

# Geometria Computacional

**Cristina G. Fernandes**

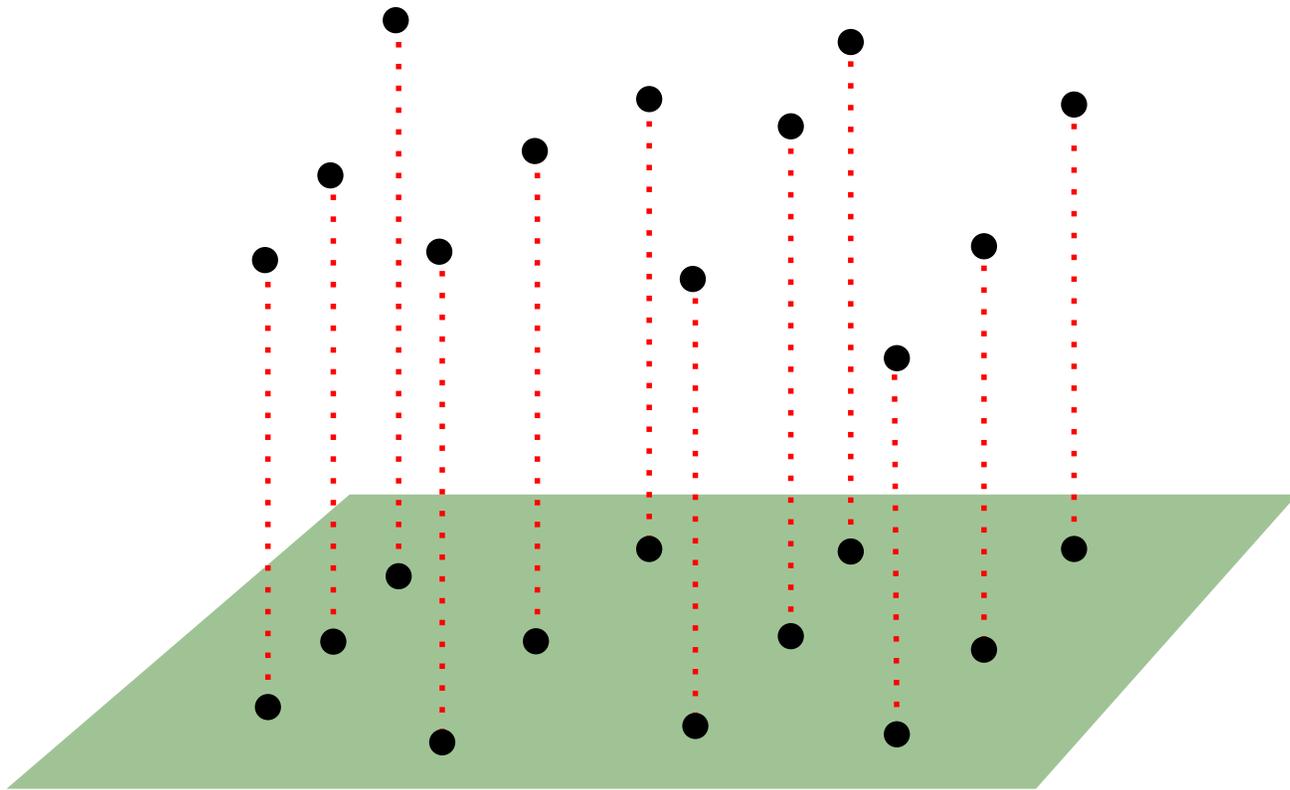
Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2018

