

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2018

Poliedros

Descrição vaga: região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Poliedros

Descrição vaga: região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Definição da página 19 do livro de Preparata & Shamos:

Um **poliedro** em \mathbb{R}^3 é a região do espaço limitada por um conjunto finito de polígonos (planos) tal que cada aresta de um destes polígonos é compartilhada por exatamente um outro polígono (**polígono adjacente**) e nenhum subconjunto dos polígonos tem essa mesma propriedade.

Poliedros

Descrição vaga: região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice em comum ou tem uma aresta em comum.

Definição da página 19 do livro de Preparata & Shamos:

Um **poliedro** em \mathbb{R}^3 é a região do espaço limitada por um conjunto finito de polígonos (planos) tal que cada aresta de um destes polígonos é compartilhada por exatamente um outro polígono (**polígono adjacente**) e nenhum subconjunto dos polígonos tem essa mesma propriedade.

Os vértices e arestas dos polígonos são os **vértices** e **arestas** do poliedro; os polígonos são as **faces** do poliedro.

Fronteira de um poliedro

- ▶ **pontos (vértices)**, de dimensão zero;
- ▶ **segmentos (arestas)**, de dimensão um;
- ▶ **polígonos (faces)**, de dimensão dois.

Às vezes é conveniente exigirmos que os **polígonos** sejam convexos (neste caso permitimos que duas faces sejam coplanares).

Fronteira de um poliedro

- ▶ **pontos (vértices)**, de dimensão zero;
- ▶ **segmentos (arestas)**, de dimensão um;
- ▶ **polígonos (faces)**, de dimensão dois.

Às vezes é conveniente exigirmos que os **polígonos** sejam convexos (neste caso permitimos que duas faces sejam coplanares).

Em um poliedro, temos que:

- ▶ Componentes se intersectam 'propriamente';
- ▶ A topologia local é 'própria';
- ▶ A topologia global é 'própria'.

Interseção própria das componentes

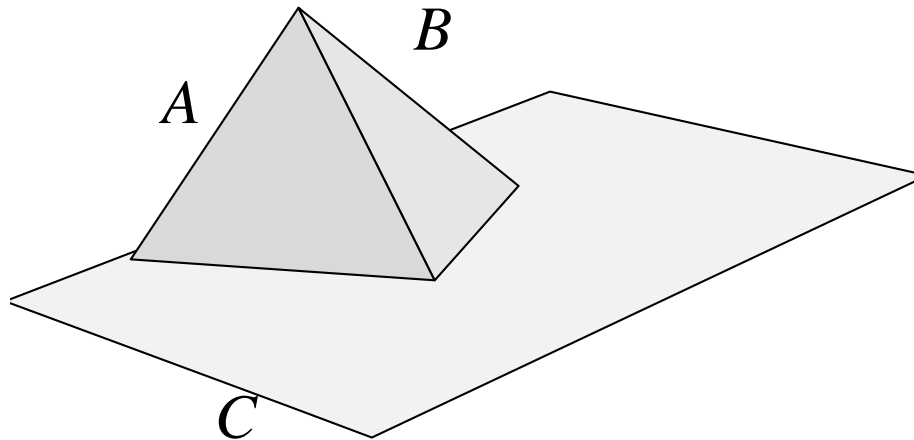
Para cada par de faces, exigimos que:

- ▶ elas sejam disjuntas, ou
- ▶ elas tenham um único vértice em comum, ou
- ▶ elas tenham dois vértices e a aresta os ligando em comum.

Interseção própria das componentes

Para cada par de faces, exigimos que:

- ▶ elas sejam disjuntas, ou
- ▶ elas tenham um único vértice em comum, ou
- ▶ elas tenham dois vértices e a aresta os ligando em comum.



A face A e B não intersectam C propriamente.

Topologia local própria

A **topologia local** é como a superfície (fronteira) do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Topologia local própria

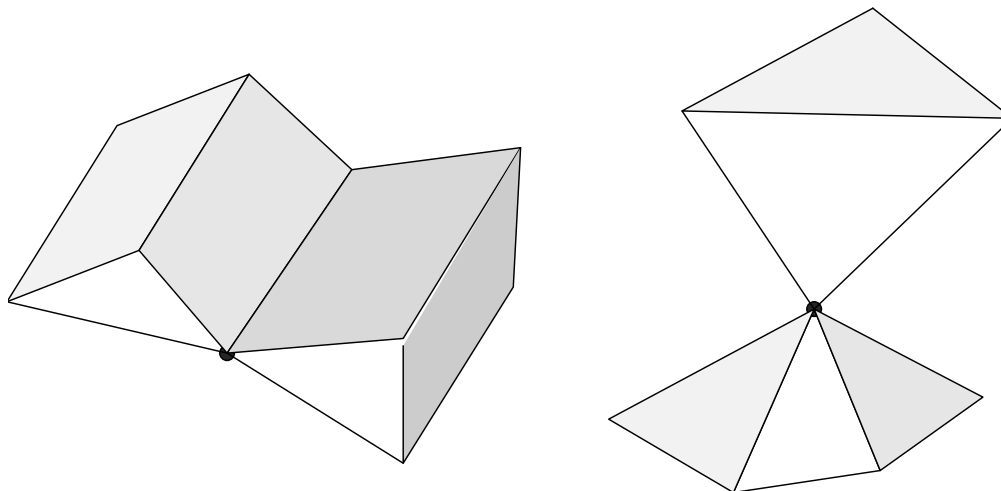
A **topologia local** é como a superfície (fronteira) do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Na **vizinhança de cada ponto**, a superfície de um poliedro deve ser indistinguível de um **disco** a menos de dobrar e esticar a superfície como se esta fosse feita de um material moldável (não podemos cortar a superfície).

Topologia local própria

A **topologia local** é como a superfície (fronteira) do poliedro se parece na vizinhança de um ponto.

Na **vizinhança de cada ponto**, a superfície de um poliedro deve ser indistinguível de um **disco** a menos de dobrar e esticar a superfície como se esta fosse feita de um material moldável (não podemos cortar a superfície).



A superfície não é um disco na vizinhança dos pontos marcados.

