

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2018

Combinação convexa

P : coleção de pontos do plano, dada por $X[1..n], Y[1..n]$.

Combinação convexa de pontos de P : soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P : conjunto de combinações convexas de pontos de P , ou seja,

$$\text{conv}(P) := \left\{ \alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \right. \\ \left. \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)} \right\}.$$

Combinação convexa

P : coleção de pontos do plano, dada por $X[1..n], Y[1..n]$.

Combinação convexa de pontos de P : soma da forma

$$\alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]),$$

com $\alpha_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Fecho convexo de P : conjunto de combinações convexas de pontos de P , ou seja,

$$\text{conv}(P) := \left\{ \alpha_1(X[1], Y[1]) + \cdots + \alpha_n(X[n], Y[n]) : \right. \\ \left. \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)} \right\}.$$

Problema: Dada uma coleção P de pontos do plano, determinar o **fecho convexo** de P .

Mergehull

Ideia: divisão e conquista.

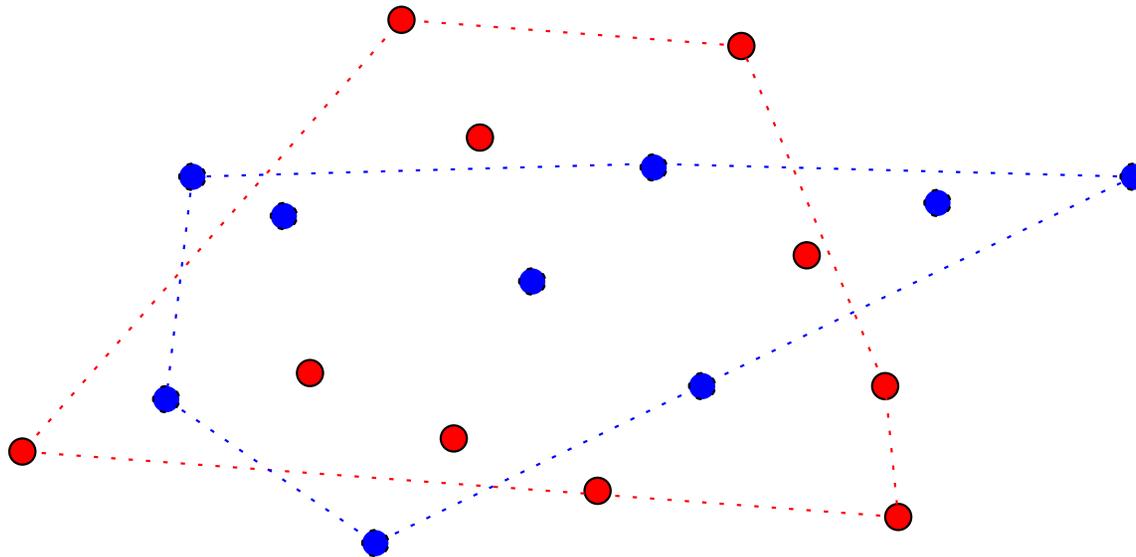
Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Mergehull

Ideia: divisão e conquista.

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou...

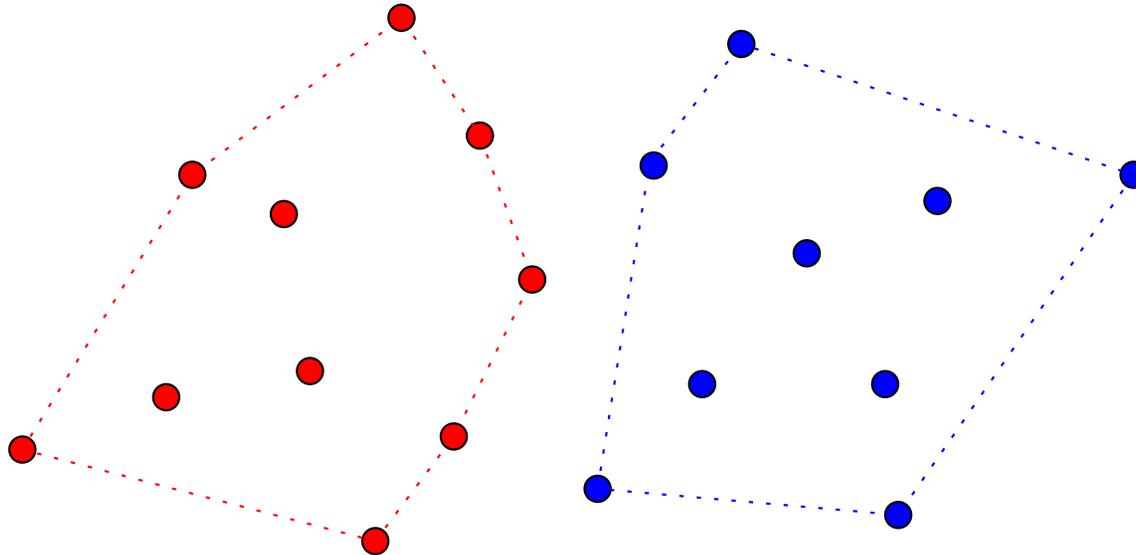


Mergehull

Ideia: divisão e conquista.

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou... depois de ordená-la pela X -coordenada dos pontos.

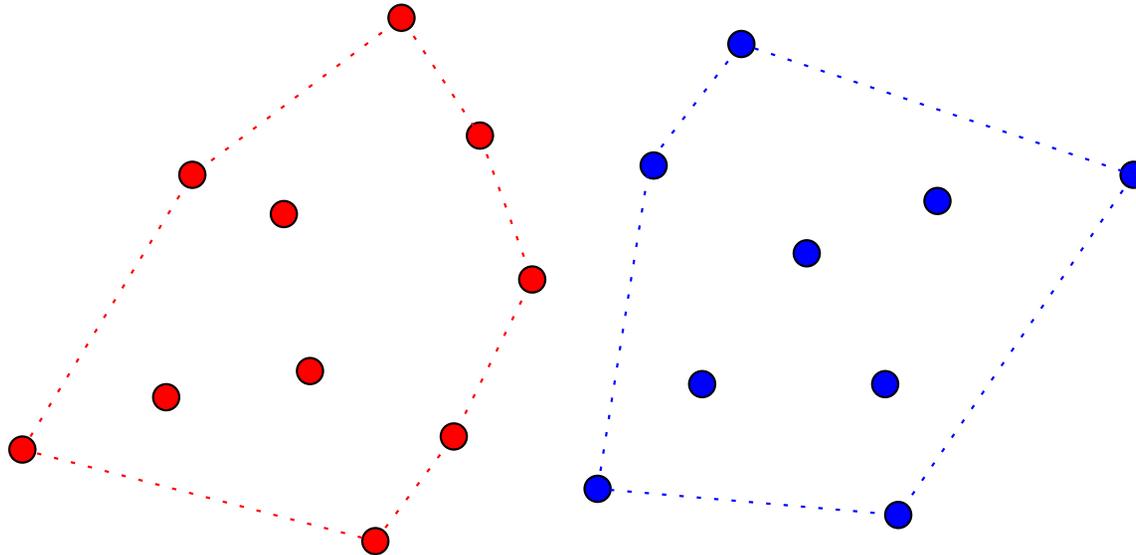


Mergehull

Ideia: divisão e conquista.

Dividir a coleção ao meio, resolver recursivamente o problema para cada metade e construir, dos fechos das duas subcoleções, o fecho da coleção completa.

Pode-se dividir a coleção indiscriminadamente ou... depois de ordená-la pela X -coordenada dos pontos.



Vamos discutir a segunda implementação, em que a fase de juntar as soluções é um pouco mais simples.

Mergehull

MERGEHULL (X, Y, n)

- 1 MERGESORT(X, Y, n) ▷ ordena por X -coordenada
- 2 devolva MERGEHULLREC($X, Y, 1, n$)

Mergehull

MERGEHULL (X, Y, n)

- 1 MERGESORT (X, Y, n) \triangleright ordena por X -coordenada
- 2 devolva MERGEHULLREC $(X, Y, 1, n)$

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n) + T(n)$,
onde $T(n)$ é o tempo consumido por
MERGEHULLREC $(X, Y, 1, n)$.

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do

$\text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$,
então...

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

Se conseguirmos uma implementação do $\text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$, então...

Consumo de tempo do MERGEHULLREC:

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n), \text{ onde } n = r - p + 1.$$

Miolo recursivo do Mergehull

MERGEHULLREC (X, Y, p, r)

- 1 se $p = r$ \triangleright há exatamente um ponto na coleção
- 2 então $h \leftarrow 1$ $H[1] \leftarrow p$
- 3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
- 4 $(H_1, h_1) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, p, q)$
- 5 $(H_2, h_2) \leftarrow \text{MERGEHULLREC}(X, Y, q+1, r)$
- 6 $(H, h) \leftarrow \text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 7 devolva (H, h)

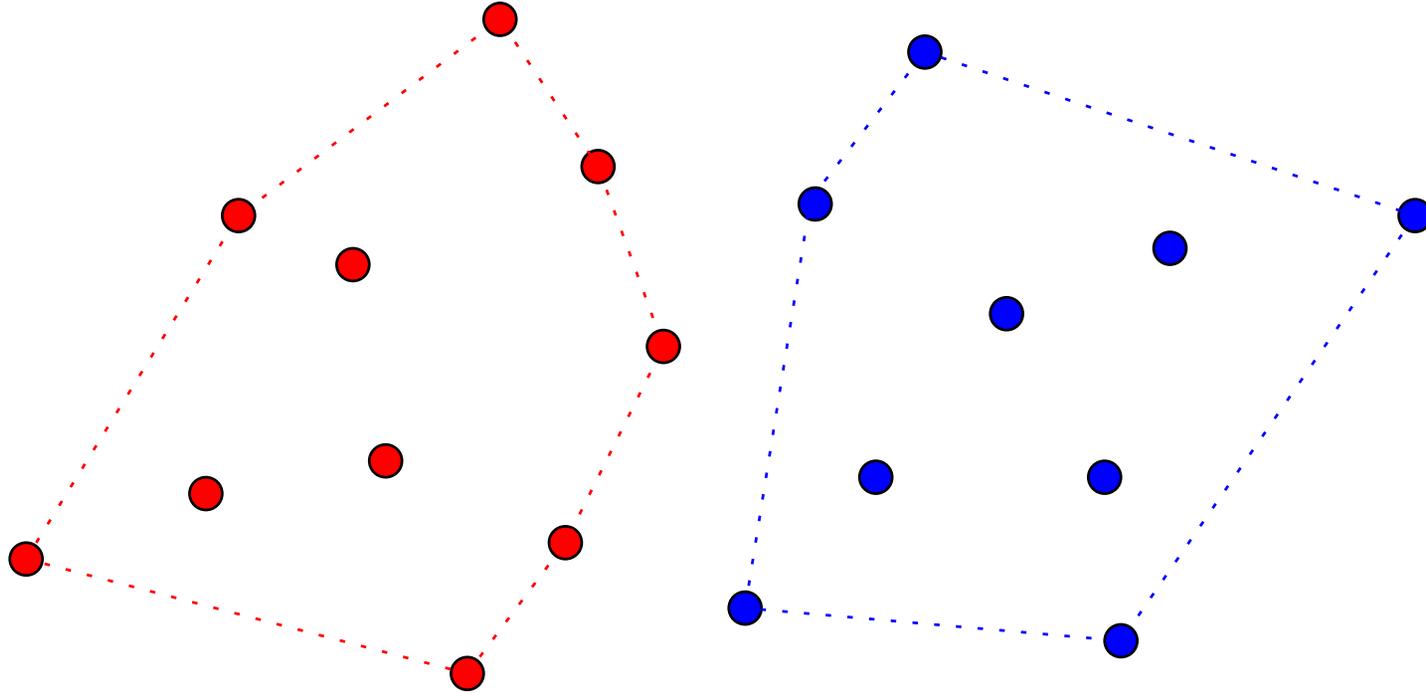
Se conseguirmos uma implementação do $\text{JUNTAHULL}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$ que consuma tempo $O(n)$, então...

Consumo de tempo do MERGEHULLREC:

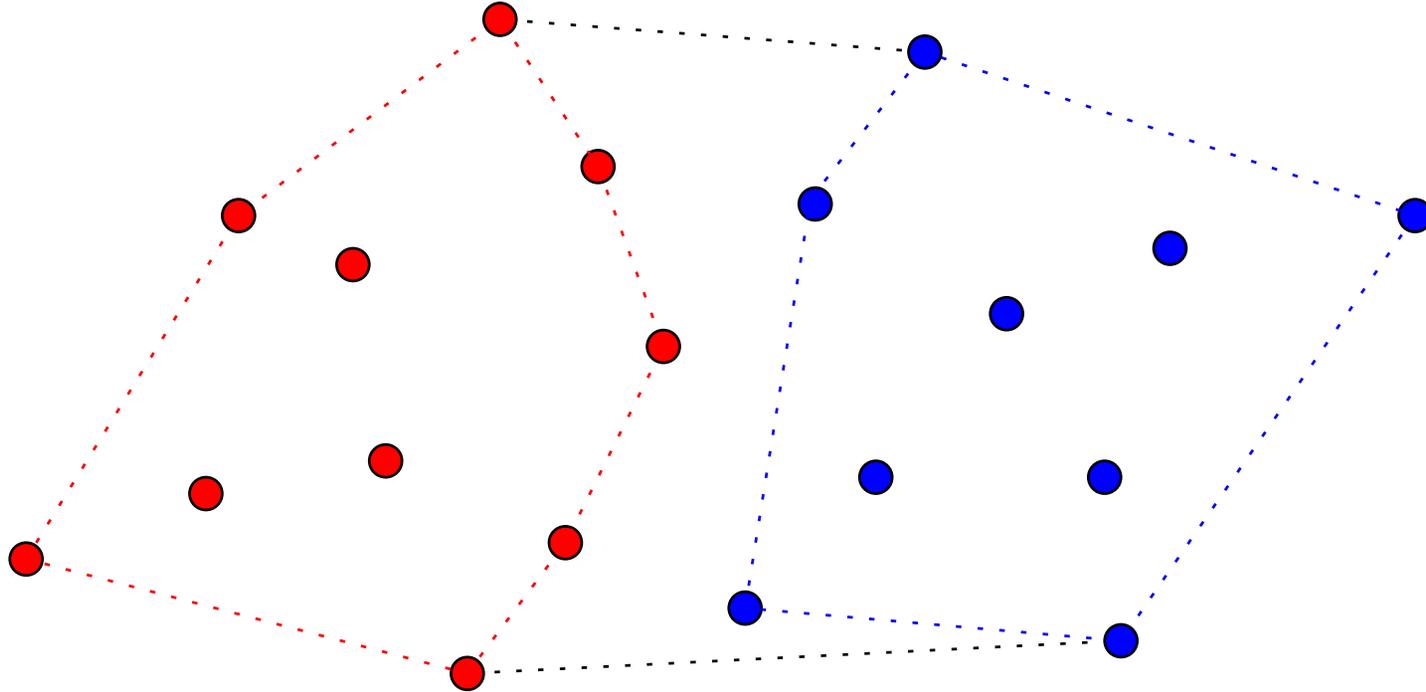
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n), \text{ onde } n = r - p + 1.$$

A solução de tal recorrência é $T(n) = O(n \lg n)$.

Como juntar o fecho de duas coleções?