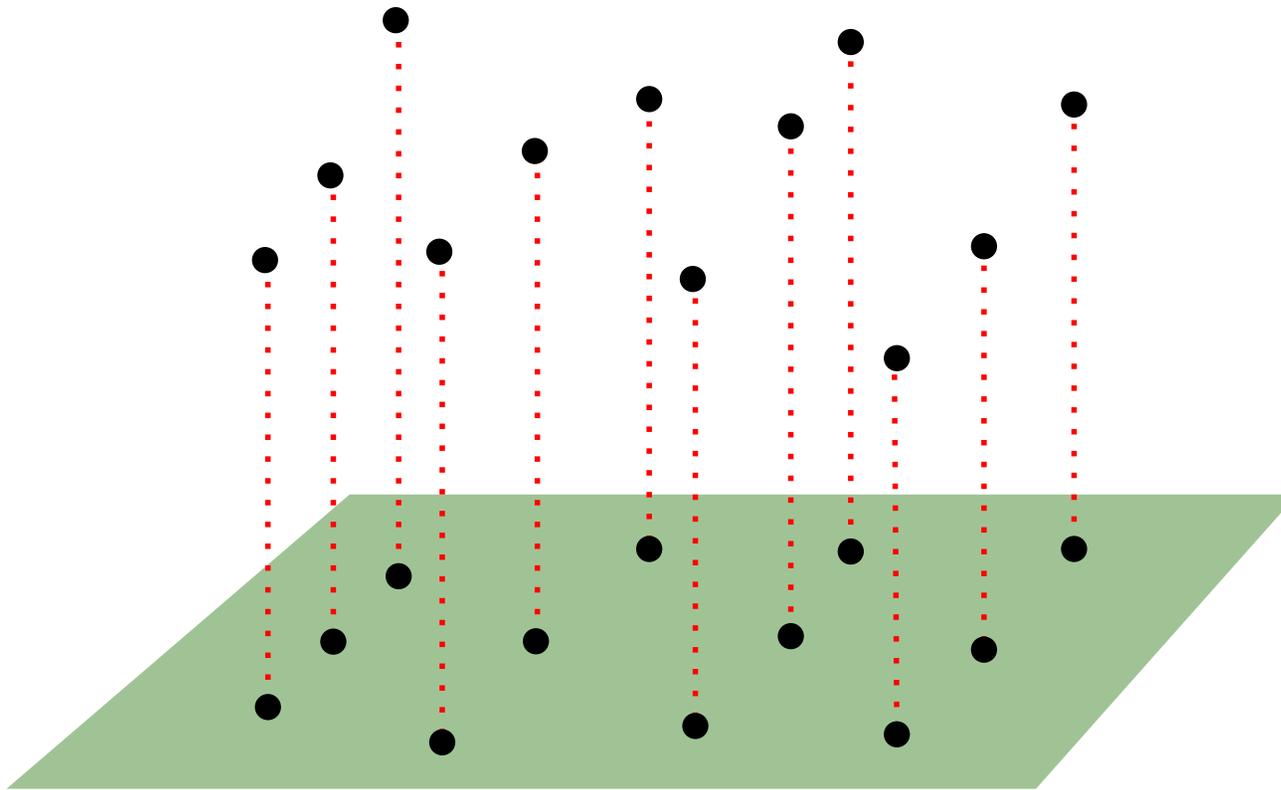
# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.