Topologia global própria

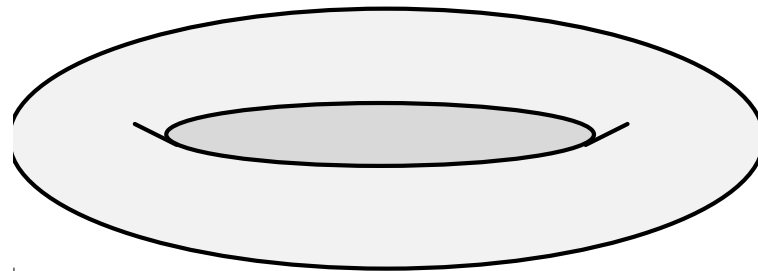
A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Topologia global própria

A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Estamos admitindo aqui que um poliedro tenha **buracos** (como um pneu ou **donut**).

O número de buracos é chamado de **genus** da superfície.



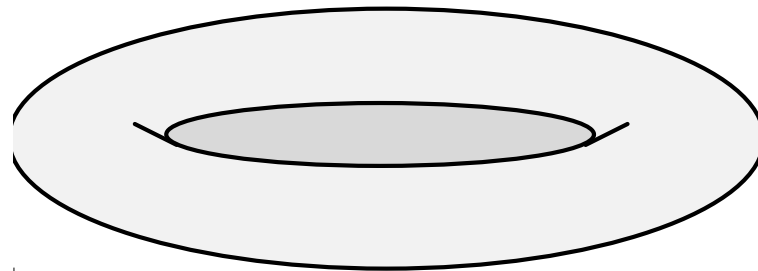
Uma superfície de genus 1: um torus.

Topologia global própria

A superfície deve ser conexa, fechada e limitada.

Estamos admitindo aqui que um poliedro tenha **buracos** (como um pneu ou **donut**).

O número de buracos é chamado de **genus** da superfície.



Uma superfície de genus 1: um torus.

Poliedros de genus zero são topologicamente equivalentes a uma esfera e muitas vezes são chamados de **poliedros simples**.

Resumo

Fronteira de um poliedro: coleção finita de polígonos planos convexos limitados (as faces do poliedro) tal que:

- ▶ As faces se intersectam propriamente;
- ▶ A vizinhança de cada ponto é topologicamente um disco aberto;
- ▶ A superfície é conexa, ou equivalentemente o 1-esqueleto é conexo.

1-esqueleto: grafo formado pelos vértices e arestas dos polígonos.

Resumo

Fronteira de um poliedro: coleção finita de polígonos planos convexos limitados (as faces do poliedro) tal que:

- ▶ As faces se intersectam propriamente;
- ▶ A vizinhança de cada ponto é topologicamente um disco aberto;
- ▶ A superfície é conexa, ou equivalentemente o 1-esqueleto é conexo.

1-esqueleto: grafo formado pelos vértices e arestas dos polígonos.

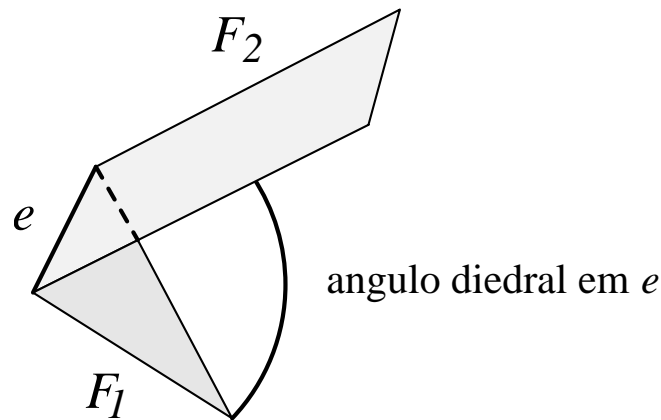
A fronteira é fechada e contém no seu interior uma porção limitada do espaço.

Cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces; essas faces são ditas **adjacentes**.

Poliedro convexo

P poliedro, e aresta de P

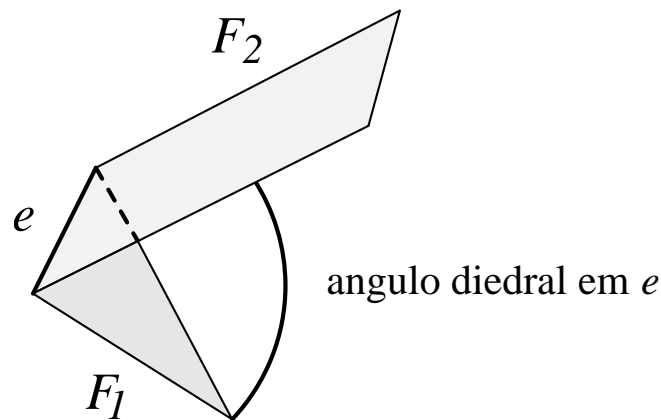
O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e .



Poliedro convexo

P poliedro, e aresta de P

O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e .

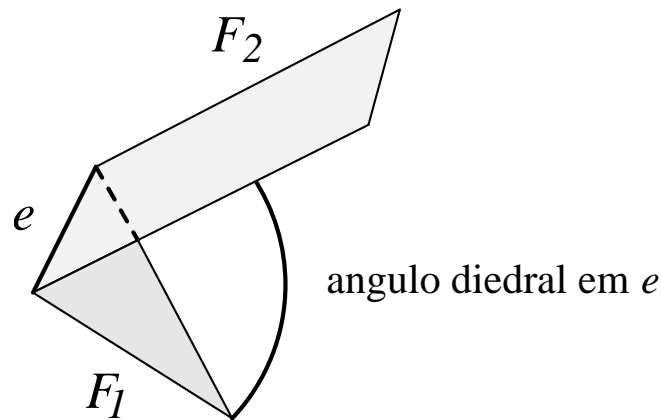


Um poliedro é **convexo** se todos os seus ângulos diedrais são convexos, ou seja, no máximo π .

Poliedro convexo

P poliedro, e aresta de P

O ângulo *diedral* com relação a e é o ângulo interno entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e .



Um poliedro é **convexo** se todos os seus ângulos diedrais são convexos, ou seja, no máximo π .

Poliedros convexos são chamados de **politopos**.

Polítopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Polítopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Surpreendentemente, existem somente **cinco** politopos regulares: os chamados **sólidos Platônicos**.

Polítopos regulares

Polígono regular: tem ângulos iguais em cada vértice e todas as aresta têm o mesmo comprimento.

Existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Surpreendentemente, existem somente **cinco** politopos regulares: os chamados **sólidos Platônicos**.

Ideia da prova: ângulos internos de um polígono regular aumentam com o número de vértices, mas não existe muito espaço (no máximo 2π) para colocarmos esses ângulos ao redor de um vértice do politopo.

Análise dos ângulos

P : poliedro regular com p vértices em cada face.
Cada face é um polígono regular.

Análise dos ângulos

P : poliedro regular com p vértices em cada face.

Cada face é um polígono regular.

Soma dos ângulos internos de uma face: $(p - 2)\pi$.

Logo o ângulo interno em cada vértice da face é $(1 - \frac{2}{p})\pi$.

Análise dos ângulos

P : poliedro regular com p vértices em cada face.

Cada face é um polígono regular.

Soma dos ângulos internos de uma face: $(p - 2)\pi$.

Logo o ângulo interno em cada vértice da face é $(1 - \frac{2}{p})\pi$.

r : número de arestas incidentes a cada vértice de P .

Soma dos ângulos faciais em cada vértice é no máximo 2π . Logo,

$$\begin{aligned} r\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi < 2\pi &\Rightarrow 1 - \frac{2}{p} < \frac{2}{r} \\ &\Rightarrow pr < 2r + 2p \\ &\Rightarrow pr - 2r - 2p + 4 < 4 \\ &\Rightarrow (p - 2)(r - 2) < 4. \end{aligned}$$

Análise dos ângulos

P : poliedro regular com p vértices em cada face.

r : número de arestas incidentes a cada vértice de P .

$$(p - 2)(r - 2) < 4$$

Note que $p \geq 3$ e $r \geq 3$. Então...

Análise dos ângulos

P : poliedro regular com p vértices em cada face.

r : número de arestas incidentes a cada vértice de P .

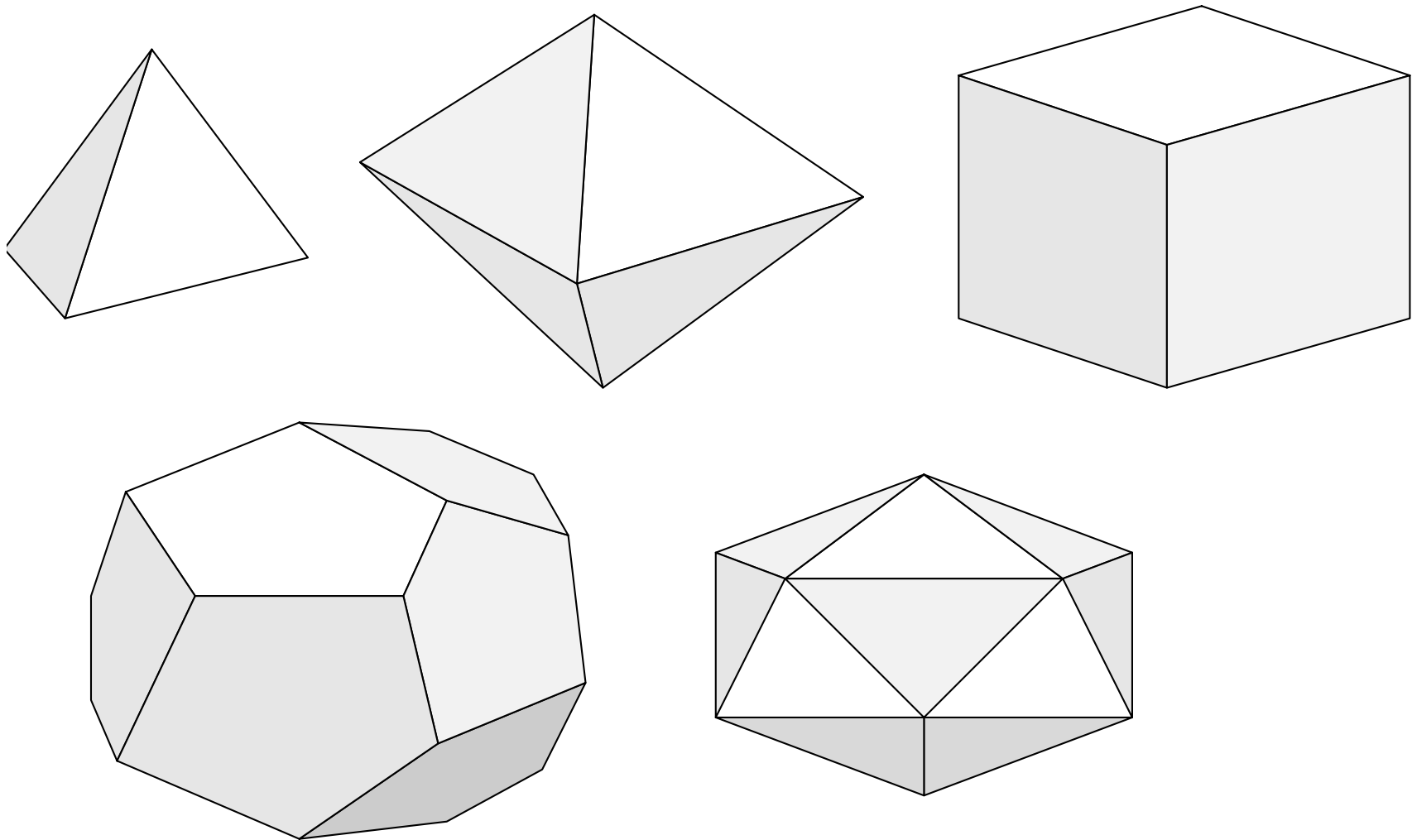
$$(p - 2)(r - 2) < 4$$

Note que $p \geq 3$ e $r \geq 3$. Então...

p	r	$(p - 2)(r - 2)$	Nome	Descrição
3	3	1	tetraedro	3 triângulos incidentes a cada vértice
4	3	2	cubo	3 quadrados incidentes a cada vértice
3	4	2	octaedro	4 triângulos incidentes a cada vértice
5	3	3	dodecaedro	3 pentágonos incidentes a cada vértice
3	5	3	icosaedro	5 triângulos incidentes a cada vértice

Polítopos regulares

Os cinco sólidos Platônicos:
tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Fórmula de Euler

