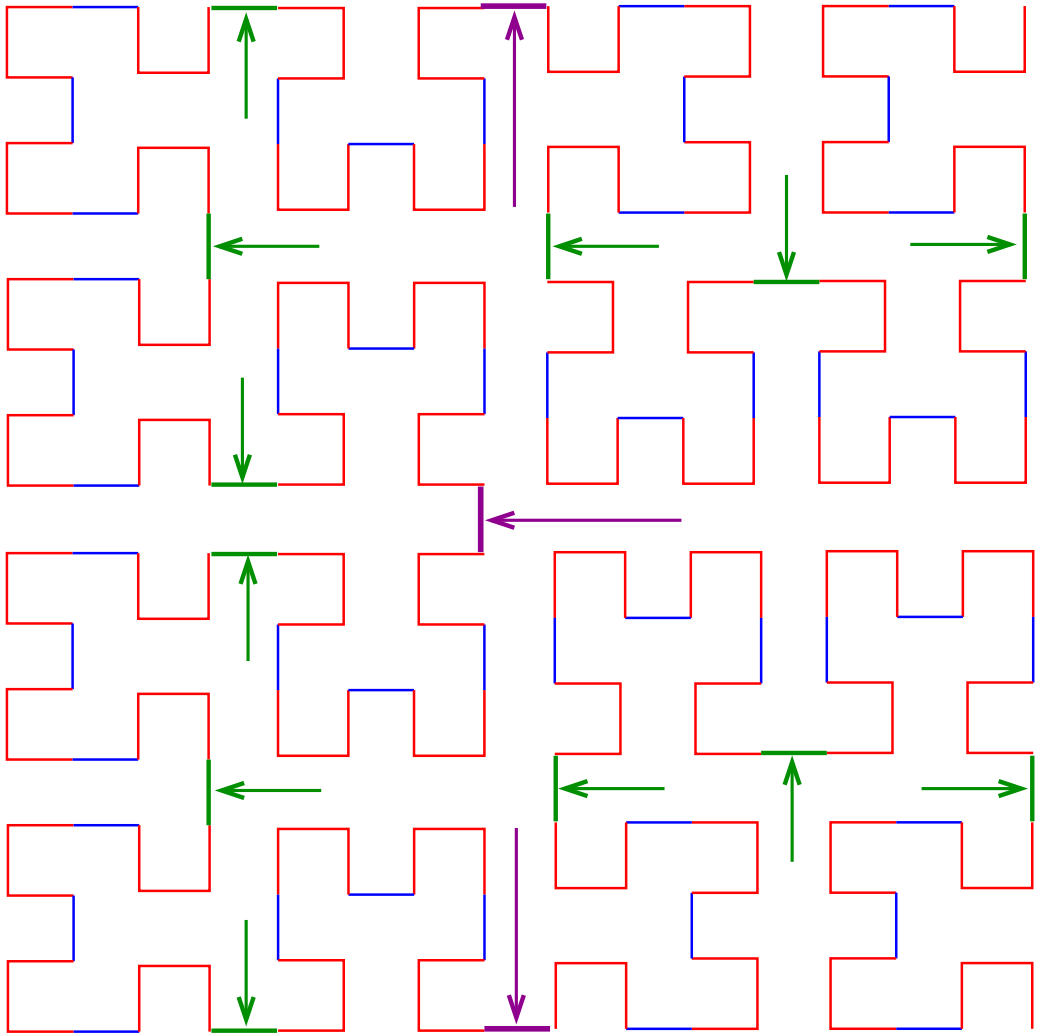
H_2



H_3



H_4



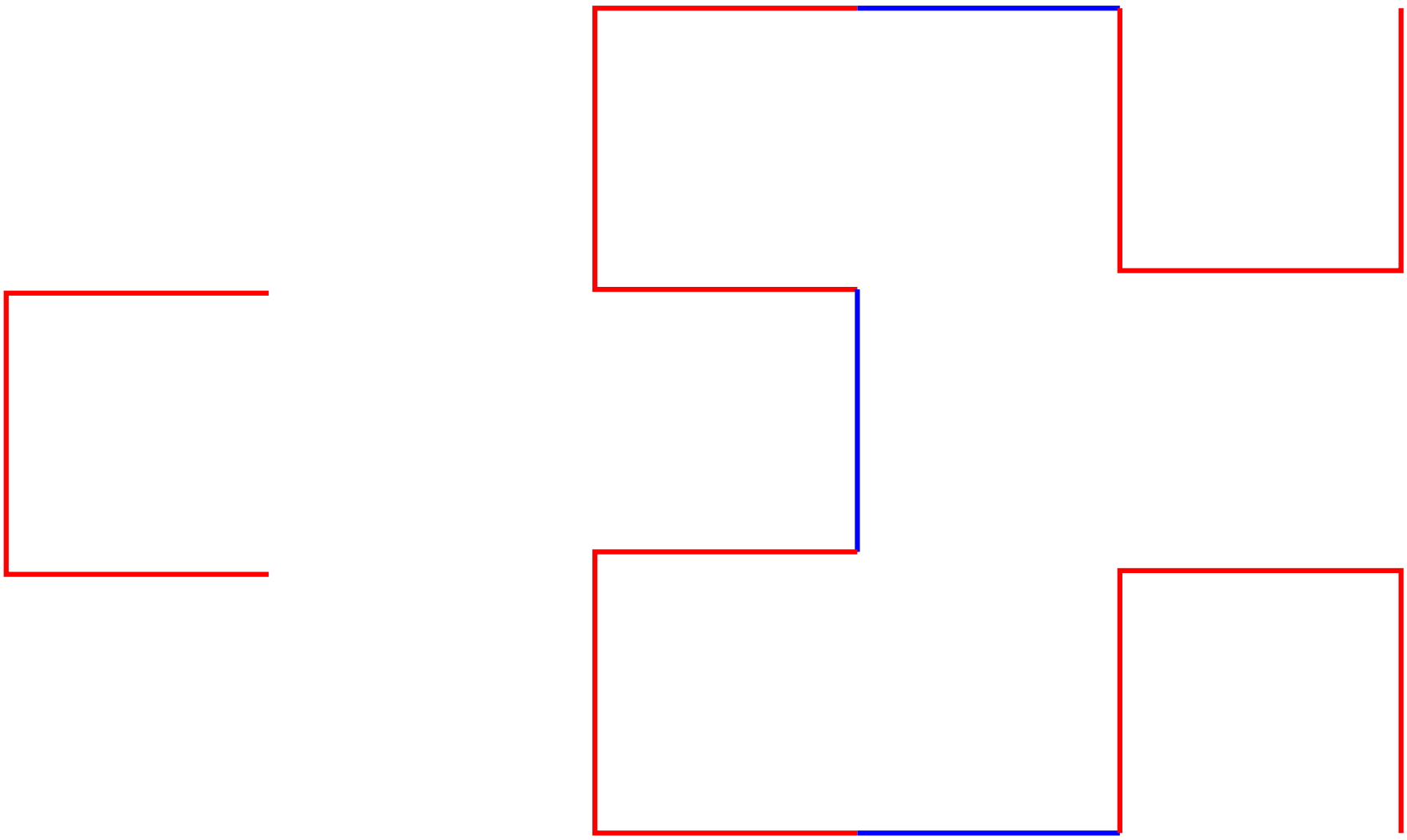
Partes da curva

Para ilustrar, denotaremos as quatro possíveis instâncias por A, B, C e D:

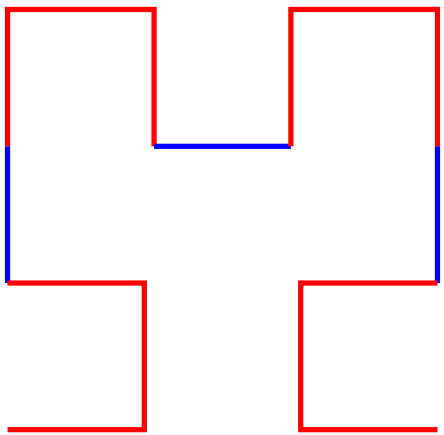
- A será o padrão que tem a "abertura" para direita;
- B será o padrão que tem a "abertura" para baixo;
- C será o padrão que tem a "abertura" para esquerda; e
- D será o padrão que tem a "abertura" para cima.