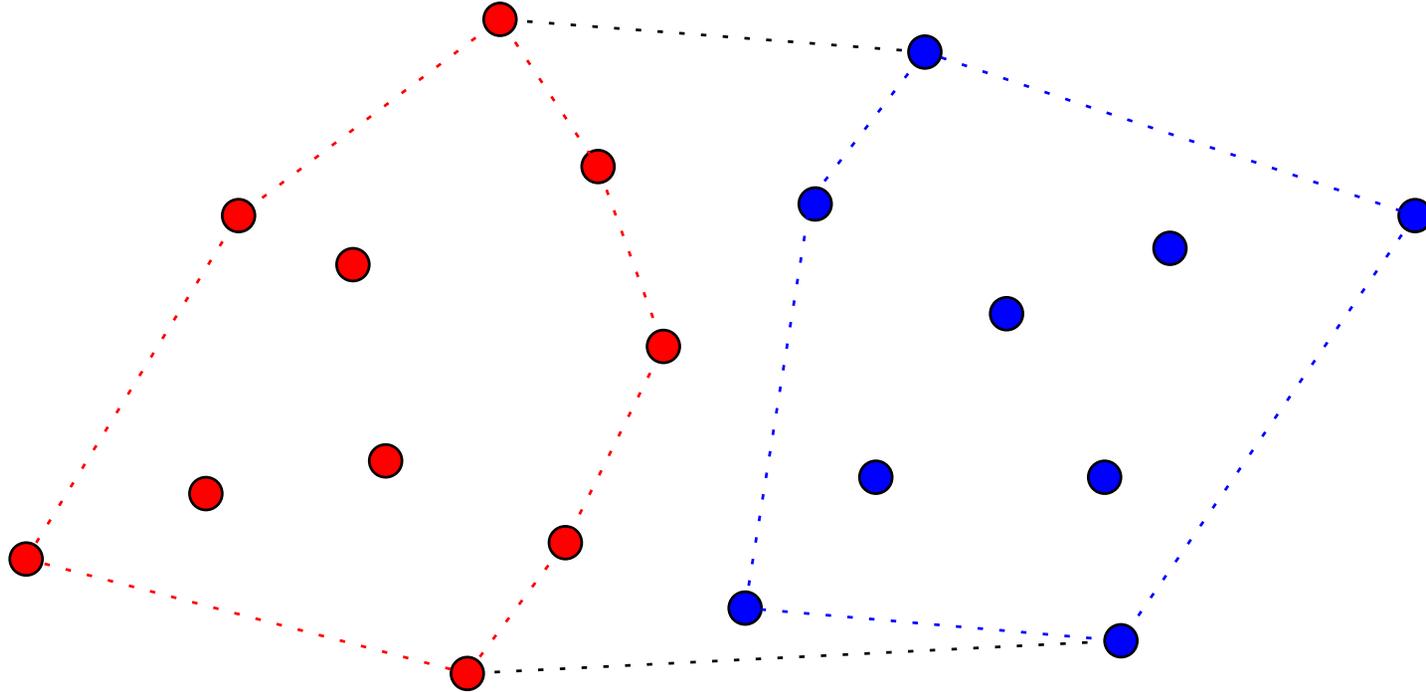


Como juntar o fecho de duas coleções?



Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Como juntar o fecho de duas coleções?

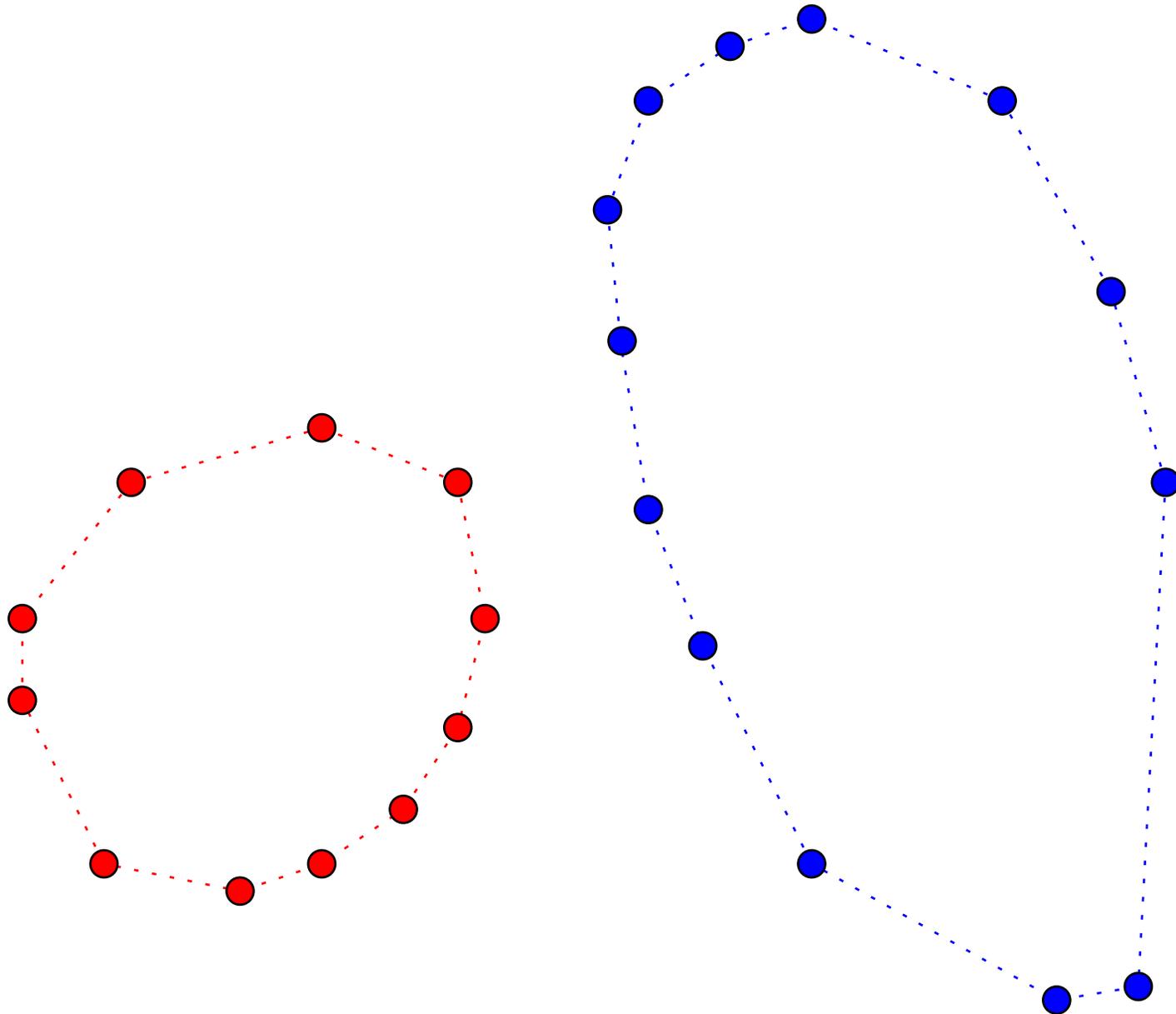


Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

Hipótese simplificadora: não há três pontos colineares nem dois pontos com a mesma X -coordenada.

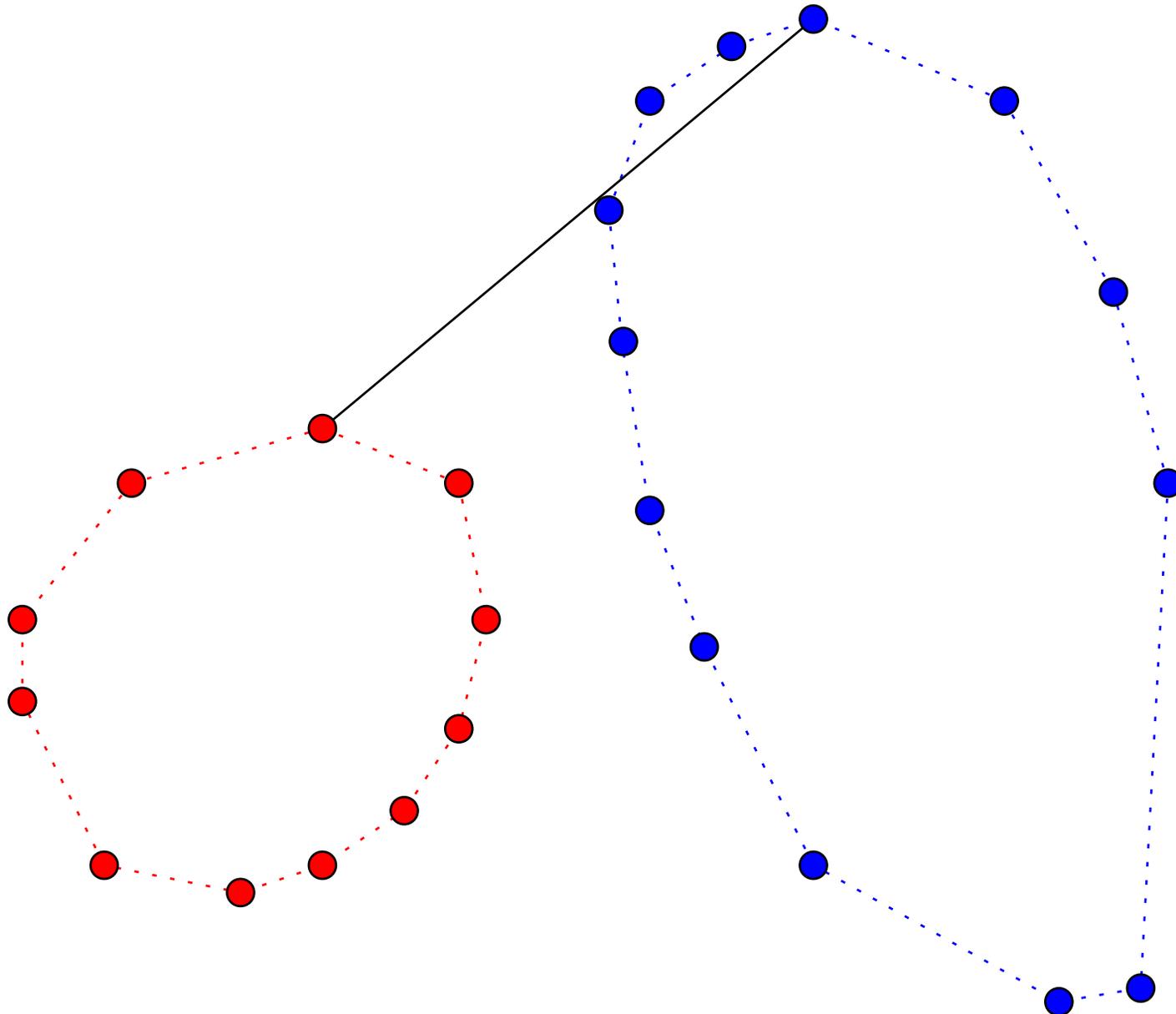
Como juntar o fecho de duas coleções?

Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos?

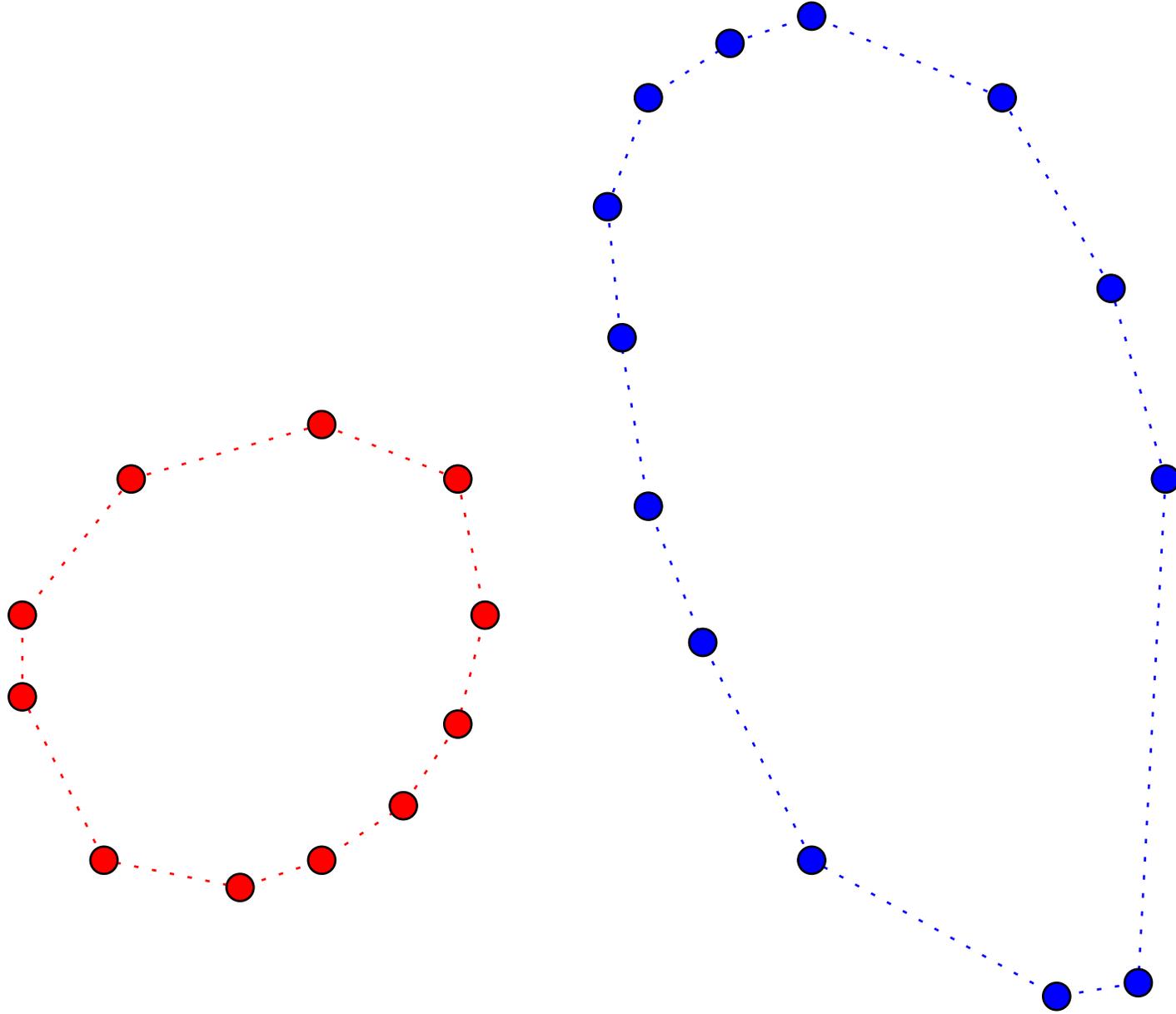


Como juntar o fecho de duas coleções?

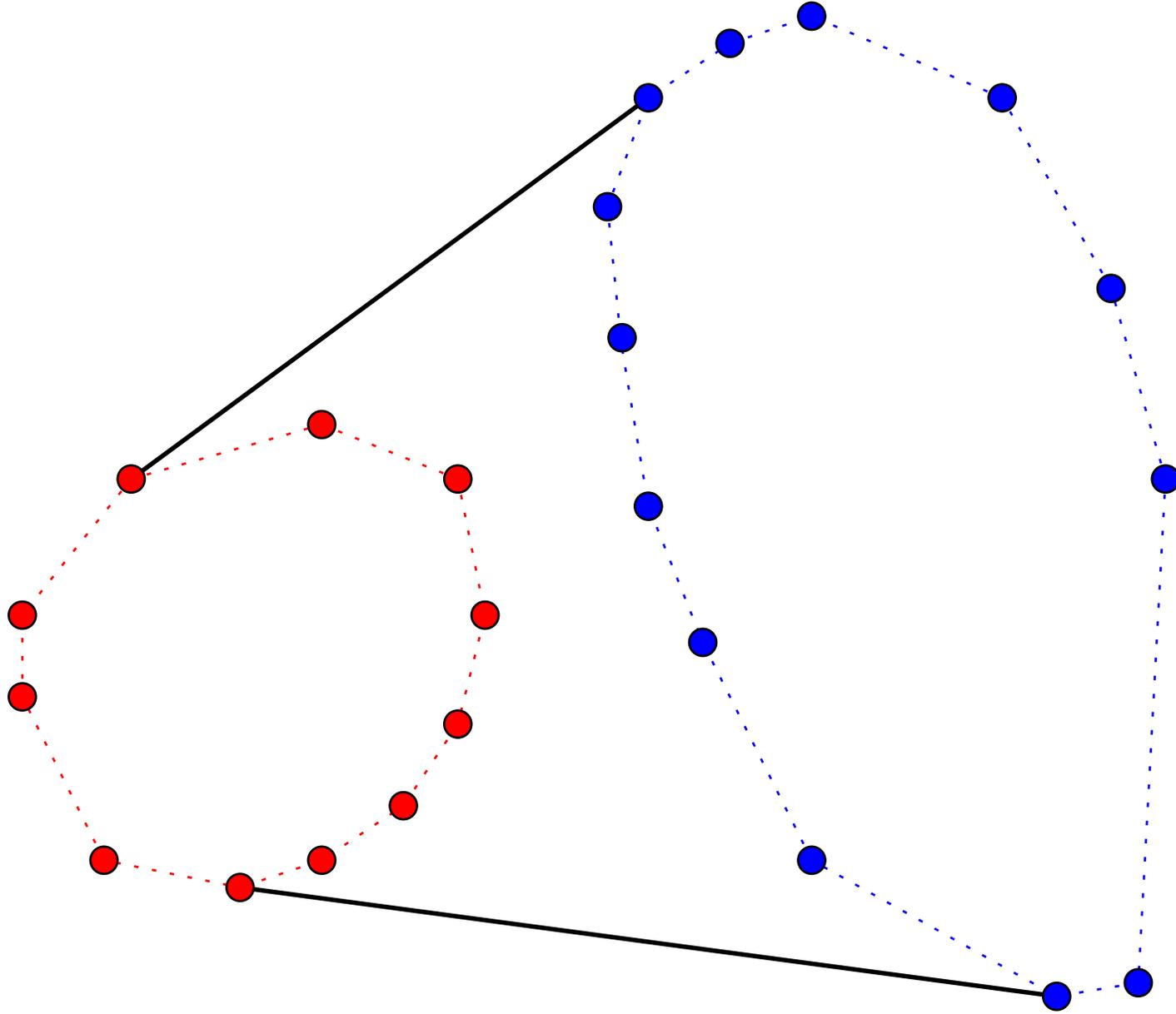
Basta juntar os pontos mais altos e os mais baixos? Não...