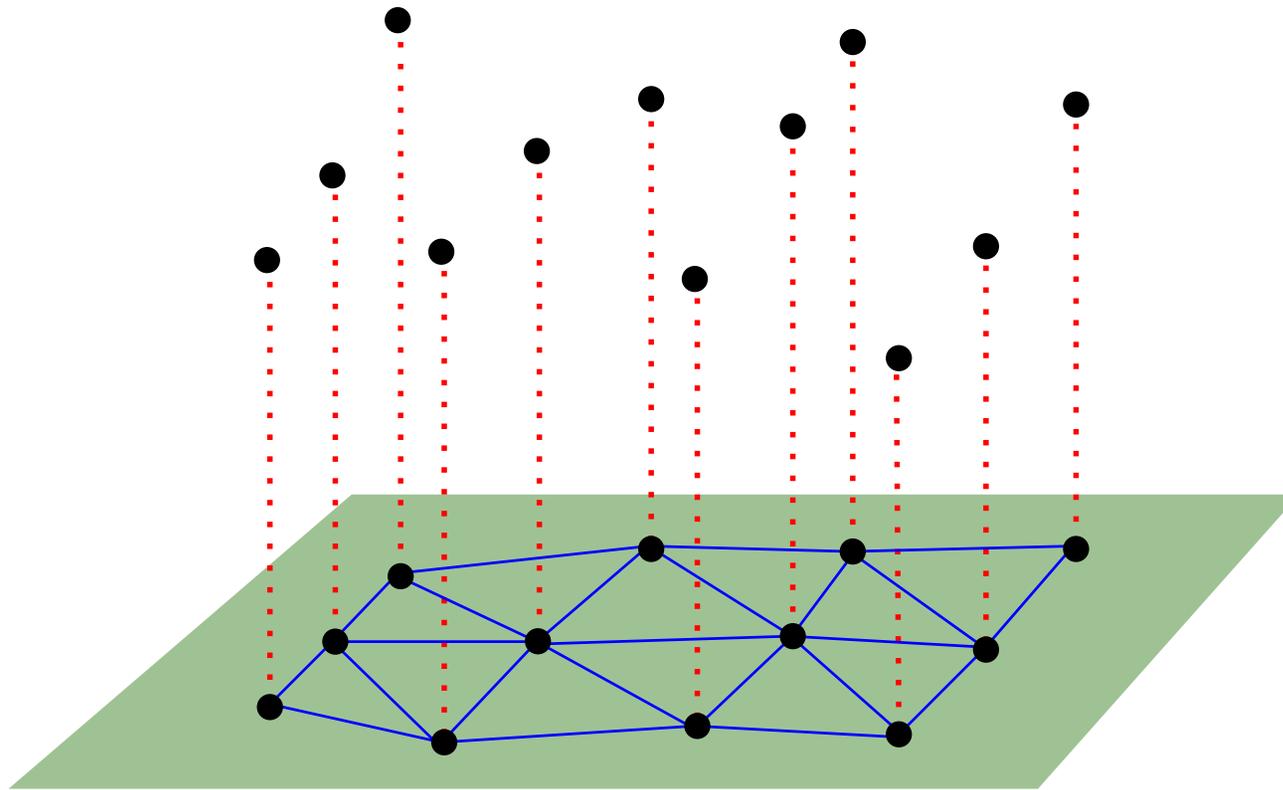


Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



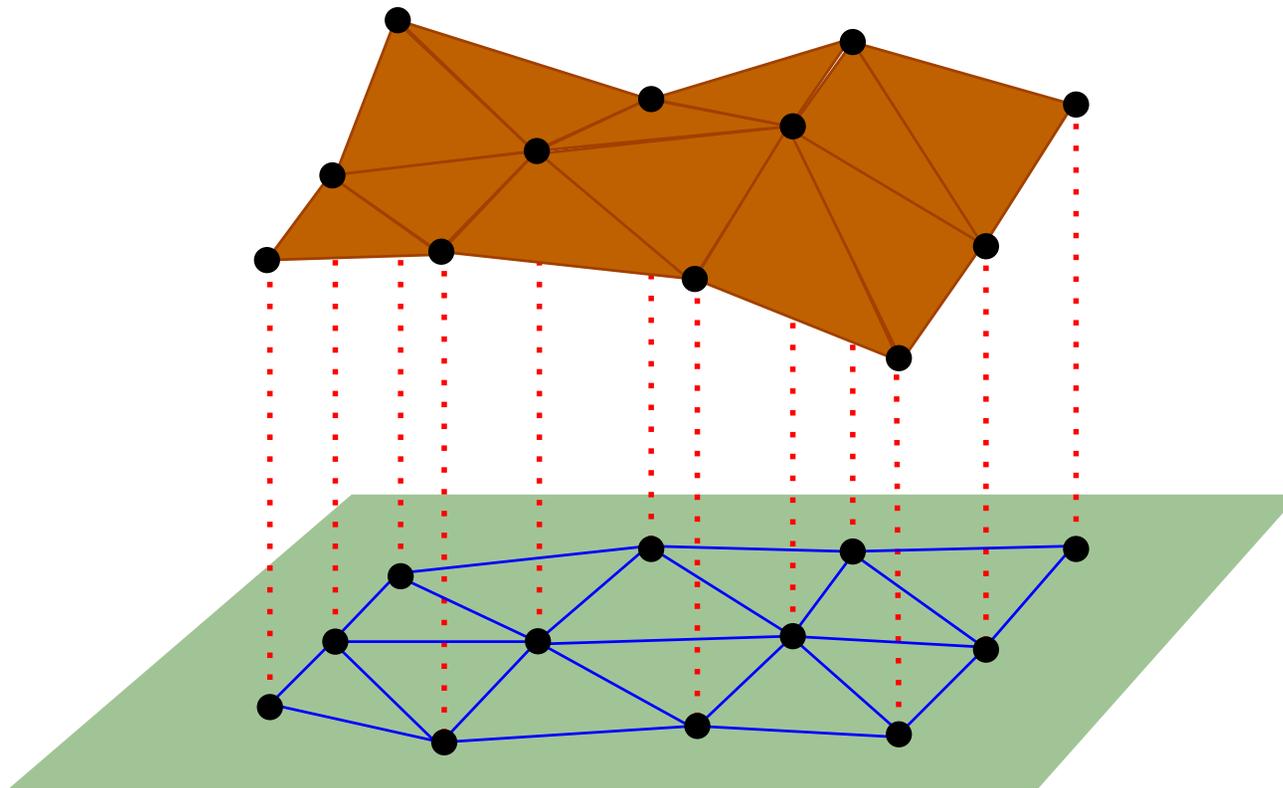
Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