V : número de vértices

E : número de arestas

F : número de faces

Nome	(p, r)	V	E	F
Tetraedro	(3, 3)	4	6	4
Cubo	(4, 3)	8	12	6
Octaedro	(3, 4)	6	12	8
Dodecaedro	(3, 5)	20	30	12
Icosaedro	(5, 3)	12	30	20

Fórmula de Euler

V : número de vértices

E : número de arestas

F : número de faces

Nome	(p, r)	V	E	F
Tetraedro	(3, 3)	4	6	4
Cubo	(4, 3)	8	12	6
Octaedro	(3, 4)	6	12	8
Dodecaedro	(3, 5)	20	30	12
Icosaedro	(5, 3)	12	30	20

$$V - E + F = 2.$$

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

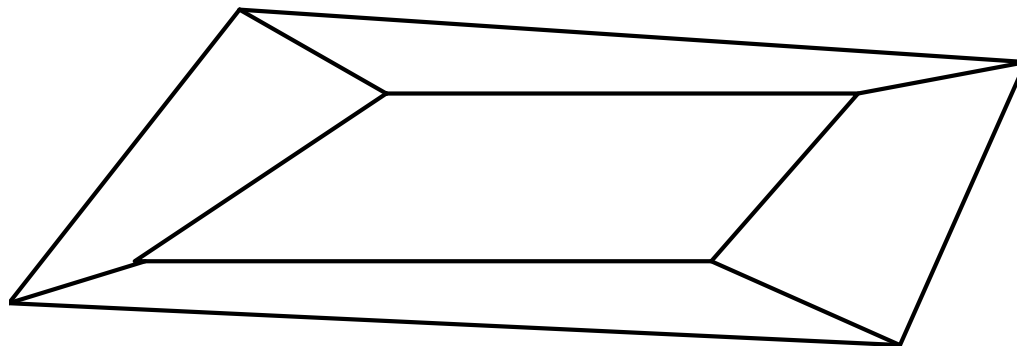
- ▶ Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- ▶ Um teorema para árvores.
- ▶ Prova por indução.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- ▶ Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- ▶ Um teorema para árvores.
- ▶ Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G .



Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- ▶ Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- ▶ Um teorema para árvores.
- ▶ Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G .

Indução:

Se G é uma árvore, $V = E + 1$.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- ▶ Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- ▶ Um teorema para árvores.
- ▶ Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G .

Indução:

Se G é uma árvore, $V = E + 1$.

Senão G tem um circuito C .

Seja e uma aresta de C , e $G' = G - e$.

G' é conexo e tem V vértices, $E - 1$ arestas e $F - 1$ faces.

Prova da Fórmula de Euler

A prova consiste em três partes:

- ▶ Transformar o poliedro simples em um grafo planar.
- ▶ Um teorema para árvores.
- ▶ Prova por indução.

O 1-esqueleto de um poliedro é um grafo planar G .

Indução:

Se G é uma árvore, $V = E + 1$.

Senão G tem um circuito C .

Seja e uma aresta de C , e $G' = G - e$.

G' é conexo e tem V vértices, $E - 1$ arestas e $F - 1$ faces.

Por indução, $V - (E - 1) + (F - 1) = 2 = V - E + F$.

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = O(n)$ e $F = O(n)$.

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = O(n)$ e $F = O(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.

Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = O(n)$ e $F = O(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.

Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Aplicando a Fórmula de Euler,

$$V - E + F = 2 \Rightarrow V - E + 2E/3 = 2$$

$$\Rightarrow V - 2 = E/3$$

$$\Rightarrow E = 3V - 6 = O(n)$$

Consequências

Linearidade do número de arestas e faces:

Se $n = V$, então $E = O(n)$ e $F = O(n)$.

Podemos assumir s.p.g. que todas as faces são triângulos.

Logo $E = 3F/2$ e $2E = 3F$.

Aplicando a Fórmula de Euler,

$$V - E + F = 2 \Rightarrow V - E + 2E/3 = 2$$

$$\Rightarrow V - 2 = E/3$$

$$\Rightarrow E = 3V - 6 = O(n)$$

e

$$F = 2E/3 \Rightarrow 2V - 4 = O(n).$$

Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares em um plano π .

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O **produto vetorial** $a \times b$ é normal a π e definido por

Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares em um plano π .

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O **produto vetorial** $a \times b$ é normal a π e definido por

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$

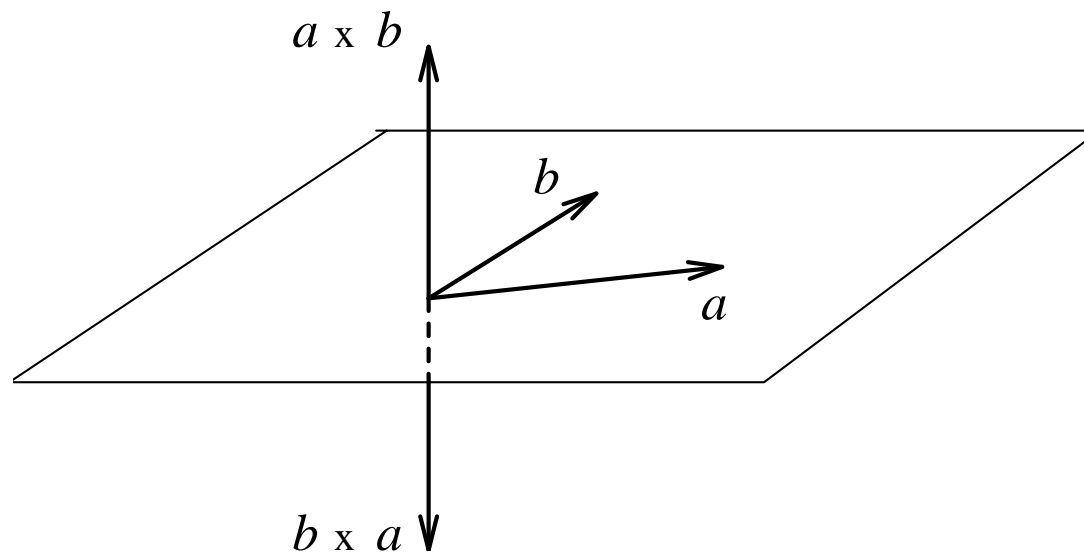
Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares em um plano π .

Sejam $a = p_1 - p_0 = (x_a, y_a, z_a)$ e $b = p_2 - p_0 = (x_b, y_b, z_b)$.