Como juntar o fecho de duas coleções?

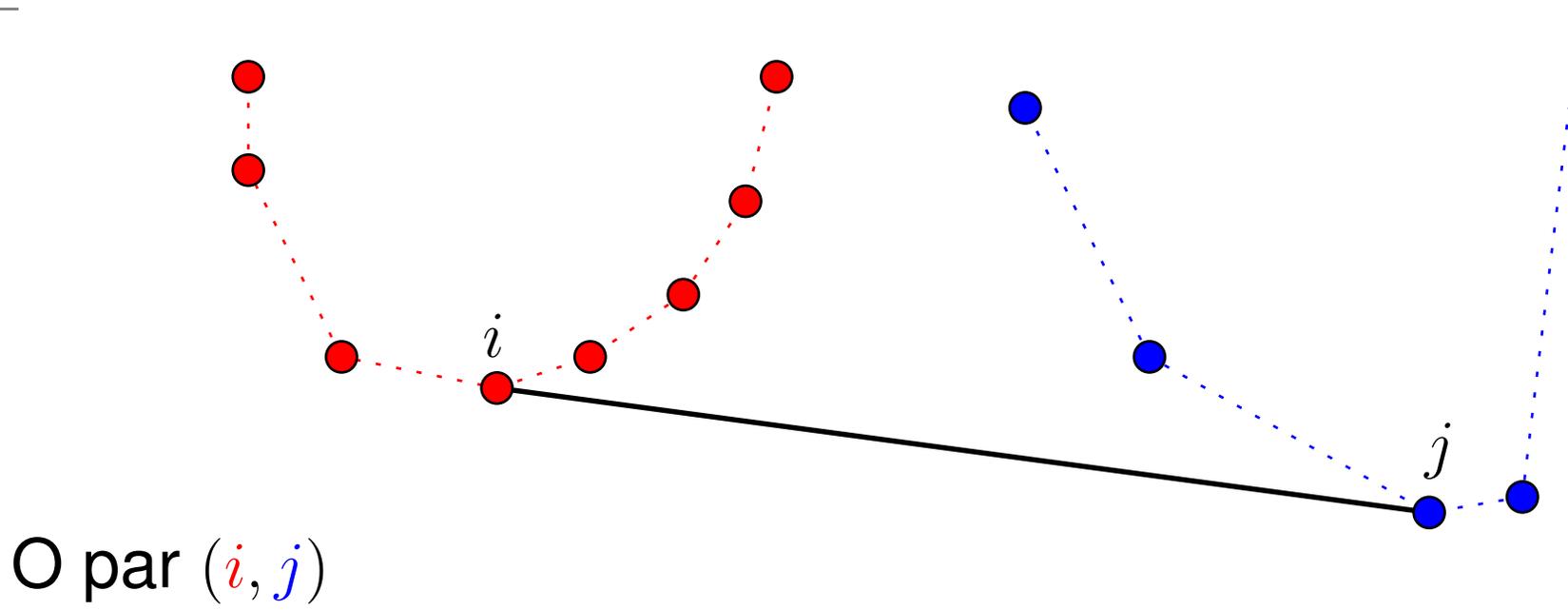


Como juntar o fecho de duas coleções?

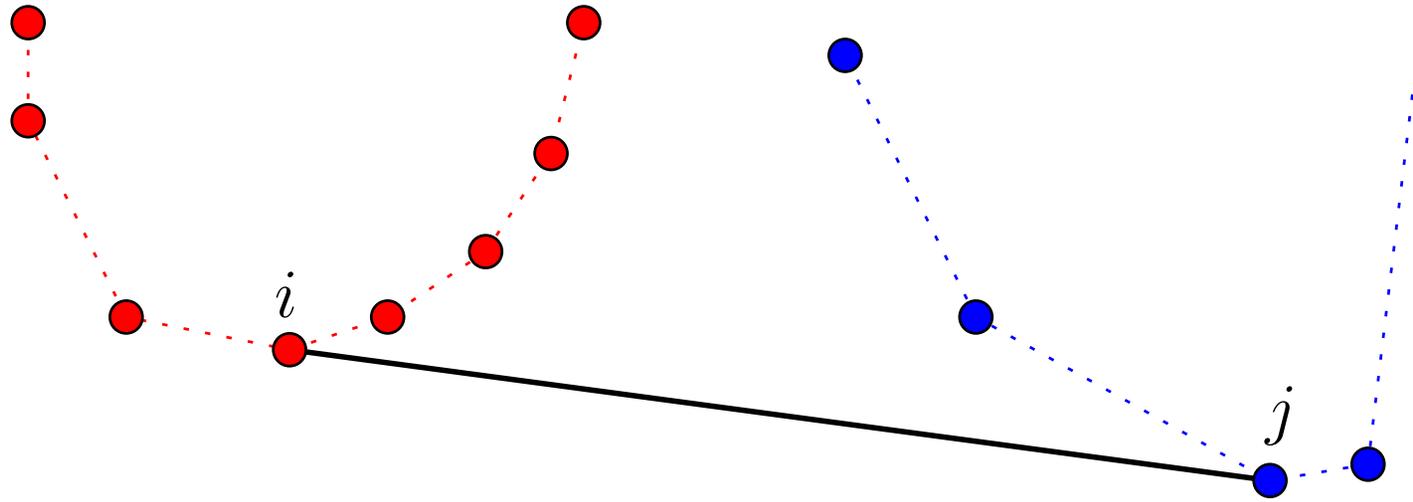


Basta encontrar a **tangente inferior** e a **tangente superior**.

Tangente inferior



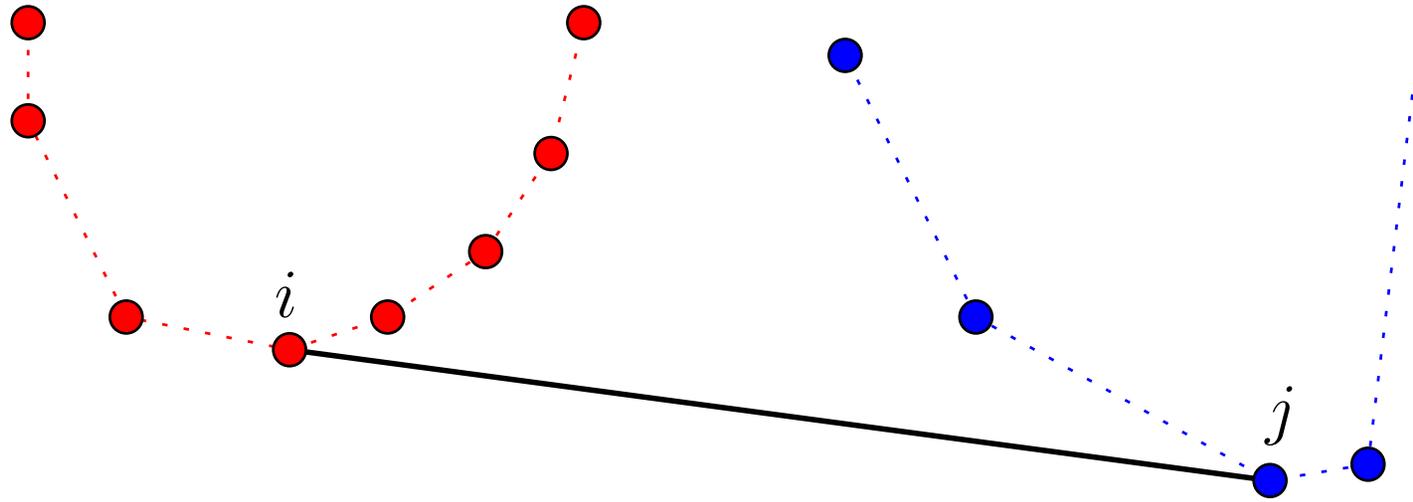
Tangente inferior



O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se

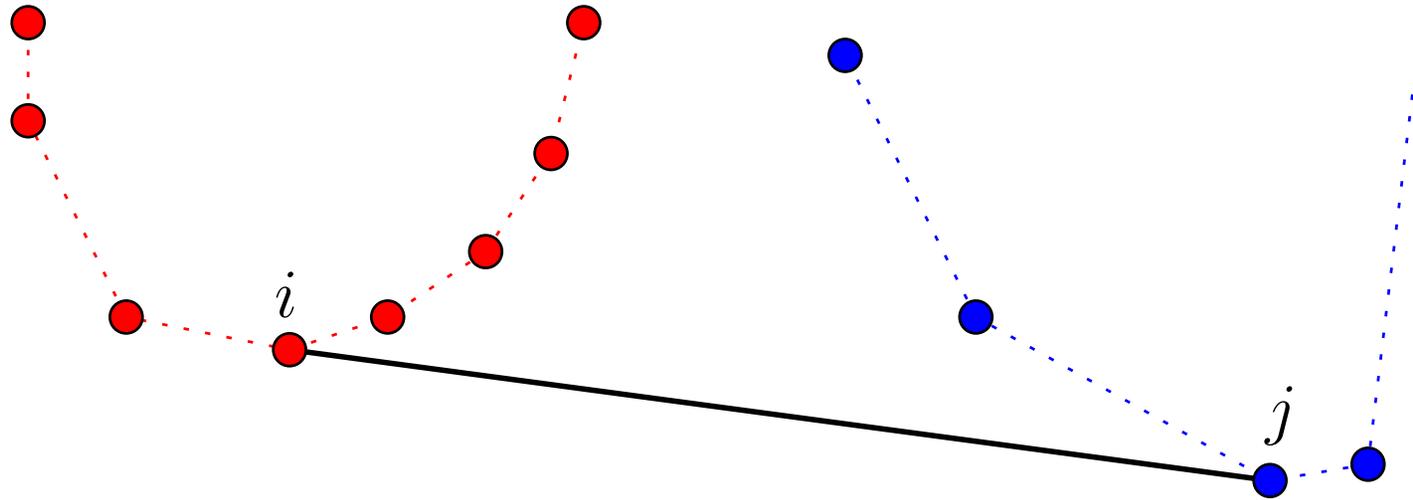
Tangente inferior



O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

Tangente inferior

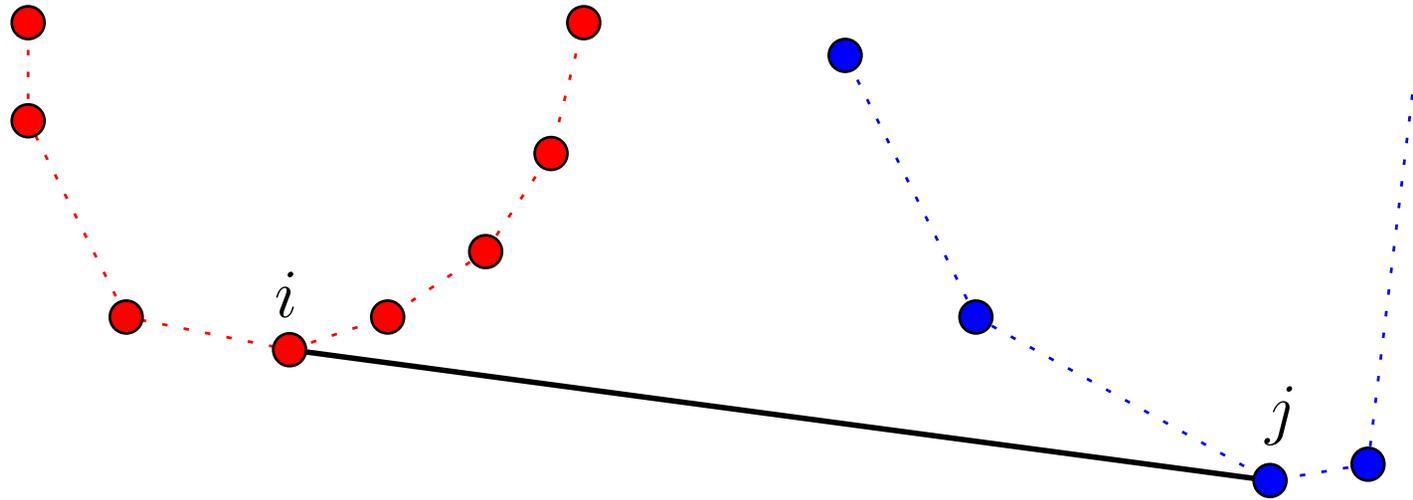


O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se

Tangente inferior

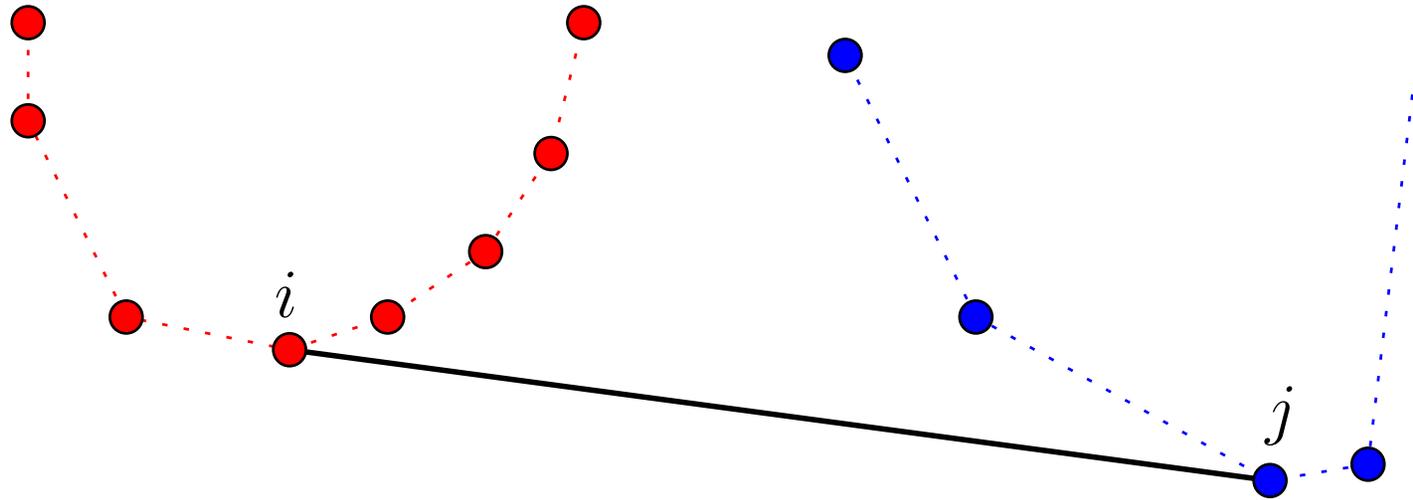


O par (i, j)

é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

Tangente inferior



O par (i, j)