Triangularizamos a projeção no plano e...

# Relevos

Medimos a altura de vários pontos em um terreno.



Queremos estimar o relevo do terreno por uma superfície.

Como fazer?

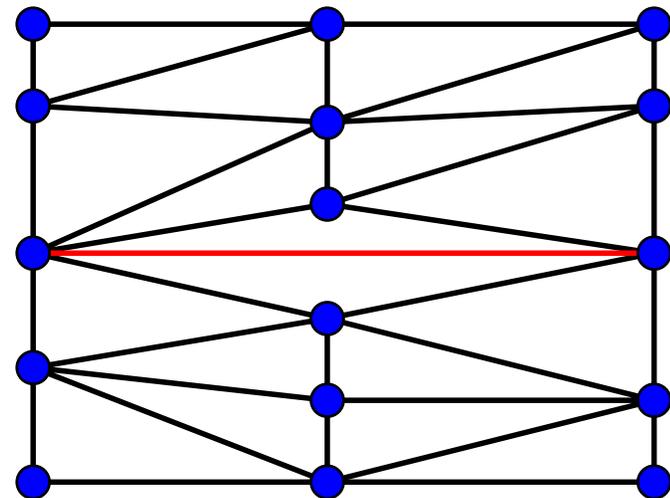
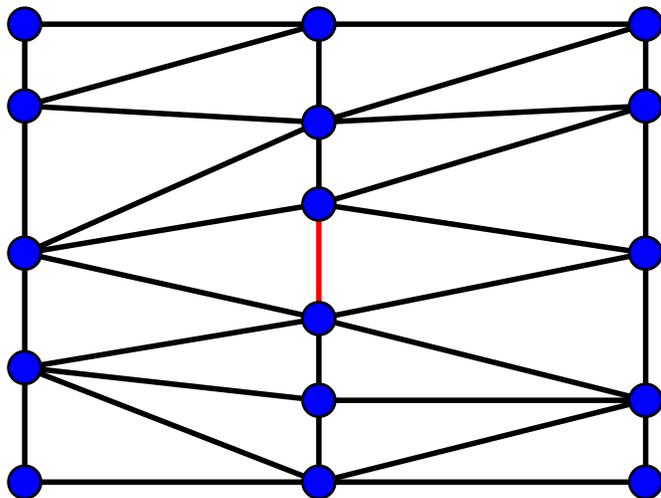
Triangularizamos a projeção no plano e levantamos!