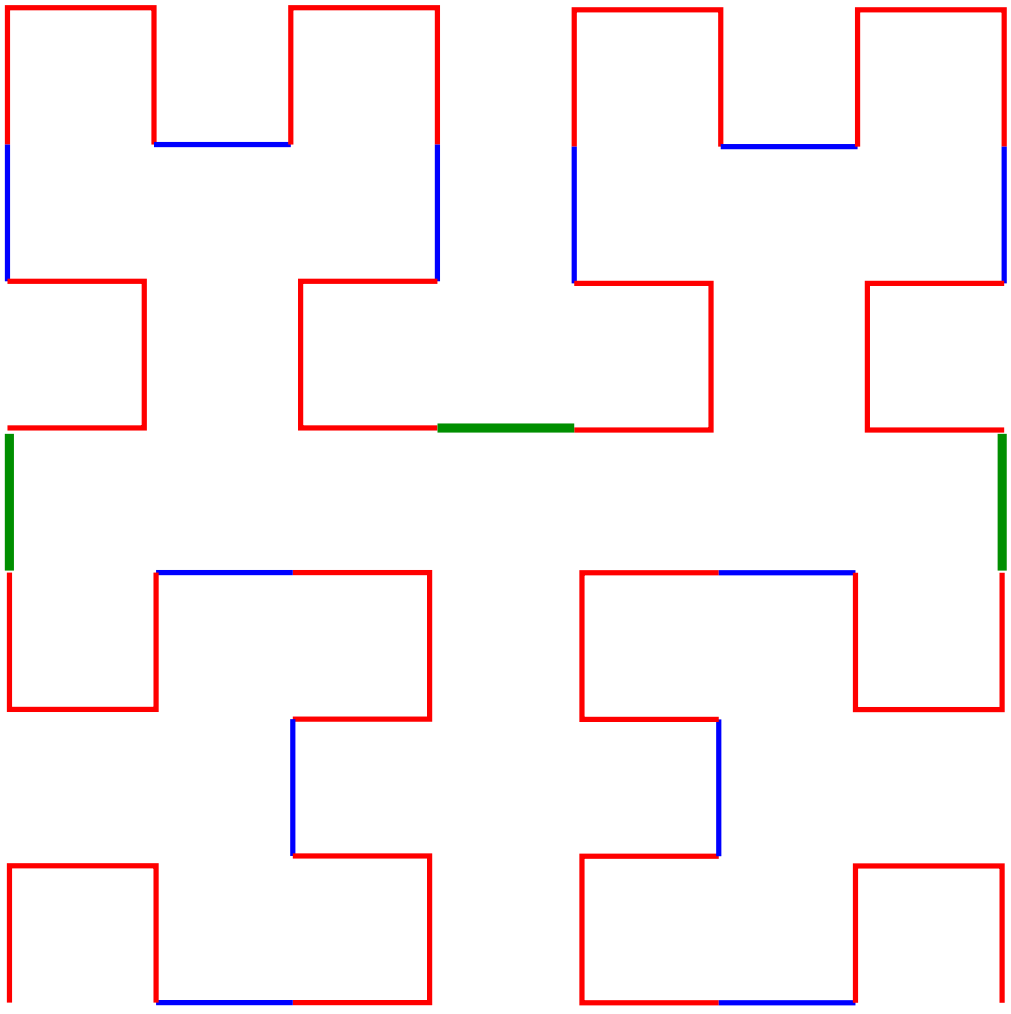
Representaremos a chamada da função que desenha as interconexões por meio da setas $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$.