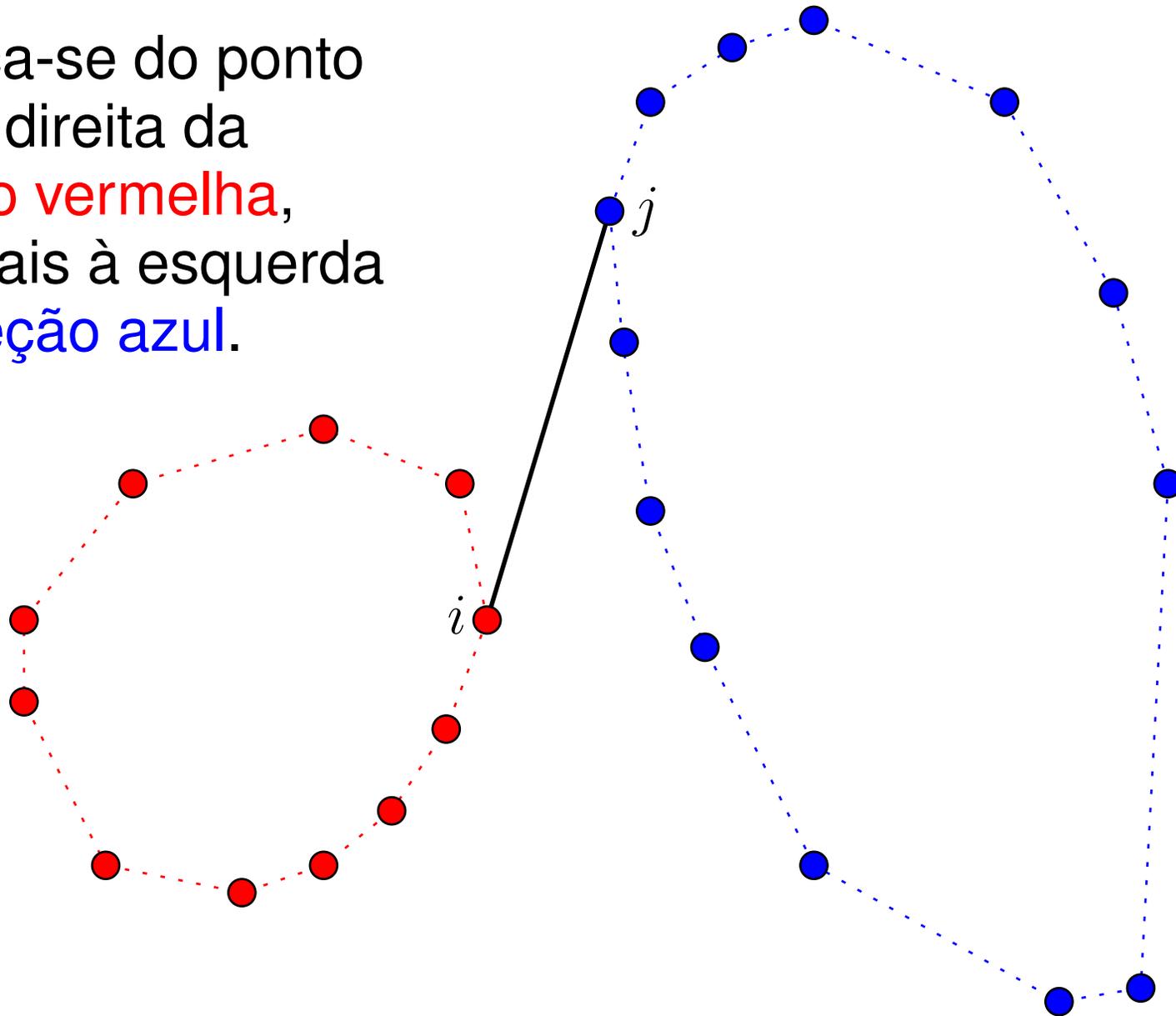
é uma **tangente inferior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “acima” do segmento definido por (i, j) ,

é uma **tangente inferior** se for os dois acima.

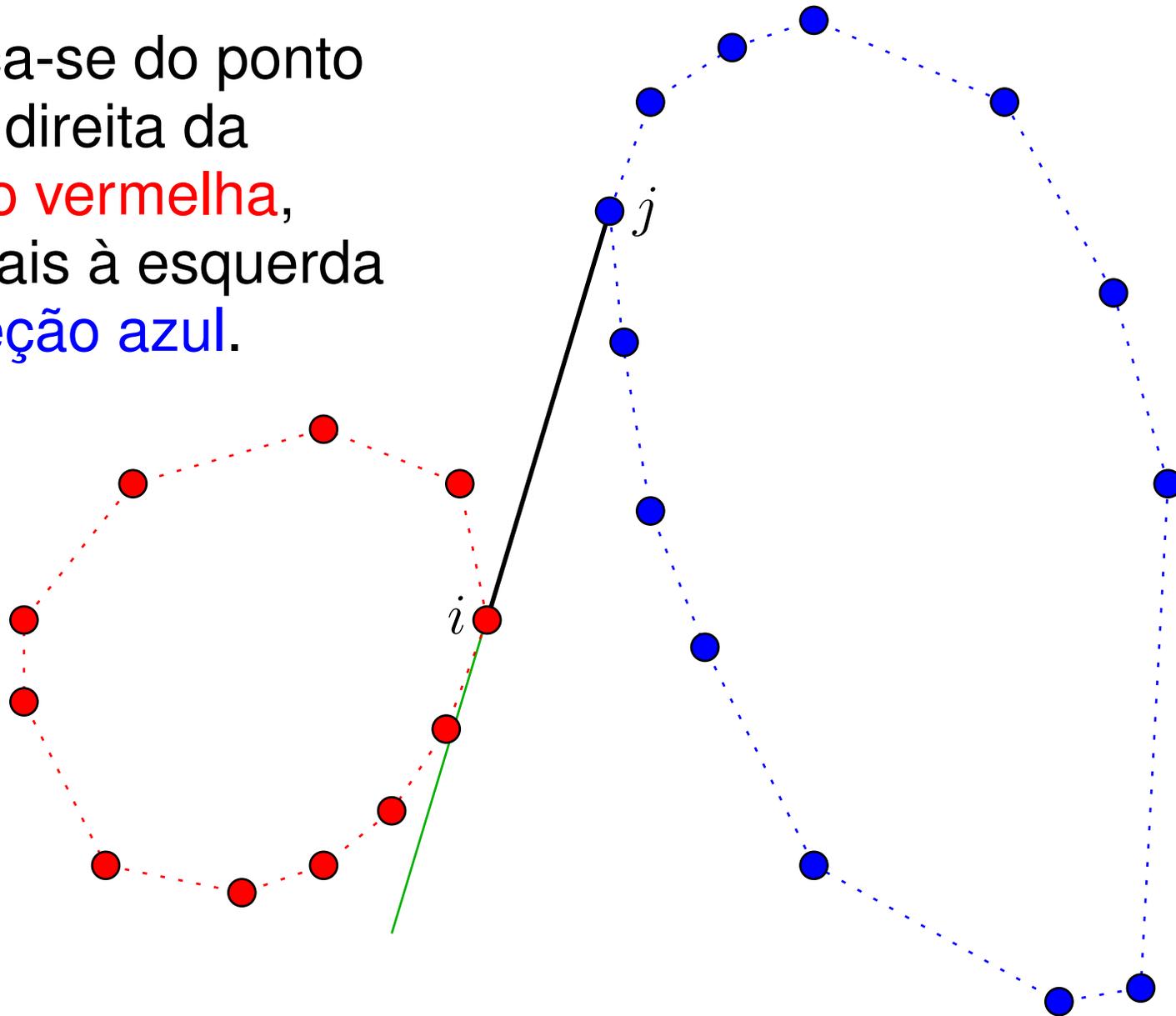
Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



Como encontrar a tangente inferior?

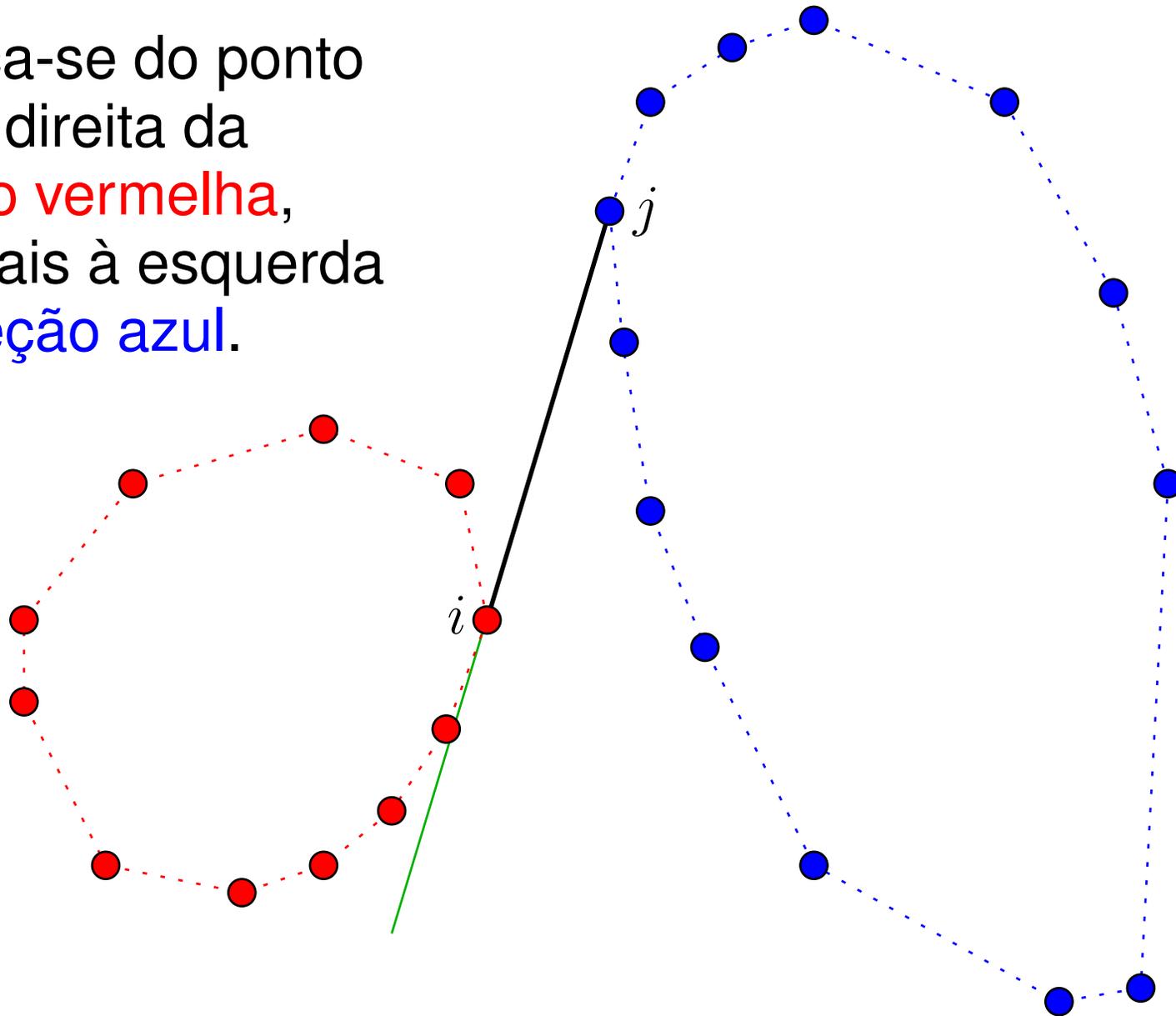
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**?

Como encontrar a tangente inferior?

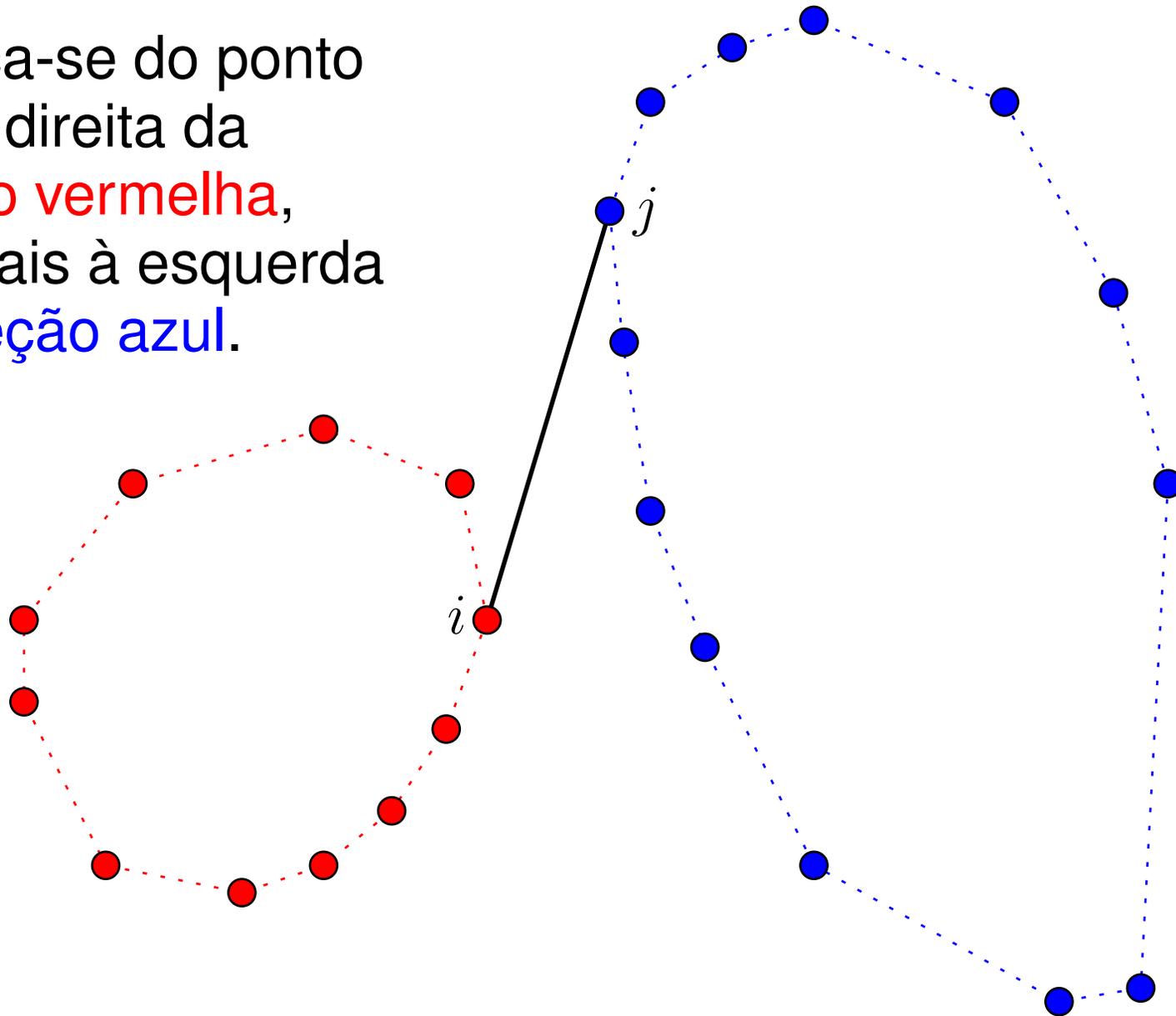
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