# Qual triangulação é melhor?

- |      |        |      |
|------|--------|------|
| ● 0  | ● 1240 | ● 19 |
| ● 0  | ● 1000 | ● 20 |
| ● 10 | ● 980  | ● 36 |
| ● 6  | ● 990  | ● 28 |
| ● 4  | ● 890  | ● 23 |

# Qual triangulação é melhor?

- |      |        |      |
|------|--------|------|
| ● 0  | ● 1240 | ● 19 |
| ● 0  | ● 1000 | ● 20 |
| ● 10 | ● 980  | ● 36 |
| ● 6  | ● 990  | ● 28 |
| ● 4  | ● 1008 | ● 23 |
|      | ● 890  | ● 23 |



# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$

onde os  $\alpha_i$  são os ângulos internos

dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$

onde os  $\alpha_i$  são os ângulos internos

dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

Seja  $T'$  uma outra triangulação de  $P$ .

Escrevemos  $A(T) > A(T')$

se  $A(T)$  é lexicograficamente maior que  $A(T')$ .

# Vetor de ângulos

$P$ : conjunto de pontos

$T$ : triangulação de  $P$

$m$ : número de triângulos em  $T$

$A(T)$ : vetor de ângulos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$  de  $T$

onde os  $\alpha_i$  são os ângulos internos

dos  $m$  triângulos de  $T$ , em ordem não-decrescente.

Seja  $T'$  uma outra triangulação de  $P$ .

Escrevemos  $A(T) > A(T')$

se  $A(T)$  é lexicograficamente maior que  $A(T')$ .

$T$  é **ângulo-ótima**

se  $A(T) \geq A(T')$  para toda triangulação  $T'$  de  $P$ .

# Tamanho de uma triangulação

Seja  $P$  um conjunto de  $n$  pontos no plano, não todos colineares.

Seja  $k$  o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de  $P$ .

# Tamanho de uma triangulação

Seja  $P$  um conjunto de  $n$  pontos no plano, não todos colineares.

Seja  $k$  o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de  $P$ .

**Teorema:** Toda triangulação de  $P$  tem  $2n - 2 - k$  triângulos e  $3n - 3 - k$  arestas.

# Tamanho de uma triangulação

Seja  $P$  um conjunto de  $n$  pontos no plano, não todos colineares.

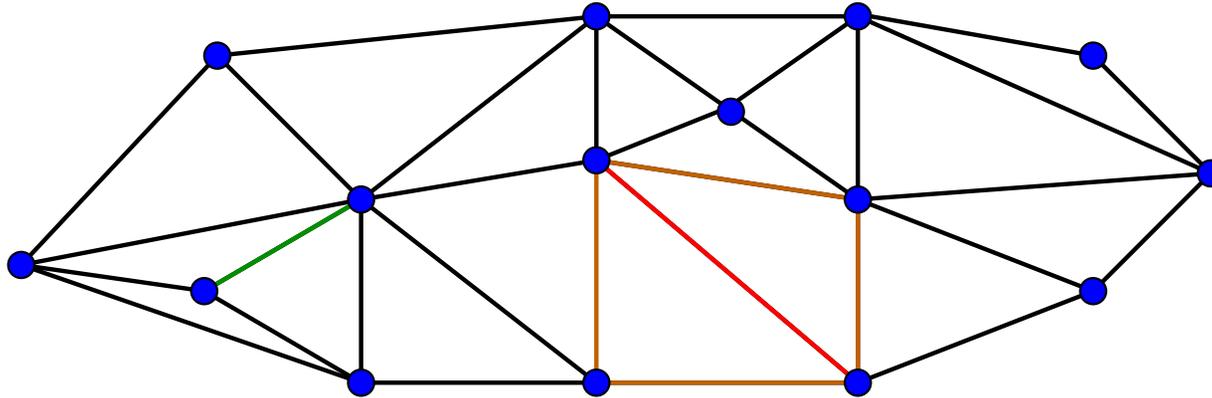
Seja  $k$  o número de vértices na fronteira do fecho convexo dos pontos de  $P$ .

**Teorema:** Toda triangulação de  $P$  tem  $2n - 2 - k$  triângulos e  $3n - 3 - k$  arestas.

Prova feita em aula.