A_1 e A_2

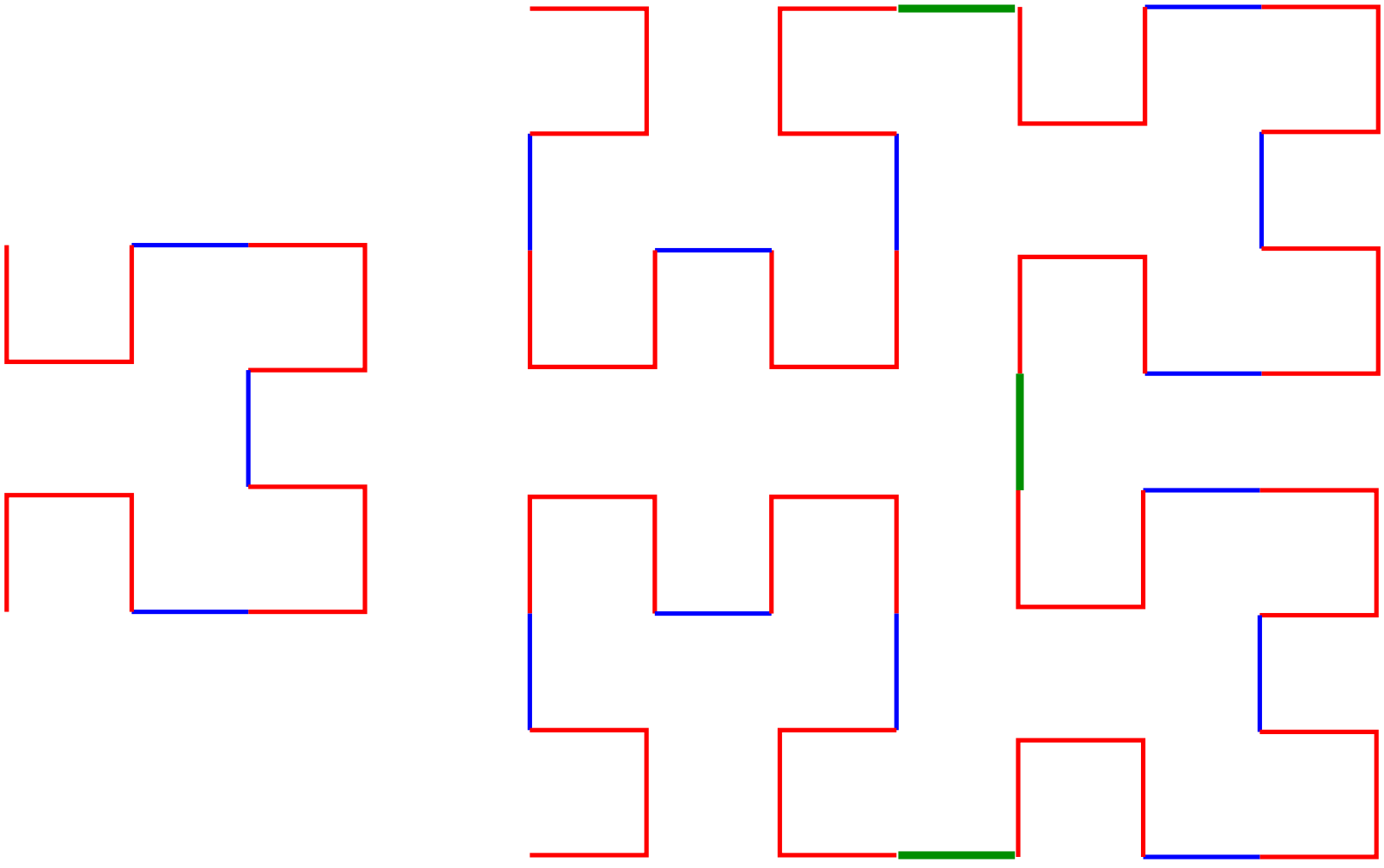


B_2 e B_3

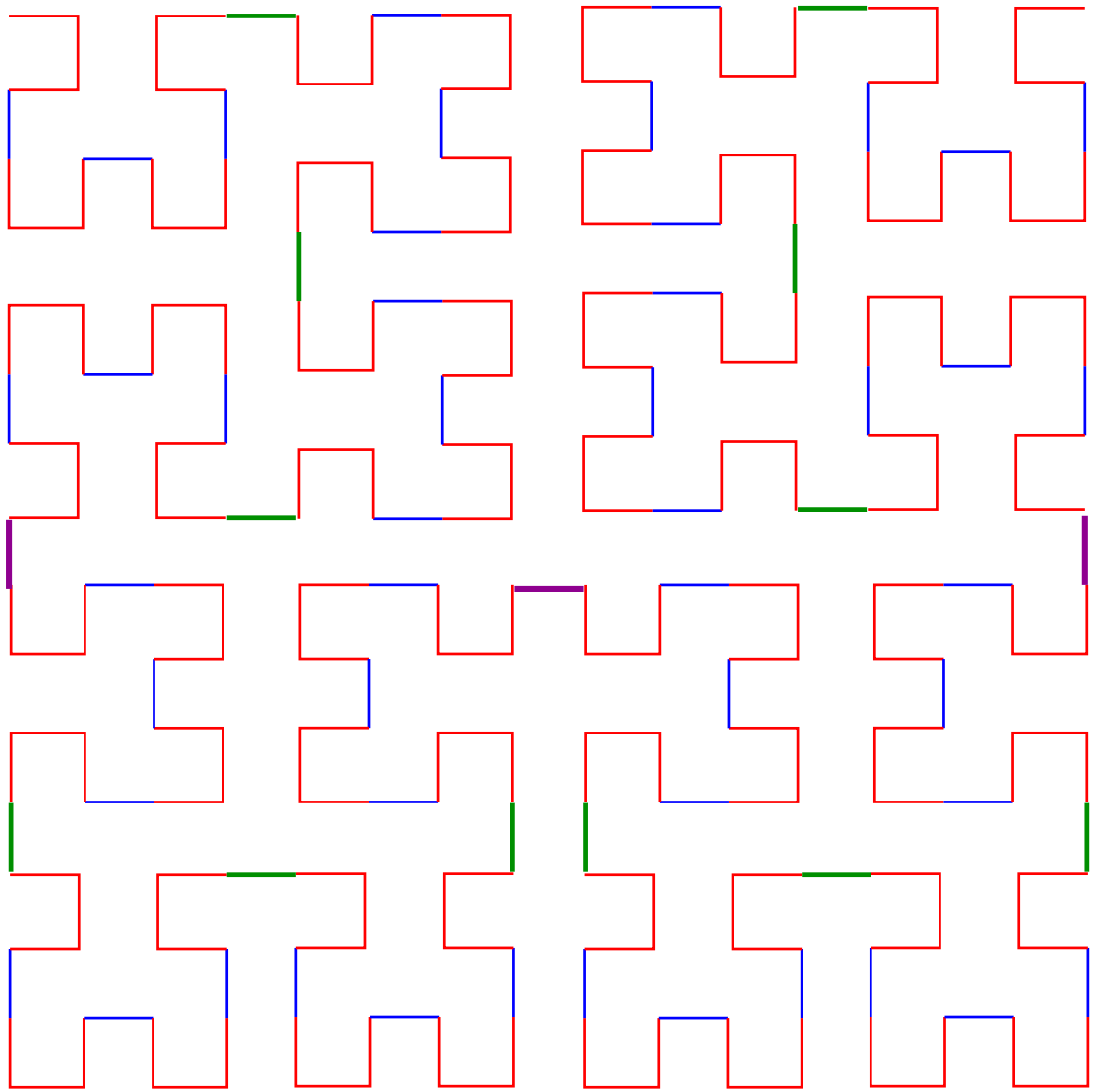




C_2 e C_3



D_4



Esquema recursivo

Assim, surge o seguinte esquema recursivo:

$$
\begin{array}{lllllllll}
A_k: & D_{k-1} & \leftarrow & A_{k-1} & \downarrow & A_{k-1} & \rightarrow & B_{k-1} \\
B_k: & C_{k-1} & \uparrow & B_{k-1} & \rightarrow & B_{k-1} & \downarrow & A_{k-1} \\
C_k: & B_{k-1} & \rightarrow & C_{k-1} & \uparrow & C_{k-1} & \leftarrow & D_{k-1} \\
D_k: & A_{k-1} & \downarrow & D_{k-1} & \leftarrow & D_{k-1} & \uparrow & C_{k-1}
\end{array}
$$

Para desenhar os segmentos utilizaremos a chamada de uma função

```
linha(x,y,direcao,comprimento)
```

que "move um pincel" da posição (x,y) em uma dada direcao por um certo comprimento.

```
typedef enum {DIREITA, ESQUERDA, CIMA, BAIXO} Direcao;
void linha(int *x, int *y,Direcao direcao,
        int comprimento) {
   switch (direcao) {
   case DIREITA   :  *x = *x + comprimento;
       break;
   case ESQUERDA  :  *x = *x - comprimento;
       break;
   case CIMA      :  *y = *y + comprimento;
       break;
   case BAIXO     :  *y = *y - comprimento;
       break;
   }
   desenheLinha(*x, *y);
}
```

A_k

```
void
a(int k, int *x, int *y, int comprimento) {
   if (k > 0) {
       d(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
       a(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, BAIXO, comprimento);
       a(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, DIREITA, comprimento);
       b(k-1, x, y, comprimento);
   }
}
```

B_k

```
void
b(int k, int *x, int *y, int comprimento) {
   if (k > 0) {
        c(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, CIMA, comprimento);
        b(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, DIREITA, comprimento);
        b(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, BAIXO, comprimento);
        a(k-1, x, y, comprimento);
   }
}
```

C_k

```
void
c(int k, int *x, int *y, int comprimento) {
   if (k > 0) {
       b(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, DIREITA, comprimento);
       c(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, CIMA, comprimento);
       c(k-1, x, y, comprimento);
       linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
       d(k-1, x, y, comprimento);
   }
}
```

D_k

```
void
d(int k, int *x, int *y, int comprimento) {
   if (k > 0) {
        a(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, BAIXO, comprimento);
        d(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, ESQUERDA, comprimento);
        d(k-1, x, y, comprimento);
        linha(x, y, CIMA, comprimento);
        c(k-1, x, y, comprimento);
   }
}
```