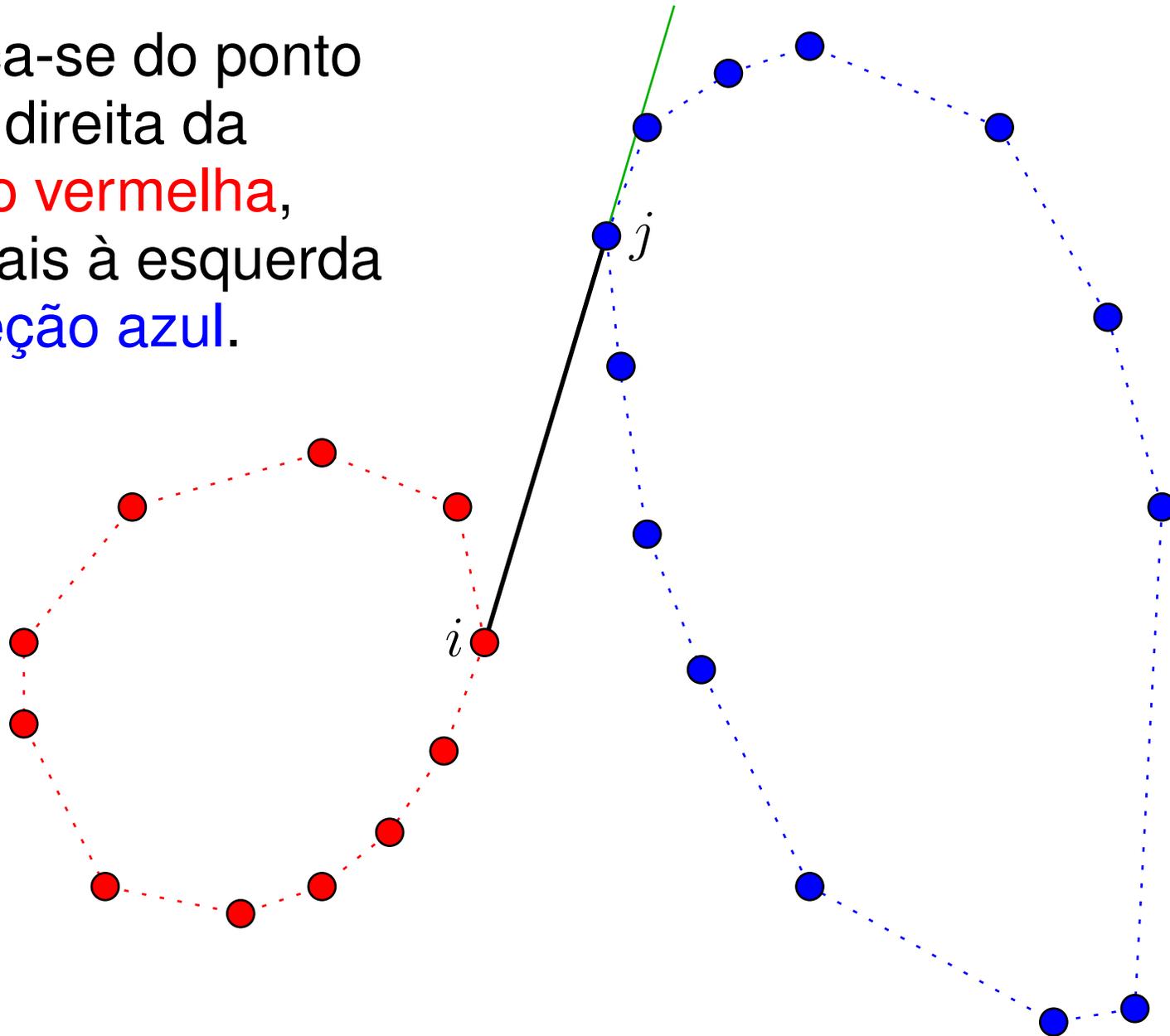
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**?

Como encontrar a tangente inferior?

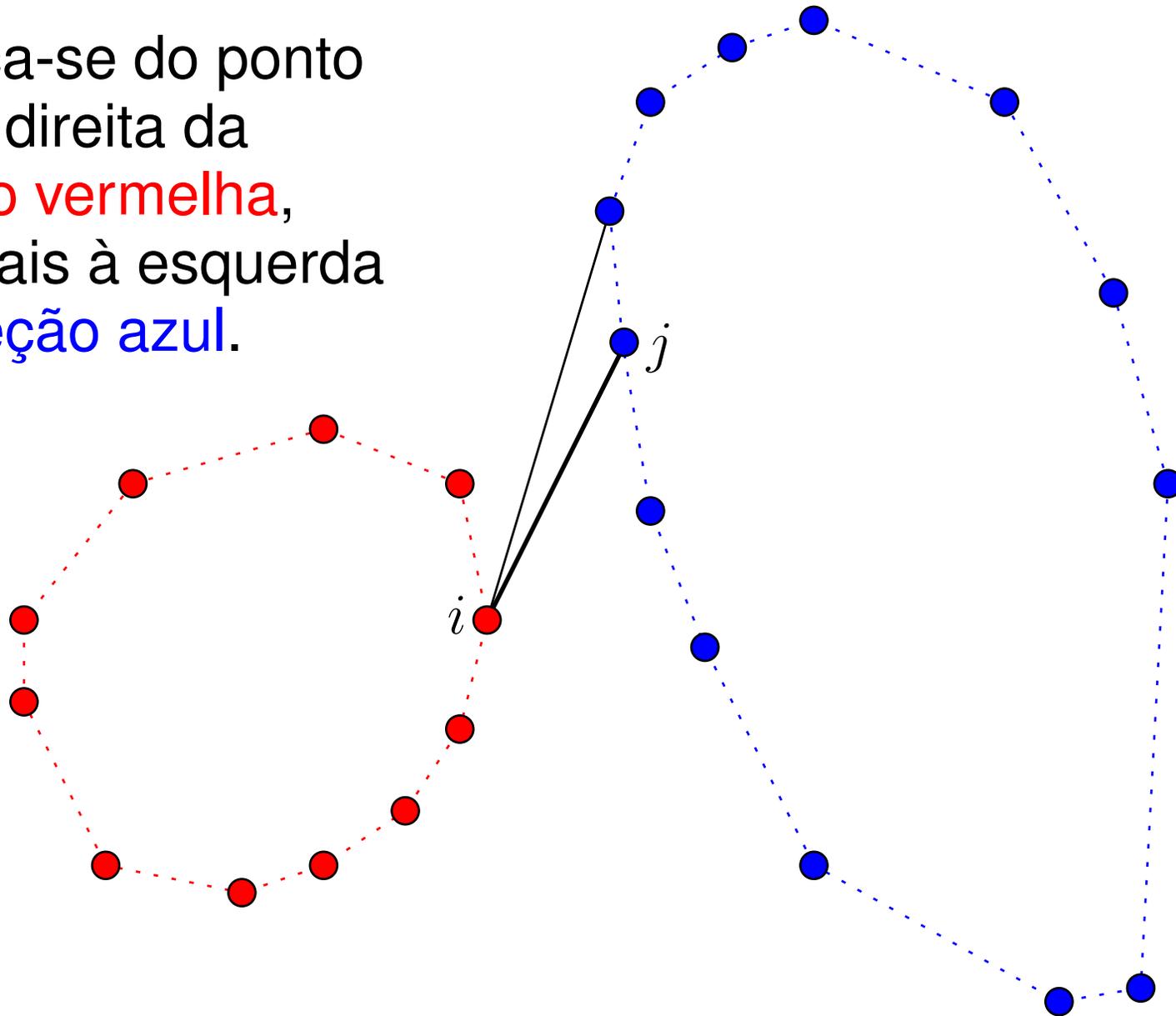
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente *inferior* da coleção azul? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

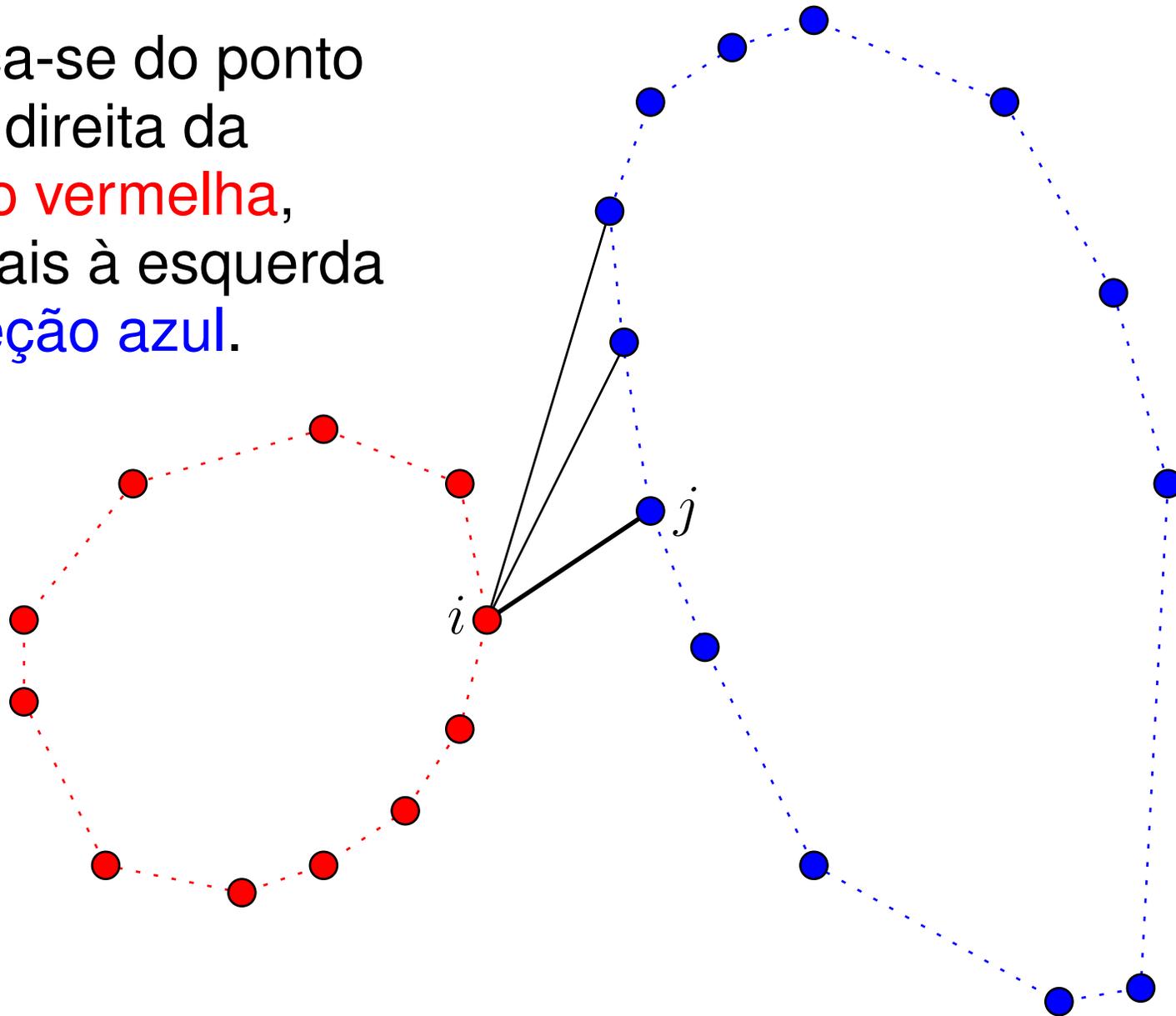
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

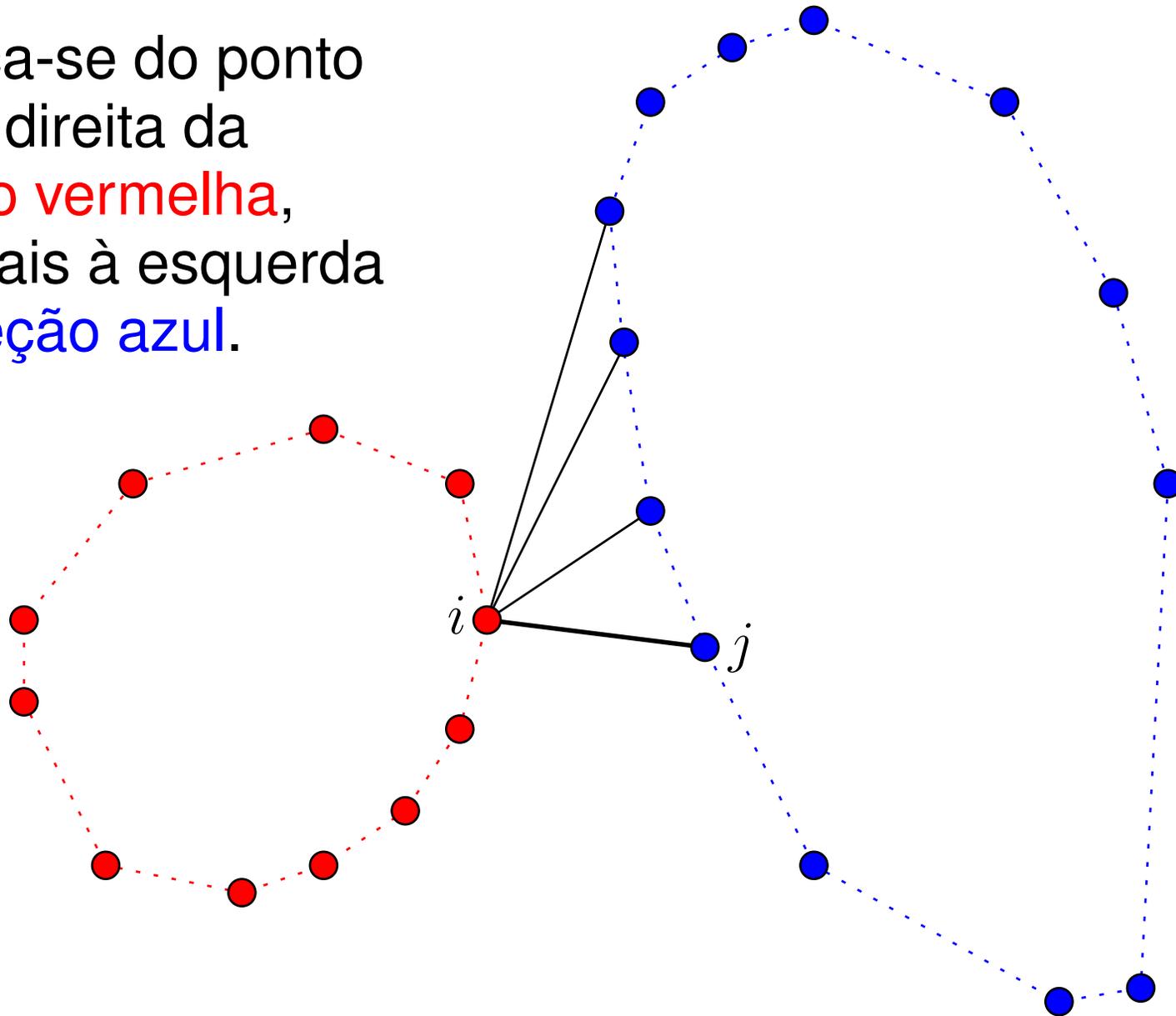
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