O **produto vetorial** $a \times b$ é normal a π e definido por

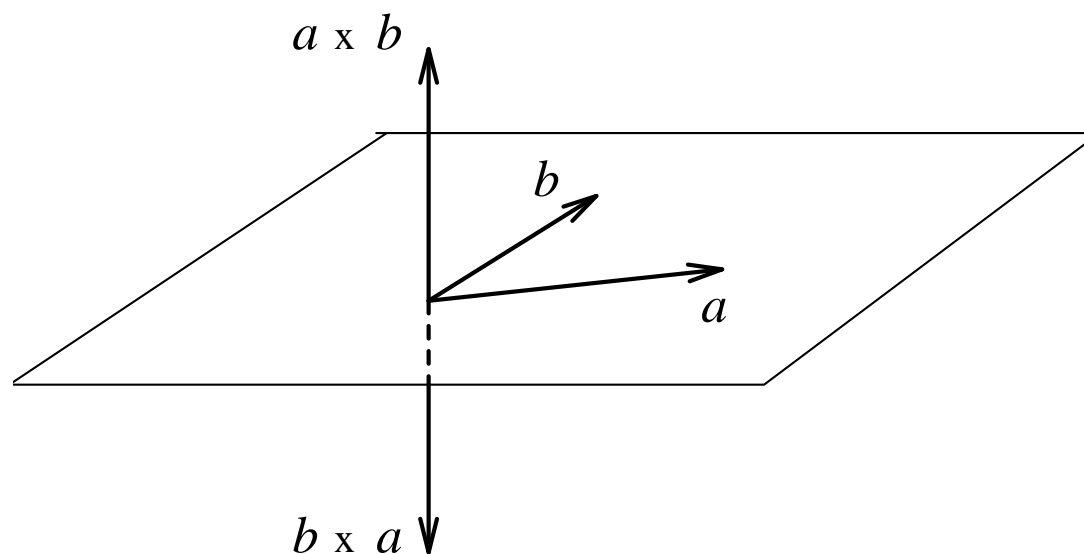
$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$



Primitiva

O **produto vetorial** $a \times b$ é normal a π e definido por

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$



O comprimento do produto vetorial $\|a \times b\|$ é a área do paralelogramo com vértices $\mathbf{0}$, a , b e $a + b$.

Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares.

π : o plano que contém estes pontos.

Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares.

π : o plano que contém estes pontos.

Semi-espaço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$: lado de π apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Semi-espaço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$: lado de π oposto ao apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Primitiva

p_0, p_1, p_2 : três pontos não-colineares.

π : o plano que contém estes pontos.

Semi-espço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$: lado de π apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Semi-espço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$: lado de π oposto ao apontado pelo vetor normal a $\triangle(p_0, p_1, p_2)$.

Sejam $a := p_1 - p_0$ e $b := p_2 - p_0$.

Ponto p_3 está no semi-espço positivo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ se $c \cdot (a \times b) > 0$, onde $c := p_3 - p_0$.

Ponto p_3 está no semi-espço negativo de $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ se $c \cdot (a \times b) < 0$.

Primitiva

Dados pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em \mathbb{R}^3 , a operação primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

(ou Esquerda(p_0, p_1, p_2, p_3))

decide em qual semi-espço do plano orientado π do triângulo (orientado) $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ o ponto p_3 está.

Primitiva

Dados pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em \mathbb{R}^3 , a operação primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

(ou Esquerda(p_0, p_1, p_2, p_3))

decide em qual semi-espço do plano orientado π do triângulo (orientado) $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ o ponto p_3 está.

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

decide em qual semi-espço do plano orientado π está p_3 .

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto deste determinante é 6 vezes o volume sinalizado do tetraedro cujos vértices são p_0, p_1, p_2, p_3 .

Primitiva

Teste-de-Orientação(p_0, p_1, p_2, p_3)

decide em qual semi-espço do plano orientado π está p_3 .

Se $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 0, 1, 2, 3$, então o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto deste determinante é 6 vezes o volume sinalizado do tetraedro cujos vértices são p_0, p_1, p_2, p_3 .

Chamamos de **Volume6** a função que devolve o valor deste determinante (em analogia à função **Área2**).

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no \mathbb{R}^3 , encontrar o fecho convexo $\text{conv}(P)$ dos pontos em P .

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no \mathbb{R}^3 , encontrar o fecho convexo $\text{conv}(P)$ dos pontos em P .

- ▶ Listas de faces
- ▶ Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- ▶ Estrutura de dados *winged-edge* (**arestas aladas**)

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no \mathbb{R}^3 , encontrar o fecho convexo $\text{conv}(P)$ dos pontos em P .

- ▶ Listas de faces
- ▶ Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- ▶ Estrutura de dados *winged-edge* (**arestas aladas**)

Listas de faces: lista com a representação como um polígono de cada face.

Estrutura de dados

Problema: Dado um conjunto finito P de pontos no \mathbb{R}^3 , encontrar o fecho convexo $\text{conv}(P)$ dos pontos em P .

- ▶ Listas de faces
- ▶ Estrutura de dados para poliedros simpliciais
- ▶ Estrutura de dados *winged-edge* (**arestas aladas**)

Listas de faces: lista com a representação como um polígono de cada face.

Desvantagens: informação de adjacência de um só tipo (entre vértices vizinhos em uma face). Caro determinar por exemplo se duas faces são adjacentes.

Poliedros simpliciais

Suas faces são triangulares.

ED para poliedros simpliciais:

- ▶ registros para vértices, arestas e faces.
- ▶ lista de vértices numa ordem arbitrária.
- ▶ arestas apontam para seus vértices extremos e as faces que separam.
- ▶ faces apontam para seus três vértices e arestas.

Poliedros simpliciais

Suas faces são triangulares.

ED para poliedros simpliciais:

- ▶ registros para vértices, arestas e faces.
- ▶ lista de vértices numa ordem arbitrária.
- ▶ arestas apontam para seus vértices extremos e as faces que separam.
- ▶ faces apontam para seus três vértices e arestas.

Vantagem: mais fácil de manipular.

Arestas aladas

Proposta por Baumgart em 1975, é a mais popular para representar a superfície de um poliedro.

Seu foco são as **arestas**.

Lembra a ED que vimos para mapas planares.