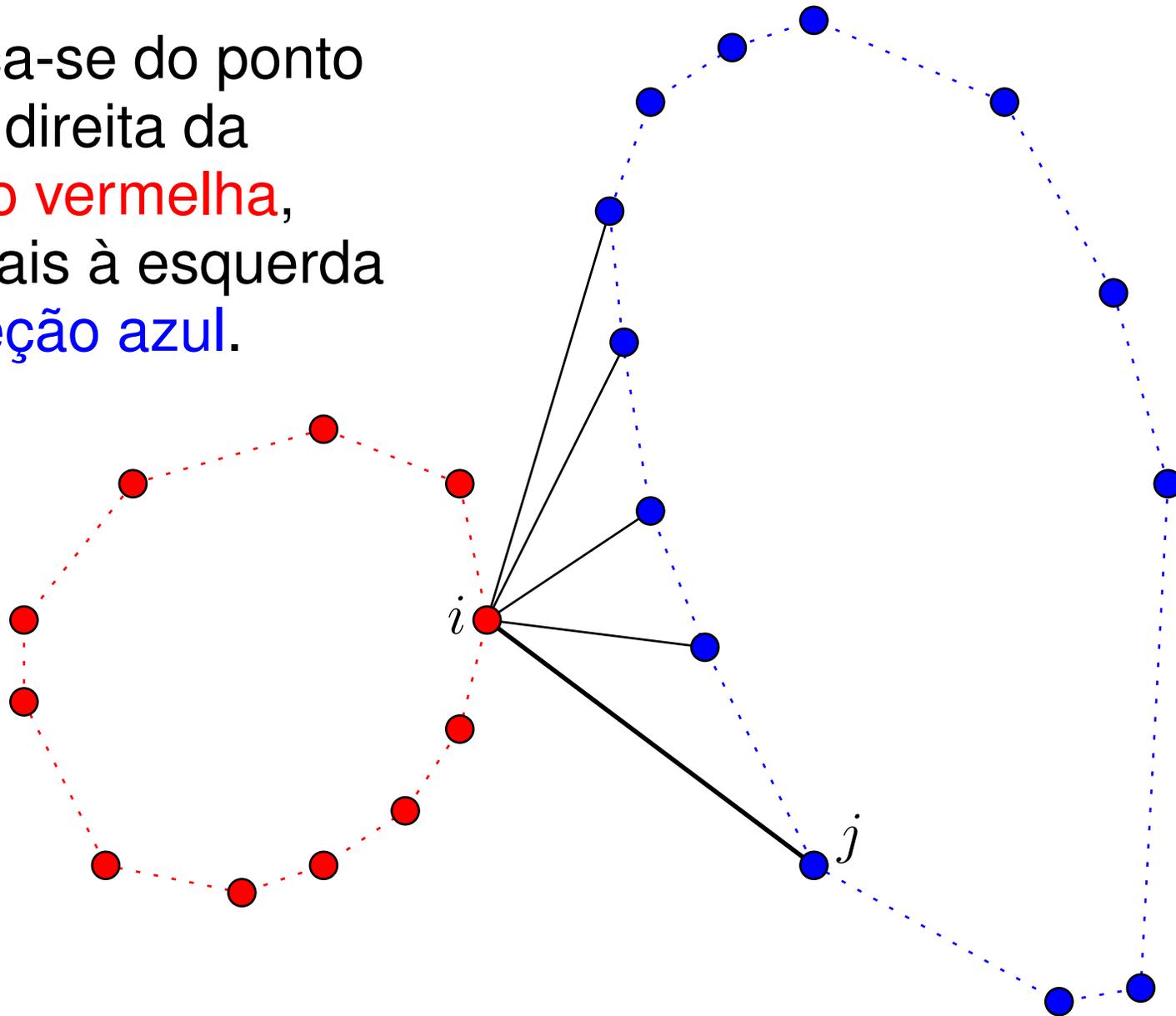
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

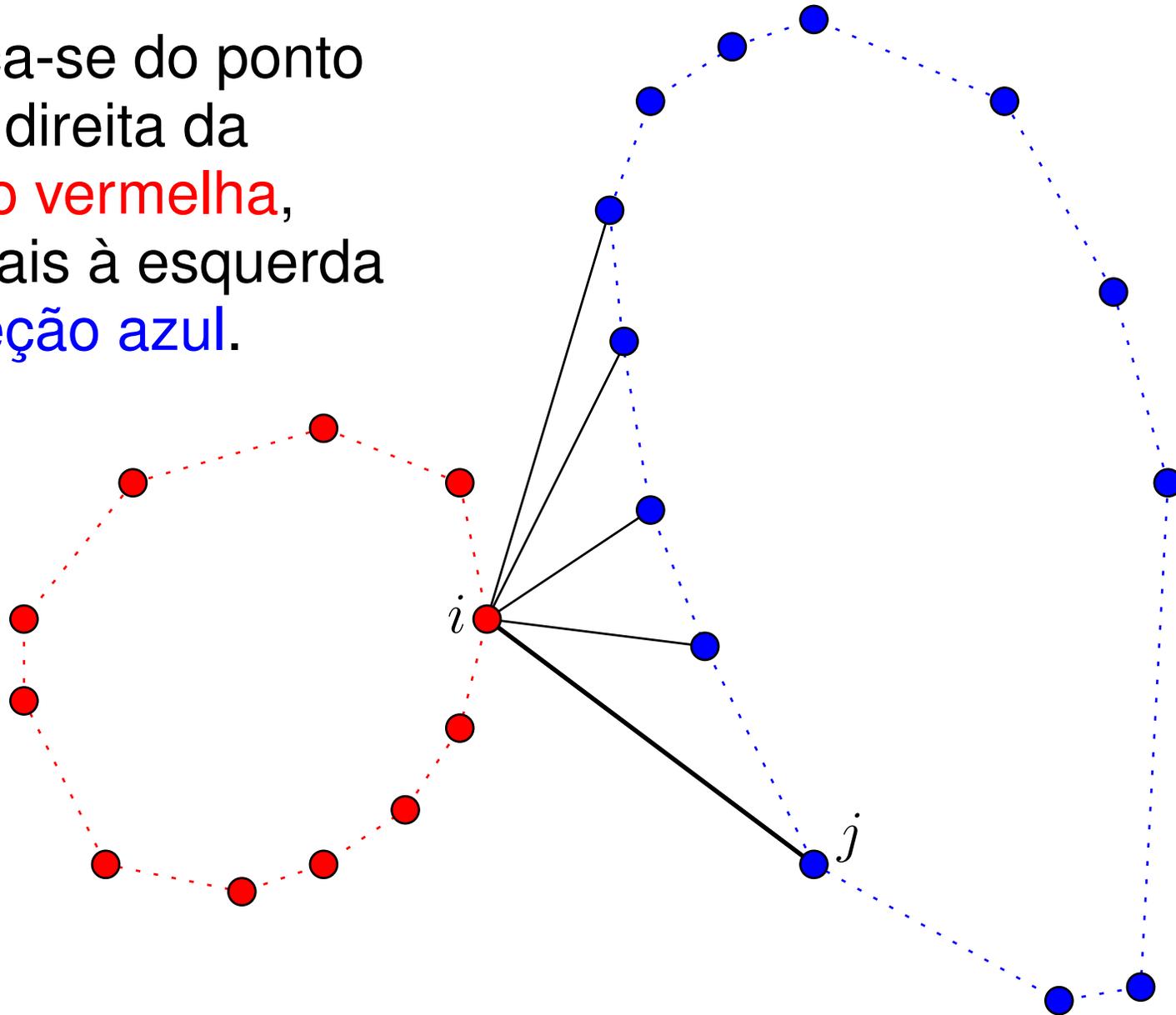
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

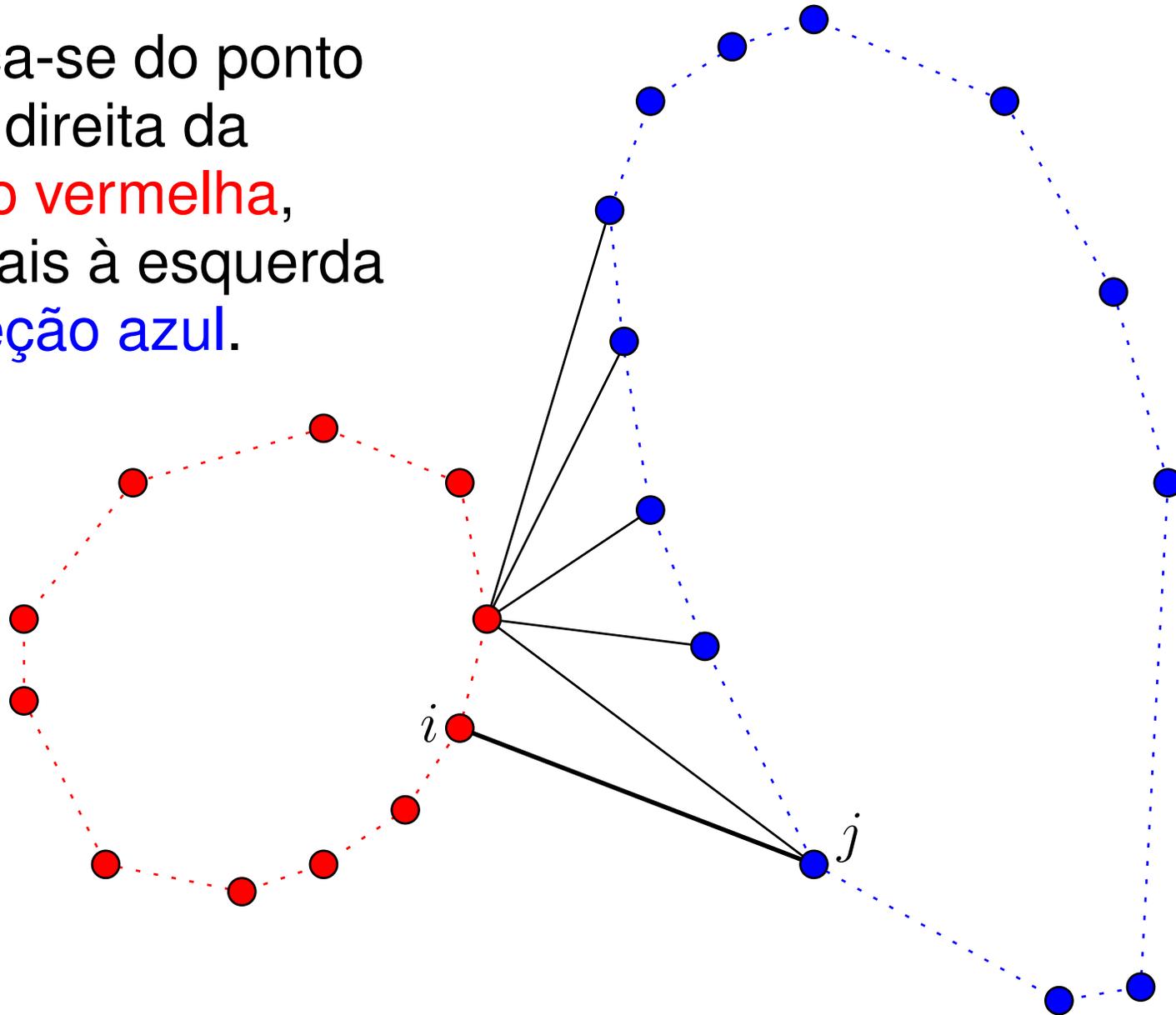
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

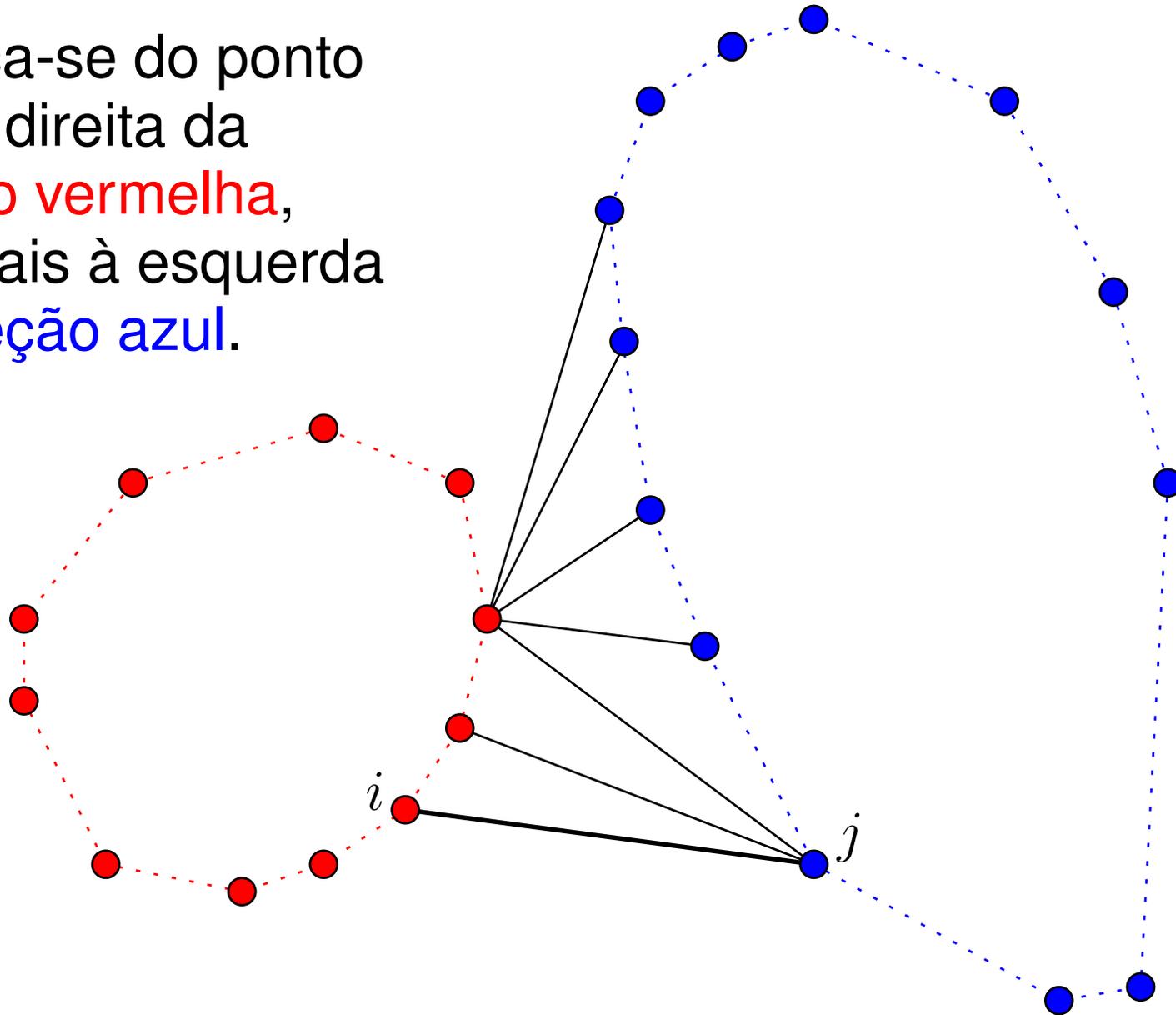
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

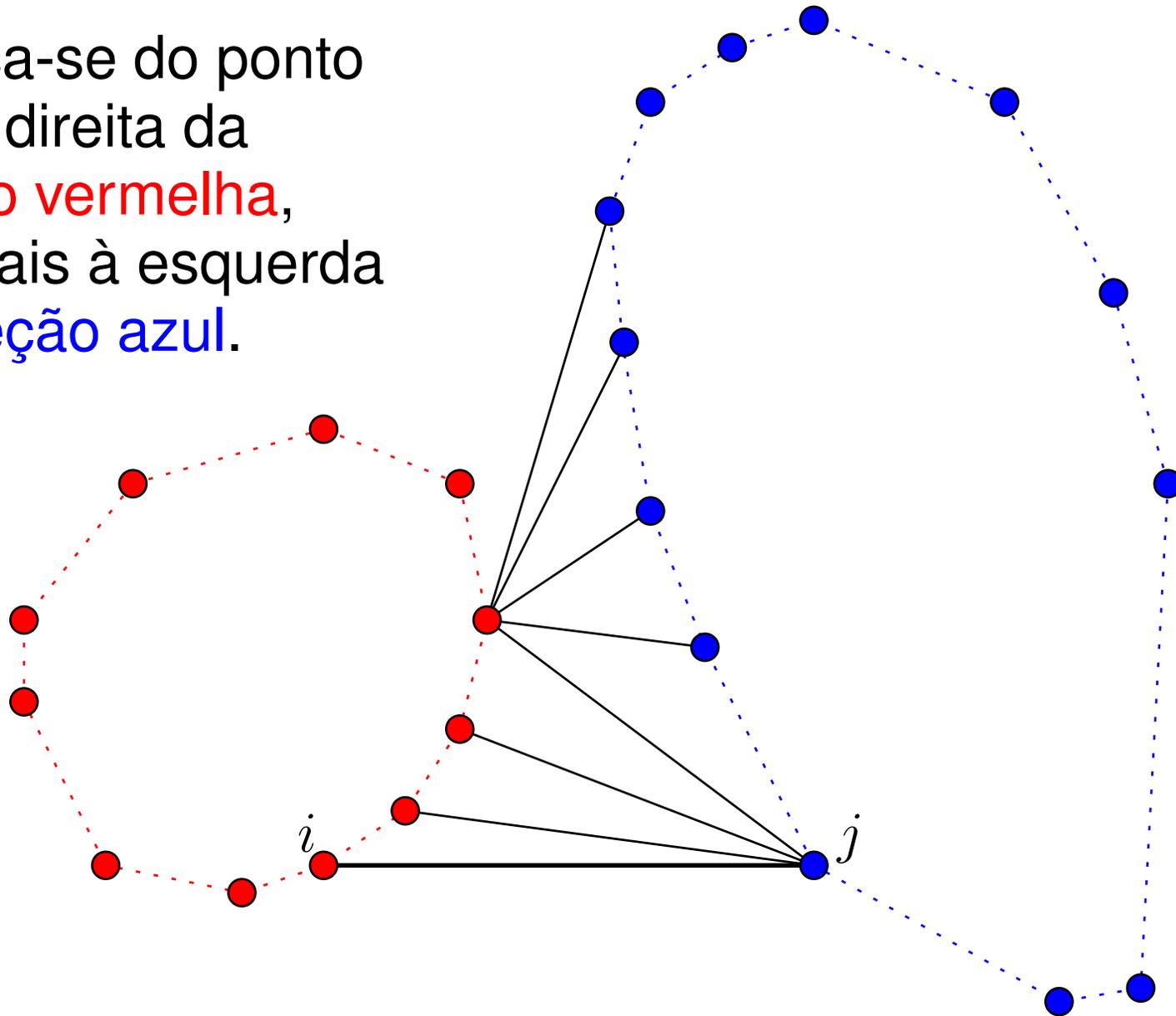
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

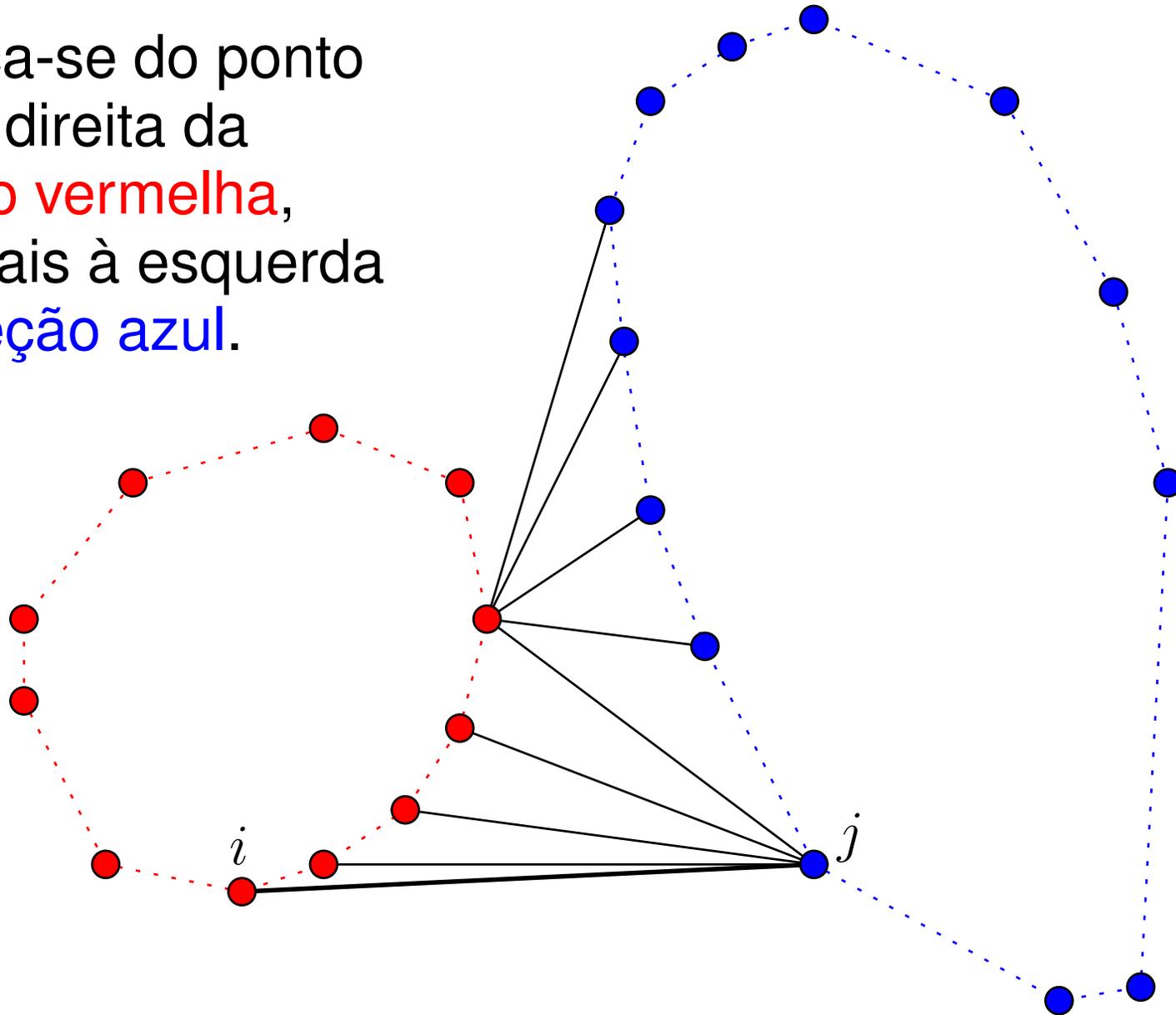
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

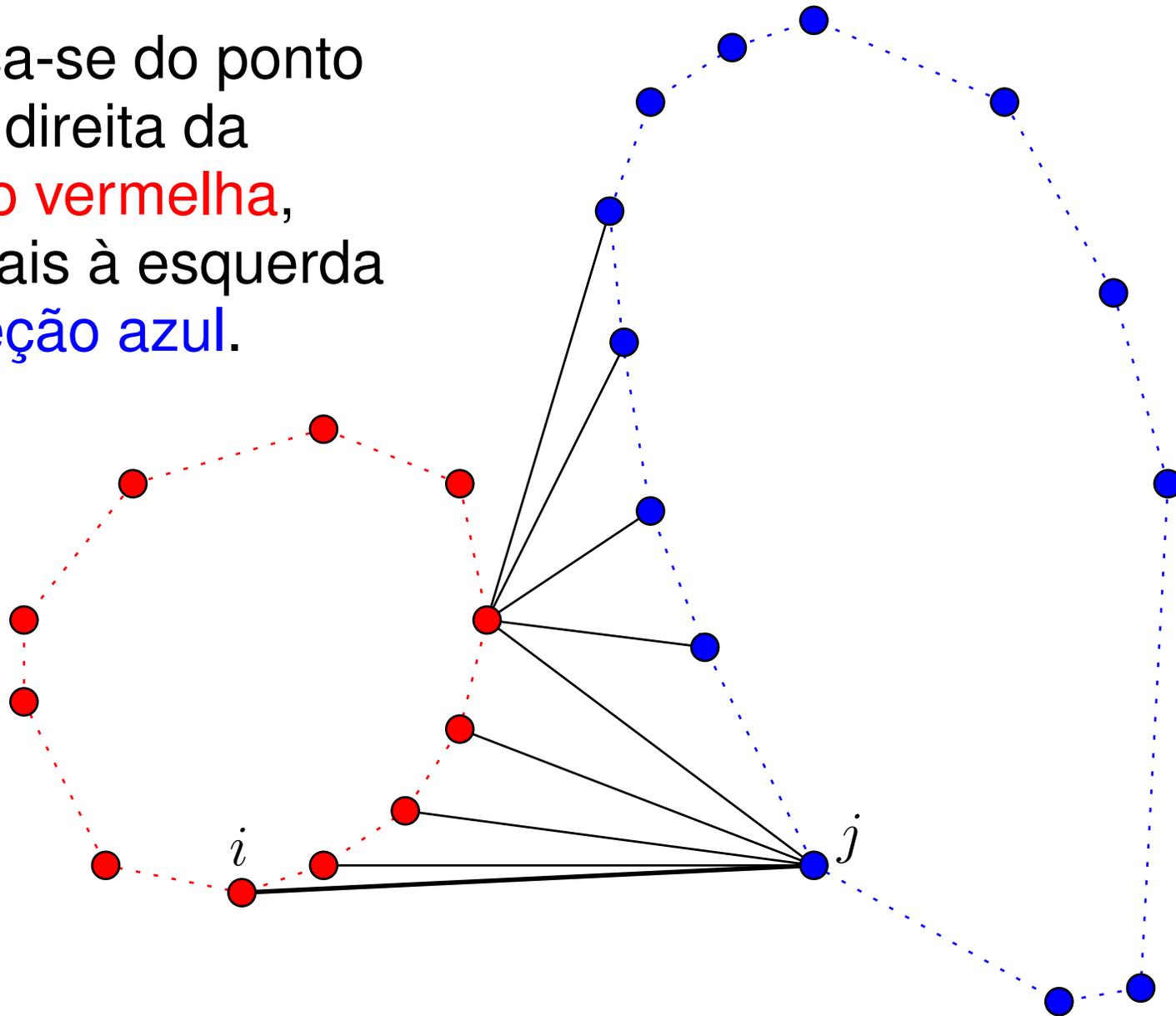
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção vermelha**? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

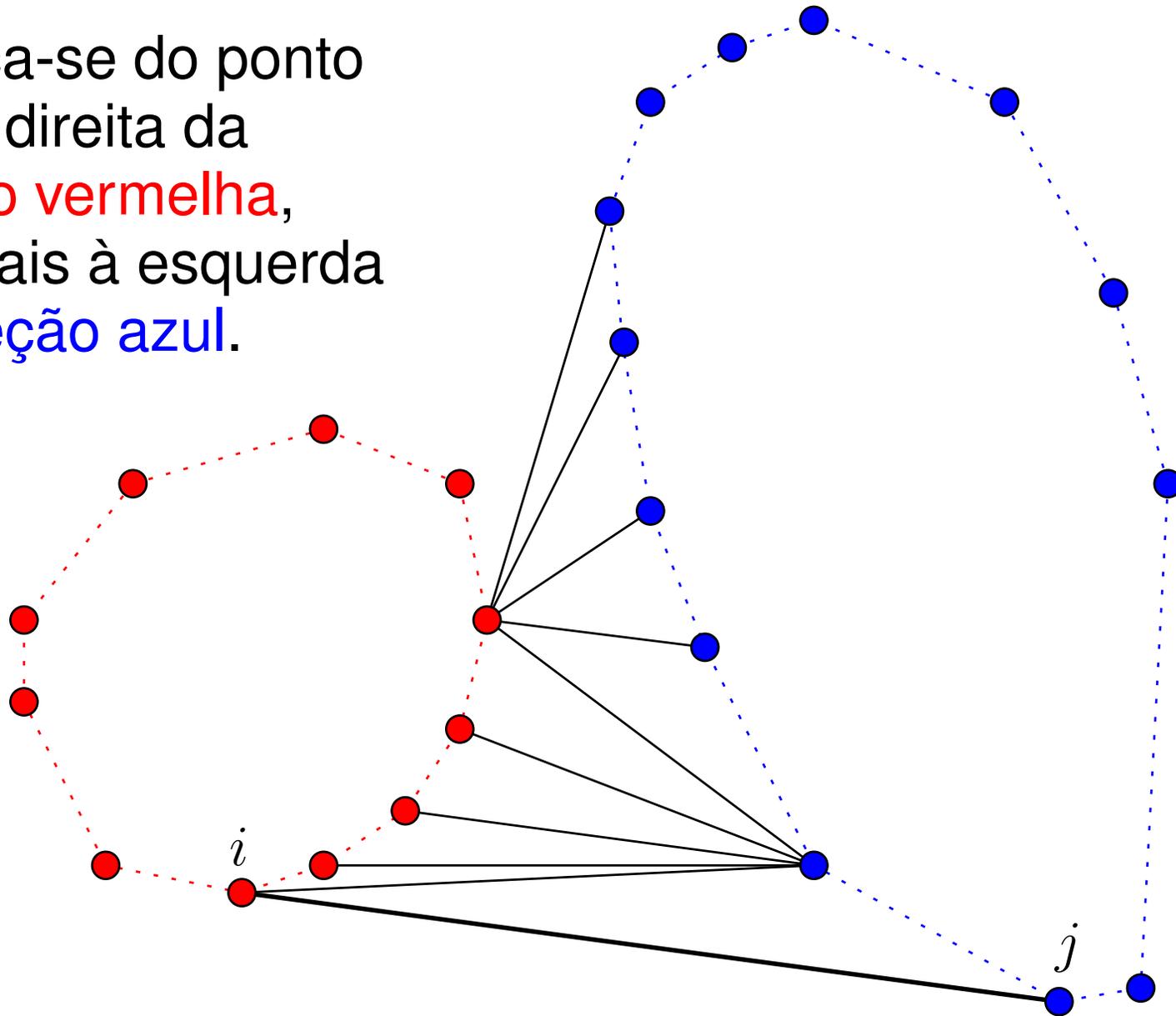
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? Não...

Como encontrar a tangente inferior?

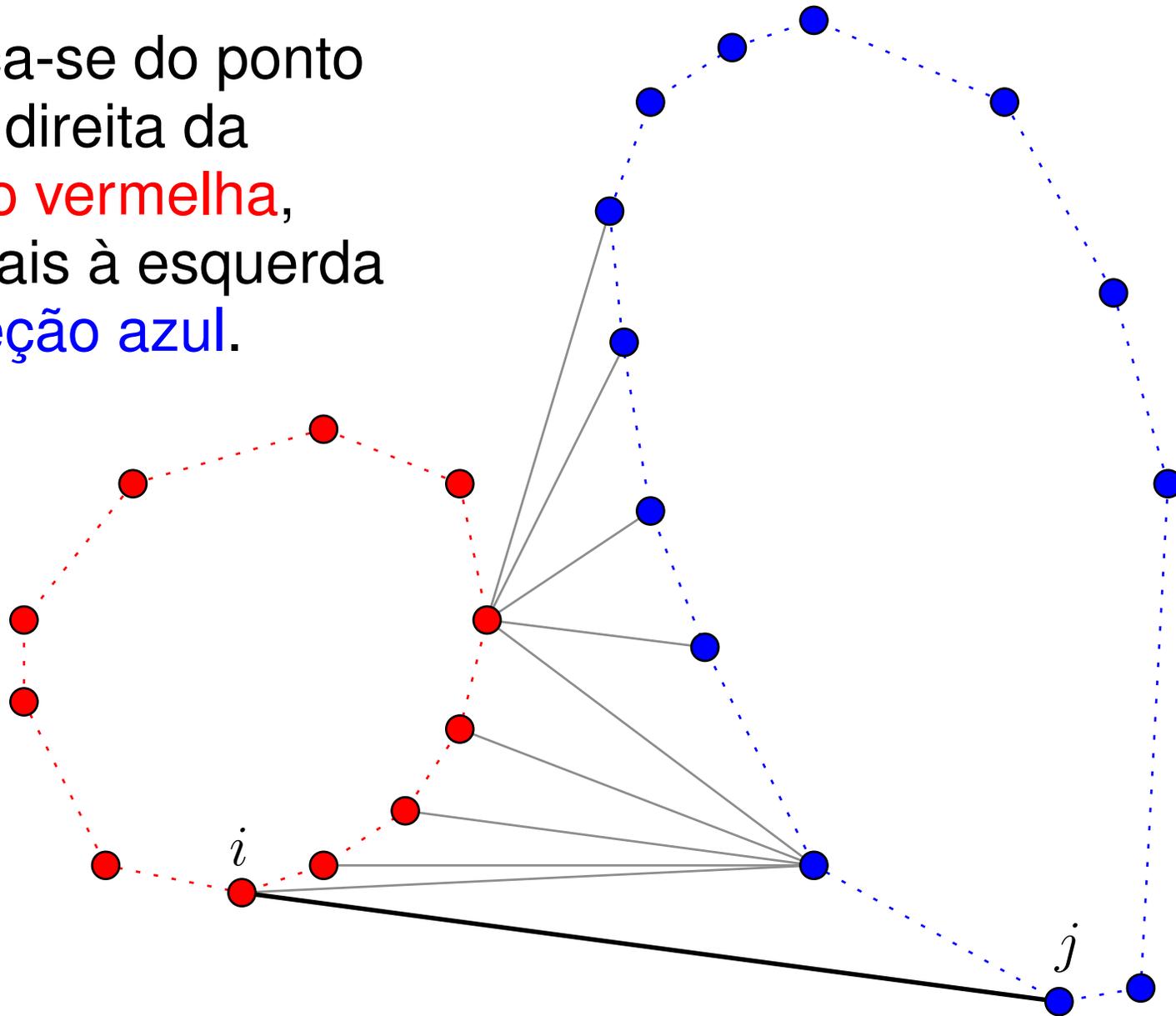
Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior da **coleção azul**? **Sim!**

Como encontrar a tangente inferior?