Arestas aladas

Proposta por Baumgart em 1975, é a mais popular para representar a superfície de um poliedro.

Seu foco são as **arestas**.

Lembra a ED que vimos para mapas planares.

A ED mantém uma lista de **vértices**, **arestas** e **faces** onde

Vértice. cada vértice v mantém as suas coordenadas (x, y, z) e um apontador $av(v)$ para uma aresta arbitrária incidente a v ;

Face. cada face f mantém um apontador para uma aresta arbitrária $af(f)$ da fronteira de f ;

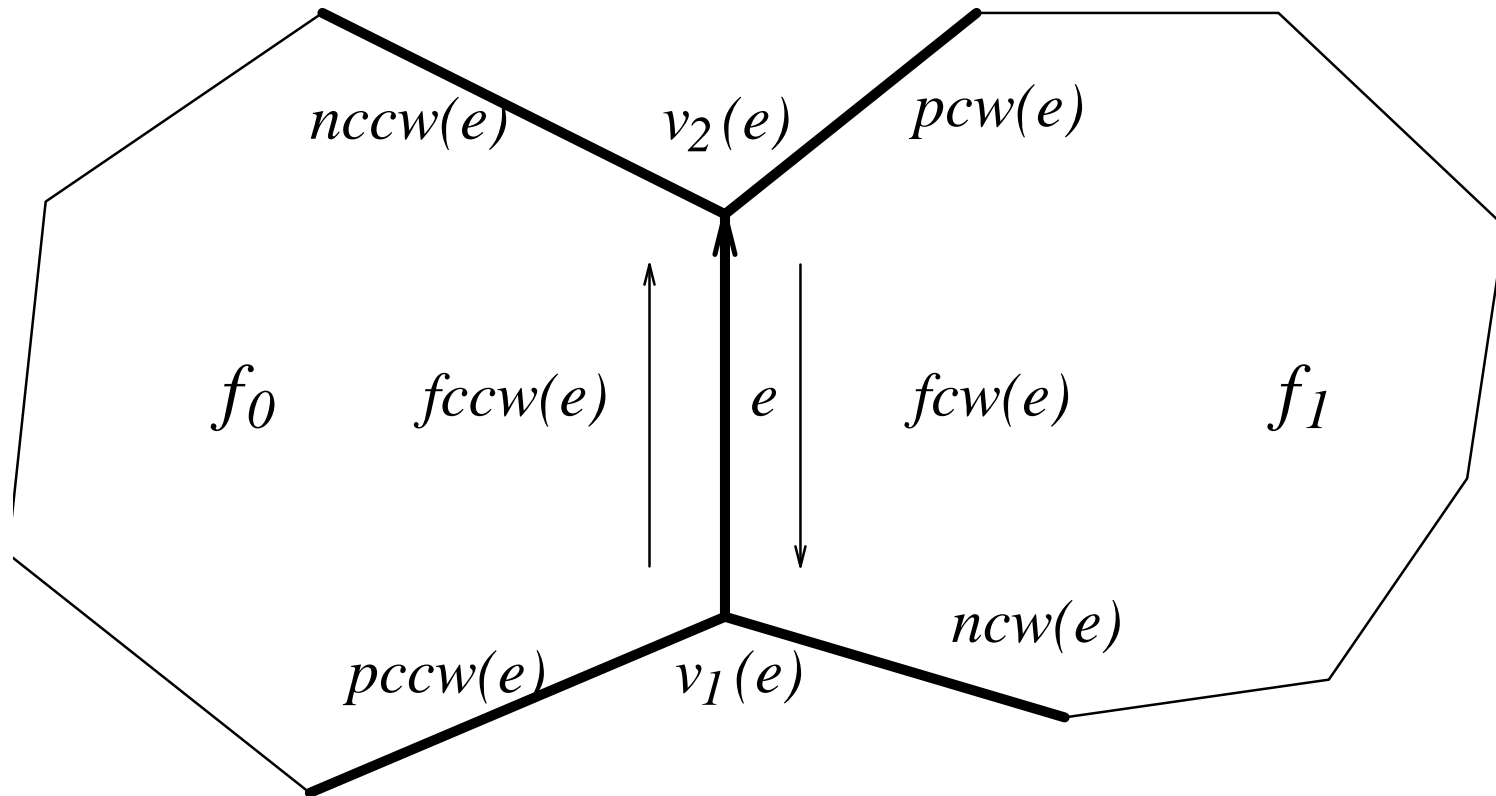
Aresta. cada aresta e tem oito apontadores...