Começa-se do ponto mais à direita da **coleção vermelha**, e do mais à esquerda da **coleção azul**.



É tangente inferior!

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright vermelho mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright azul mais à esquerda
- 3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça
- 4 enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça
- 5 $i \leftarrow i - 1$
- 6 enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça
- 7 $j \leftarrow j + 1$
- 8 devolva (i, j)

Como encontrar a tangente inferior?

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright vermelho mais à direita

2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright azul mais à esquerda

3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça

4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i+1])$ faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

5 $i \leftarrow i-1$

6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1])$
ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

7 $j \leftarrow j+1$

8 devolva (i, j)

Simplificação

Recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente inferior (i, j) dos dois fechos.

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright vermelho mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright azul mais à esquerda
- 3 enquanto (i, j) não é tangente inferior faça
- 4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça
 - \triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
 - \triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

Tangente inferior?

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

TANGENTEINFERIOR (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright mais à direita

2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright mais à esquerda

3 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça

\triangleright enquanto não é tangente inferior faça

4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção vermelha faça

5 $i \leftarrow i-1$

6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j-1])$ faça

\triangleright enquanto (i, j) não é tangente inferior da coleção azul faça

7 $j \leftarrow j+1$

8 devolva (i, j)

Tangente inferior?

TANGENTEINFERIOR (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright mais à esquerda
- 3 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
 ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Tangente inferior?

TANGENTEINFERIOR (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright mais à esquerda
- 3 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

Tangente inferior?

TANGENTEINFERIOR (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$ \triangleright mais à direita
- 2 $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$ \triangleright mais à esquerda
- 3 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$
ou $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 4 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1])$ faça
- 5 $i \leftarrow i-1$
- 6 enquanto $\operatorname{DIR}(X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1])$ faça
- 7 $j \leftarrow j+1$
- 8 devolva (i, j)

O algoritmo está correto?

Se ele termina, a resposta é correta.

E ele termina?

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$

(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)

e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b , ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b , ele não é mais incrementado.

Correção do algoritmo

Pergunta:

TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina?

Invariante: (i, j) só intersecta os dois fechos nos extremos.

Se (i_b, j_b) é a tangente inferior,

então i_b está na metade de baixo de $H_1[1..h_1]$
(entre o ponto mais à esquerda e o mais à direita)
e j_b está na metade de baixo de $H_2[1..h_2]$.

Uma vez que i atinge i_b , ele não é mais decrementado.

Uma vez que j atinge j_b , ele não é mais incrementado.

Assim TANGENTEINFERIOR(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2) termina.

Tangente inferior

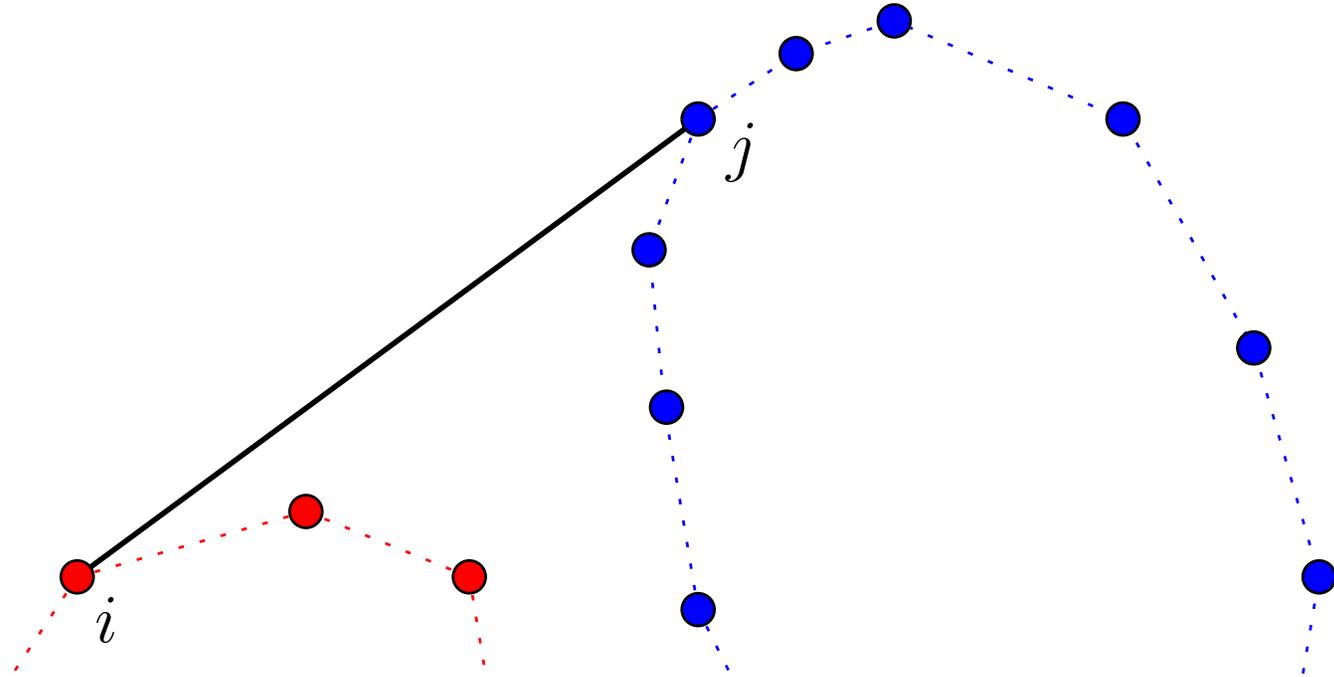
```
TANGENTEINFERIOR ( $X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2$ )
1   $i \leftarrow \operatorname{argmax}\{X[H_1[k]] : 1 \leq k \leq h_1\}$     ▷ mais à direita
2   $j \leftarrow \operatorname{argmin}\{X[H_2[k]] : 1 \leq k \leq h_2\}$     ▷ mais à esquerda
3  enquanto DIR( $X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$ )
      ou DIR( $X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$ ) faça
4      enquanto DIR( $X, Y, H_1[i], H_2[j], H_1[i-1]$ ) faça
5           $i \leftarrow i-1$ 
6      enquanto DIR( $X, Y, H_1[i], H_2[j], H_2[j+1]$ ) faça
7           $j \leftarrow j+1$ 
8  devolva  $(i, j)$ 
```

O algoritmo está correto?

Ele termina e produz a resposta correta.

Consumo de tempo: $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

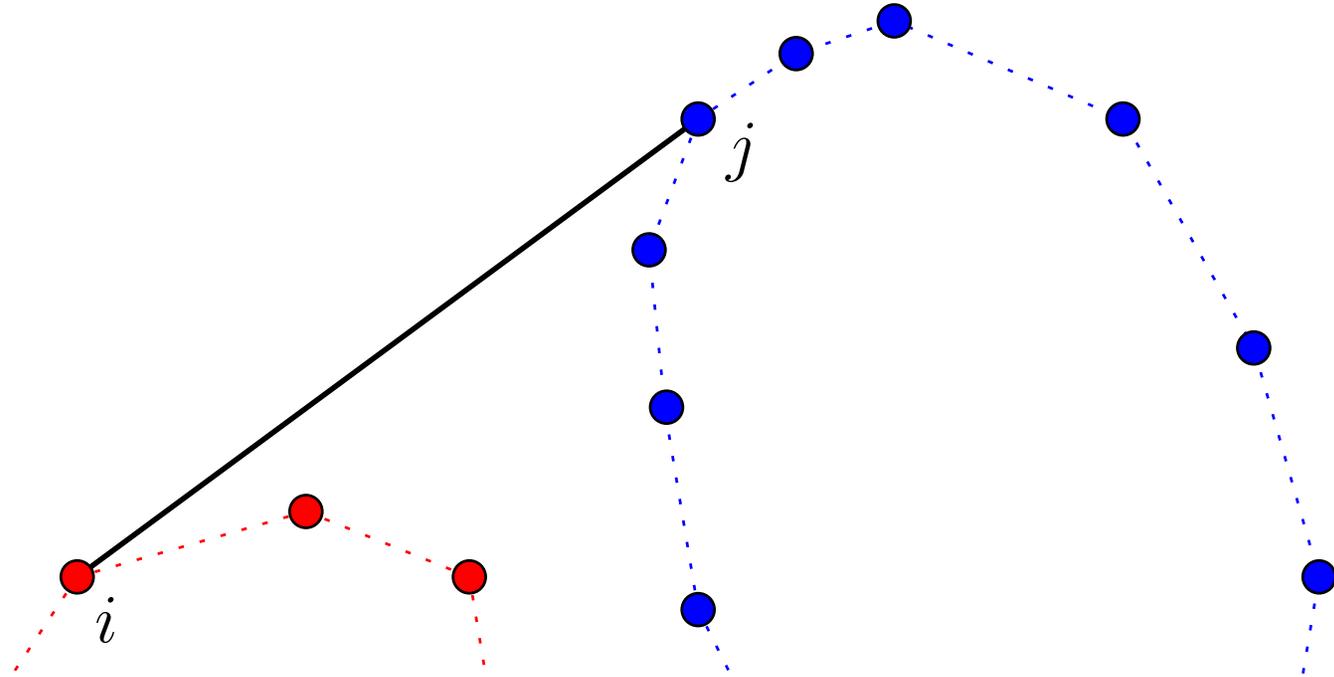
Tangente superior



O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

Tangente superior

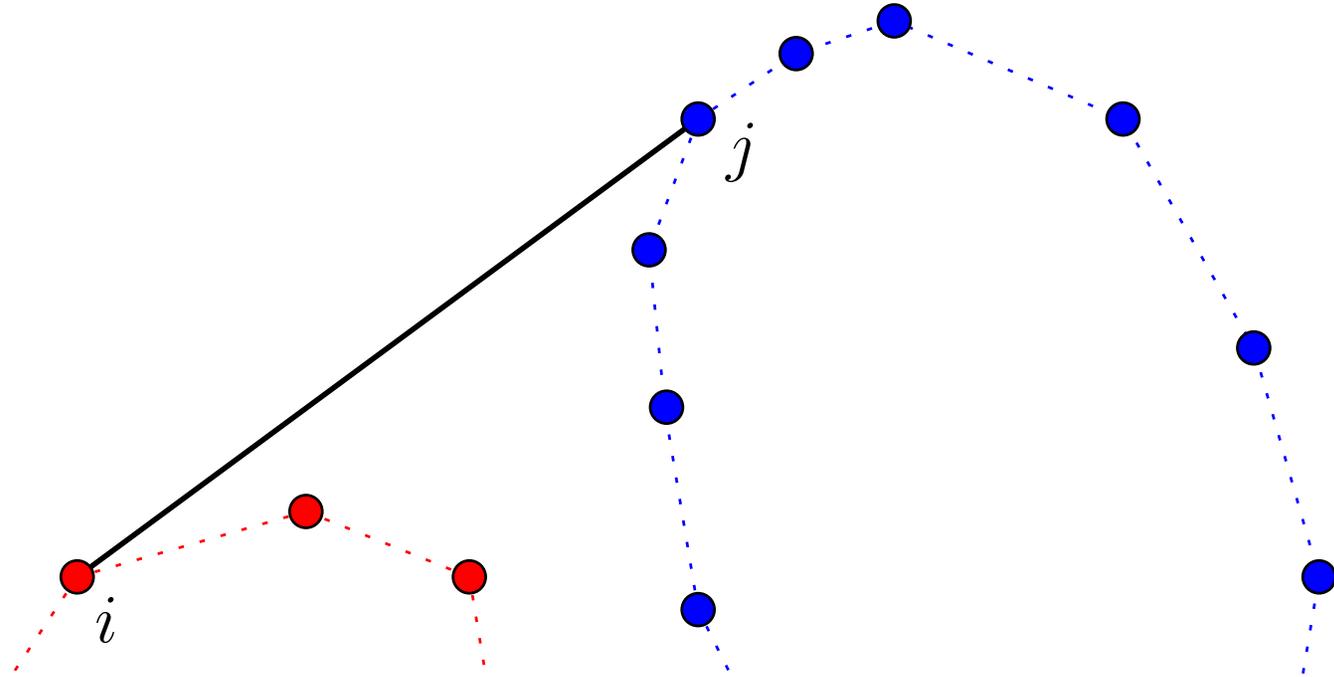


O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

Tangente superior



O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** se for os dois acima.

Tangente superior

O par (i, j)

é uma **tangente superior** para a **coleção vermelha** se os pontos de índice $H_1[i-1]$ e $H_1[i+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** para a **coleção azul** se os pontos de índice $H_2[j-1]$ e $H_2[j+1]$ estão “abaixo” do segmento entre i e j ,

é uma **tangente superior** se for os dois acima.

Exercício: Escreva a rotina

TANGENTESUPERIOR $(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$,

que recebe X, Y e os fechos (H_1, h_1) e (H_2, h_2) e devolve a tangente superior (i, j) dos dois fechos.

Sua rotina deve consumir tempo $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JUNTAHULL (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $(i_b, j_b) \leftarrow \text{TANGENTEINFERIOR}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 2 $(i_t, j_t) \leftarrow \text{TANGENTESUPERIOR}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 3 $h \leftarrow 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i_t]$
- 4 $i \leftarrow i_t + 1$
- 5 enquanto $H[h] \neq H_1[i_b]$ faça
- 6 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i] \quad i \leftarrow i + 1$
- 7 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[b_b]$
- 8 $j \leftarrow j_b + 1$
- 9 enquanto $H[j] \neq H_2[j_t]$ faça
- 10 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[j] \quad j \leftarrow j + 1$
- 11 devolva (H, h)

Junta fechos

Considere os índices “módulo” o tamanho do fecho em questão.

JUNTAHULL (X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)

- 1 $(i_b, j_b) \leftarrow \text{TANGENTEINFERIOR}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 2 $(i_t, j_t) \leftarrow \text{TANGENTESUPERIOR}(X, Y, H_1, h_1, H_2, h_2)$
- 3 $h \leftarrow 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i_t]$
- 4 $i \leftarrow i_t + 1$
- 5 enquanto $H[h] \neq H_1[i_b]$ faça
- 6 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_1[i] \quad i \leftarrow i + 1$
- 7 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[b_b]$
- 8 $j \leftarrow j_b + 1$
- 9 enquanto $H[j] \neq H_2[j_t]$ faça
- 10 $h \leftarrow h + 1 \quad H[h] \leftarrow H_2[j] \quad j \leftarrow j + 1$
- 11 devolva (H, h)

Consumo de tempo: $O(n)$, onde $n = h_1 + h_2$.

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos cinco algoritmos vistos para fecho convexo?

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos cinco algoritmos vistos para fecho convexo?

- embrulho de presente
- Graham
- incremental
- quickhull
- mergehull

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos cinco algoritmos vistos para fecho convexo?

- embrulho de presente
- Graham
- incremental
- quickhull
- mergehull

Como tratar pontos...
colineares em cada um deles?

Casos degenerados

Como tratar os casos degenerados nos cinco algoritmos vistos para fecho convexo?

- embrulho de presente
- Graham
- incremental
- quickhull
- mergehull

Como tratar pontos...

colineares em cada um deles?

com mesma X -coordenada no mergehull?

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$O(nh)$
INCREMENTAL	$O(n^2)$
GRAHAM	$O(n \lg n)$
QUICKHULL	$O(nh)$
MERGEHULL	$O(n \lg n)$

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$O(nh)$
INCREMENTAL	$O(n^2)$
GRAHAM	$O(n \lg n)$
QUICKHULL	$O(nh)$
MERGEHULL	$O(n \lg n)$

Cota inferior para o fecho convexo:

não existe algoritmo para encontrar o fecho convexo que no pior caso consuma $o(n \lg h)$.

Fecho convexo: um resumo

Algoritmo	Consumo no pior caso
EMBRULHO	$O(nh)$
INCREMENTAL	$O(n^2)$
GRAHAM	$O(n \lg n)$
QUICKHULL	$O(nh)$
MERGEHULL	$O(n \lg n)$

Cota inferior para o fecho convexo:

não existe algoritmo para encontrar o fecho convexo que no pior caso consuma $o(n \lg h)$.

Na aula vimos uma redução do problema da ordenação para o fecho convexo no plano que implica um resultado um pouco mais fraco que este.