Arestas aladas

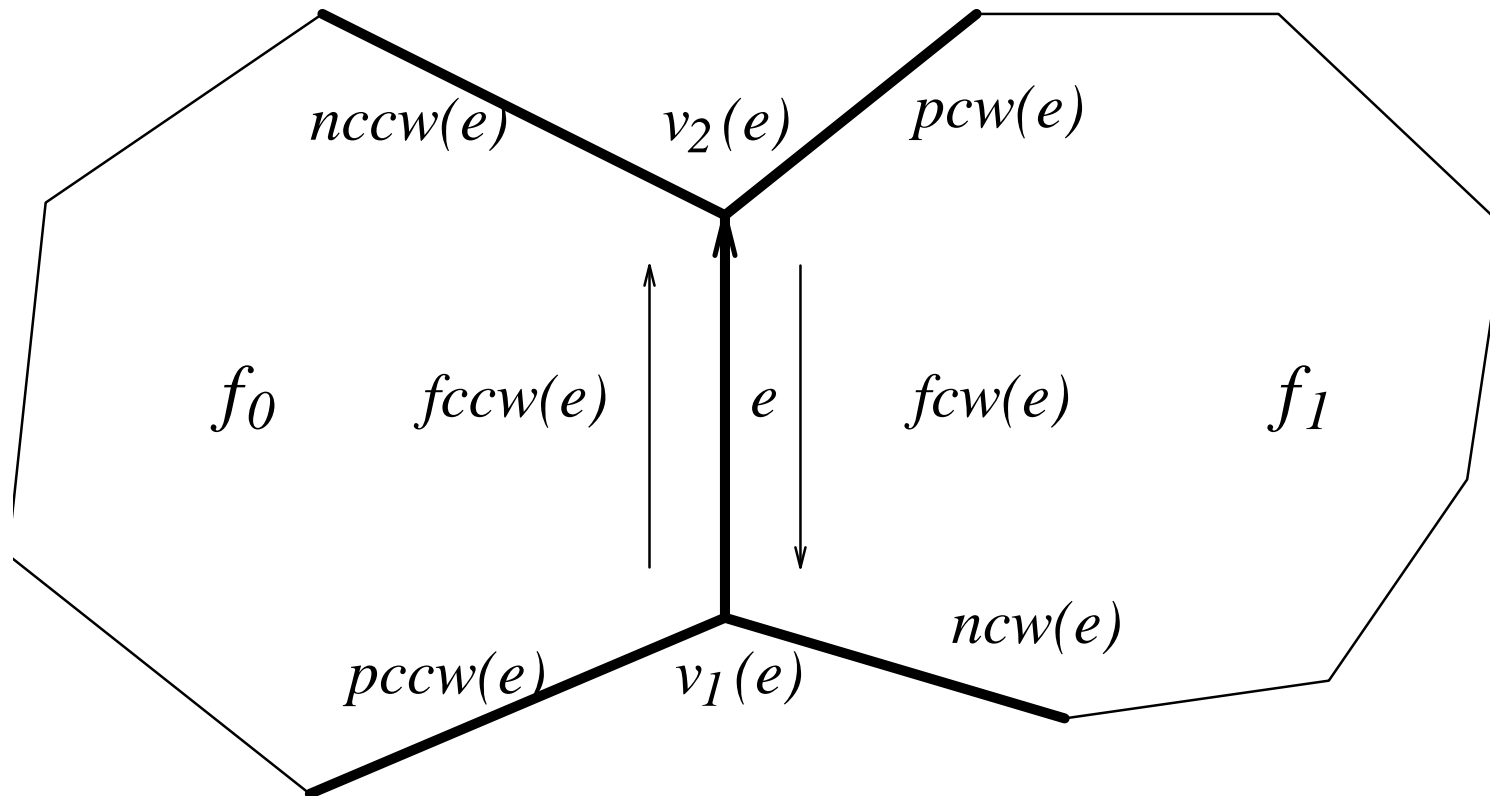
Cada aresta e tem oito apontadores:

- ▶ Dois apontadores para os extremos $v_1(e)$ e $v_2(e)$ de e .
A ordem destes vértices fornece uma orientação para e .

Arestas aladas

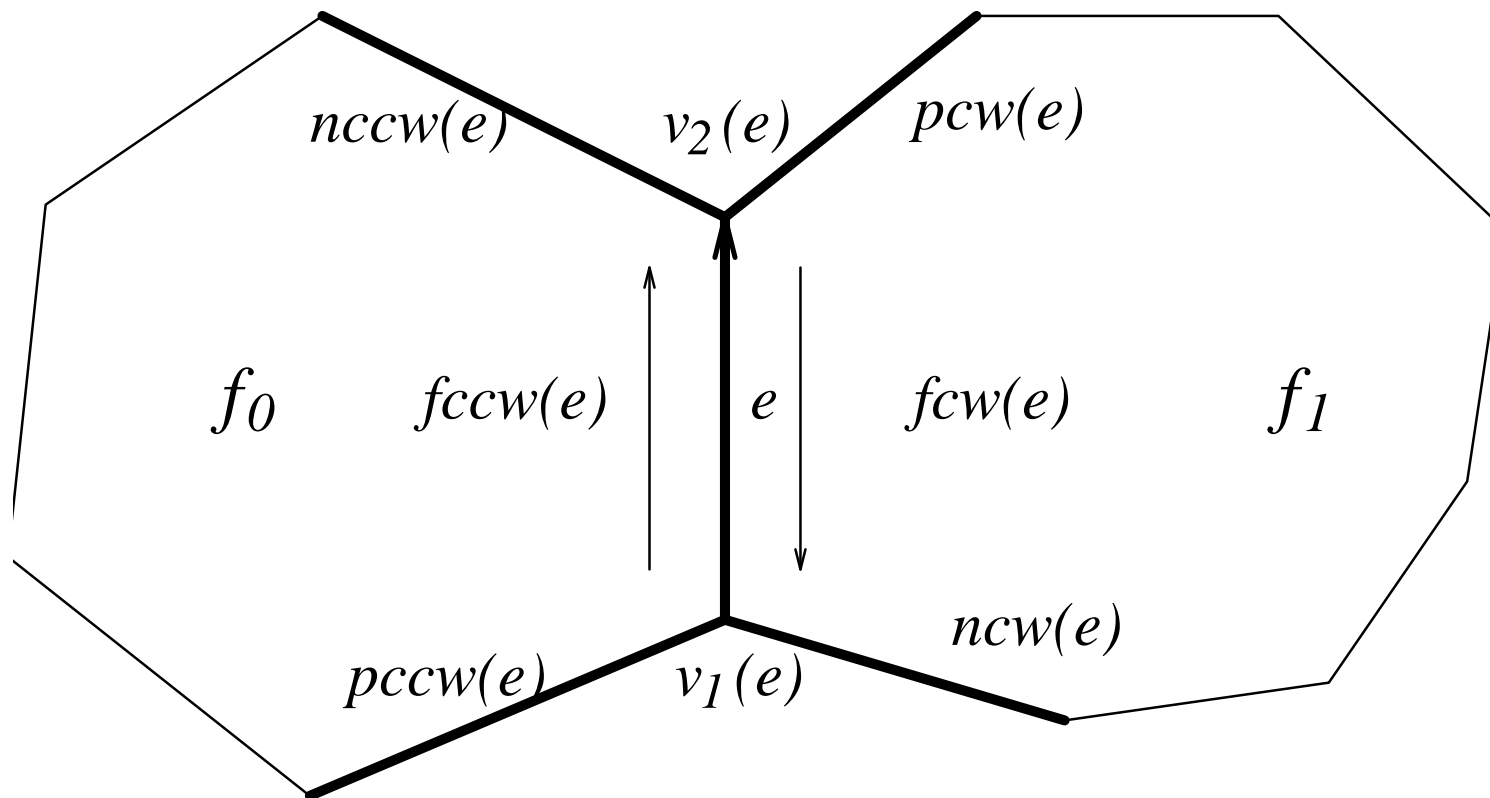


Arestas aladas



Note que cada registro dessa ED ocupa espaço constante.

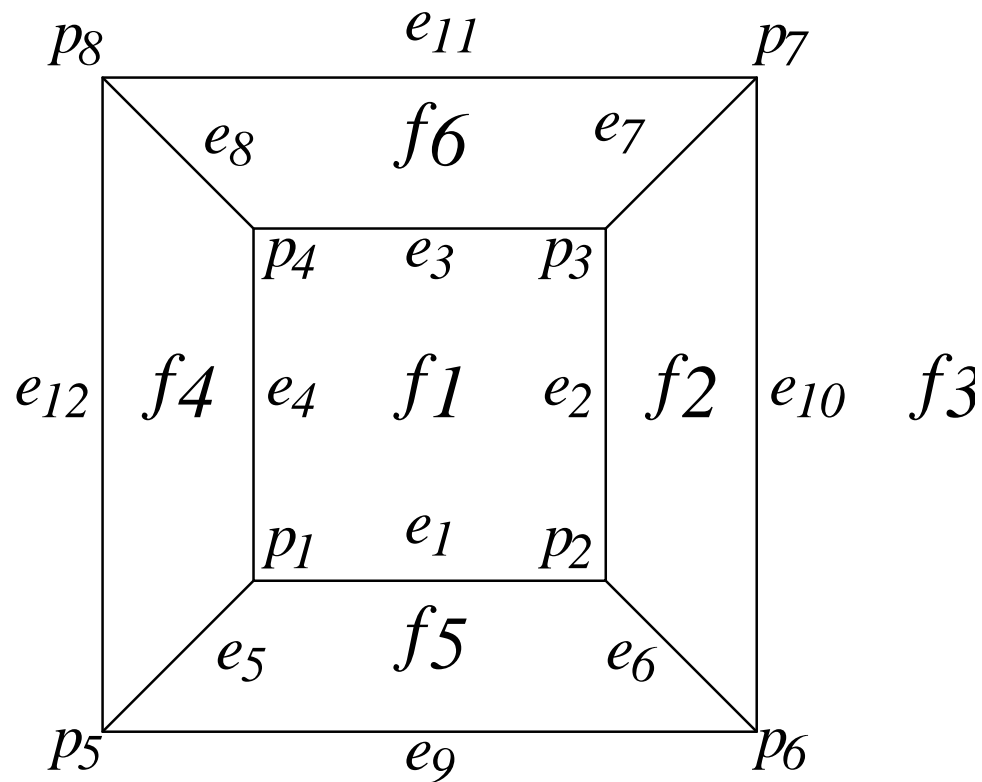
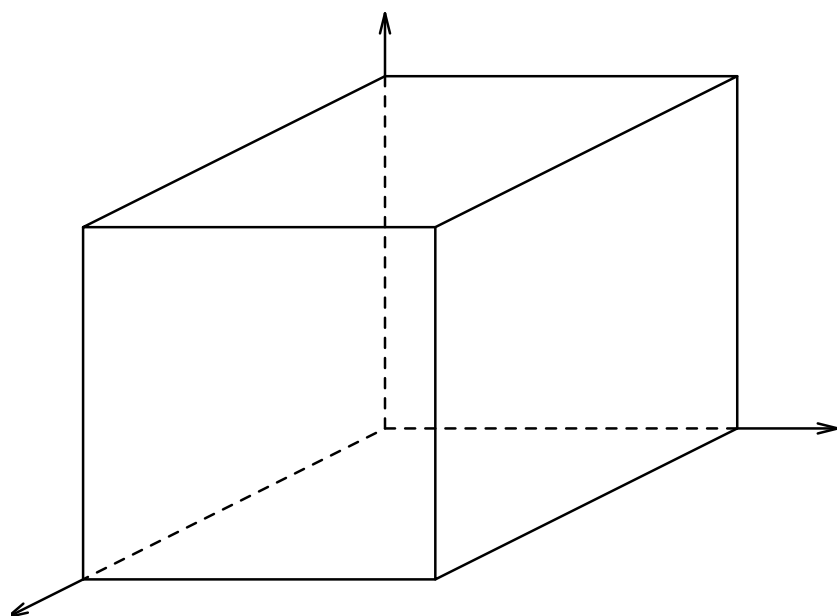
Arestas aladas



Note que cada registro dessa ED ocupa espaço constante.

Vejamos um exemplo completo... **o cubo!**

O cubo



Um cubo e seu 1-esqueleto (grafo planar).

Arestas aladas para o cubo

Lista de vértices:

vértice	(x, y, z)	av
p_1	$(1, 0, 0)$	e_1
p_2	$(1, 1, 0)$	e_2
p_3	$(1, 1, 1)$	e_3
p_4	$(1, 0, 1)$	e_4
p_5	$(0, 0, 0)$	e_9
p_6	$(0, 1, 0)$	e_{10}
p_7	$(0, 1, 1)$	e_{11}
p_8	$(0, 0, 1)$	e_{12}

Arestas aladas para o cubo

Lista de **faces**:

face	<i>af</i>
f_1	e_1
f_2	e_2
f_3	e_{10}
f_4	e_{12}
f_5	e_1
f_6	e_8

Arestas aladas para o cubo

aresta	v_1	v_2	f_{ccw}	f_{cw}	p_{ccw}	n_{ccw}	p_{cw}	n_{cw}
e_1	p_1	p_2	f_1	f_5	e_4	e_2	e_6	e_5
e_2	p_2	p_3	f_1	f_2	e_1	e_3	e_7	e_6
e_3	p_3	p_4	f_1	f_6	e_2	e_4	e_8	e_7
e_4	p_4	p_1	f_1	f_4	e_3	e_1	e_5	e_8
e_5	p_1	p_5	f_5	f_4	e_1	e_9	e_{12}	e_4
e_6	p_2	p_6	f_2	f_5	e_2	e_{10}	e_9	e_1
e_7	p_3	p_7	f_6	f_2	e_3	e_{11}	e_{10}	e_2
e_8	p_4	p_8	f_4	f_6	e_4	e_{12}	e_{11}	e_3
e_9	p_5	p_6	f_5	f_3	e_5	e_6	e_{10}	e_{12}
e_{10}	p_6	p_7	f_2	f_3	e_6	e_7	e_{11}	e_9
e_{11}	p_7	p_8	f_6	f_3	e_7	e_8	e_{12}	e_{10}
e_{12}	p_8	p_5	f_4	f_3	e_8	e_5	e_9	e_{11}