# Triangulação legal: correção

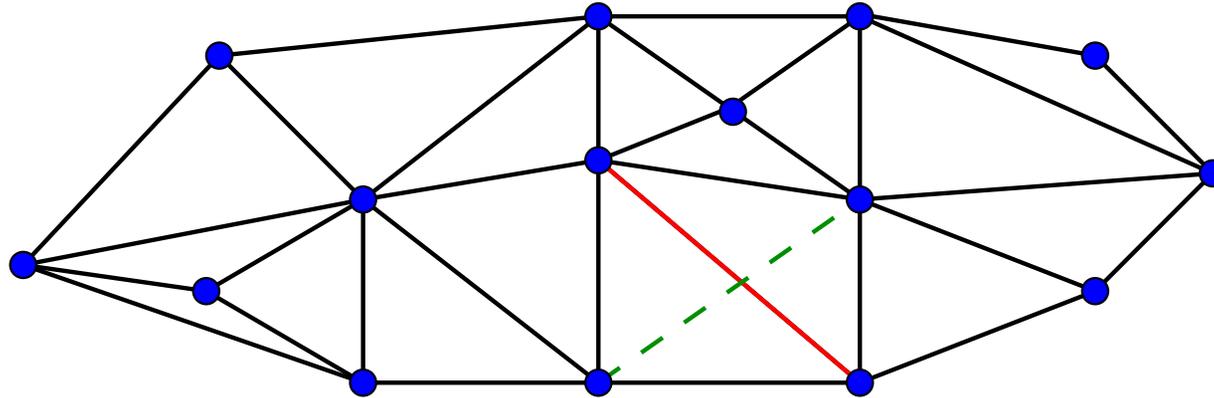
$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  cujos triângulos de  $T$  que a compartilham formam um **quadrilátero convexo** (a aresta verde não satisfaz esta condição)

# Triangulação legal: correção

$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  cujos triângulos de  $T$  que a compartilham formam um **quadrilátero convexo**

$f$ : outra diagonal do **quadrilátero** de  $e$

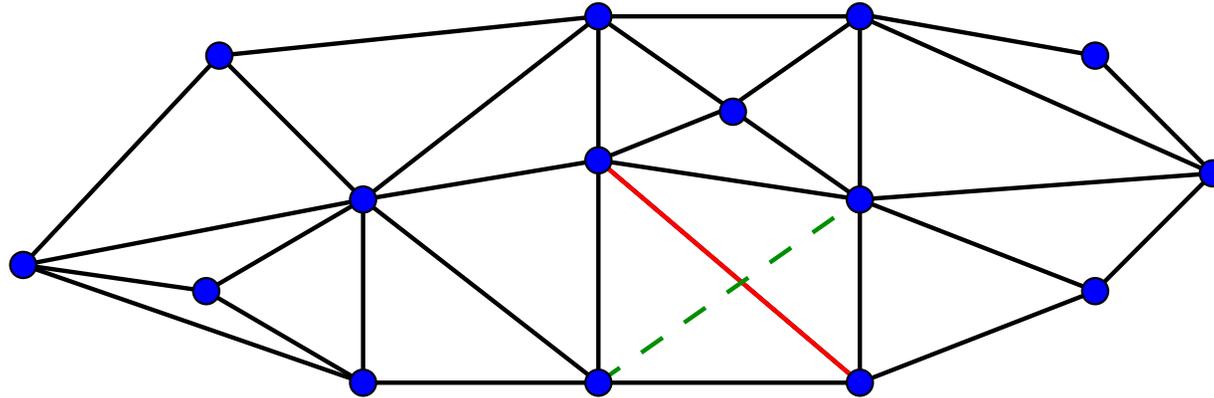
$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $e$

$\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $f$

$e$  é **ilegal** se  $\min \alpha_i < \min \beta_j$

# Triangulação legal: correção

$T$ : triangulação da coleção  $P$  de pontos do plano.



$e$ : aresta interna de  $T$  cujos triângulos de  $T$  que a compartilham formam um **quadrilátero convexo**

$f$ : outra diagonal do **quadrilátero** de  $e$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $e$

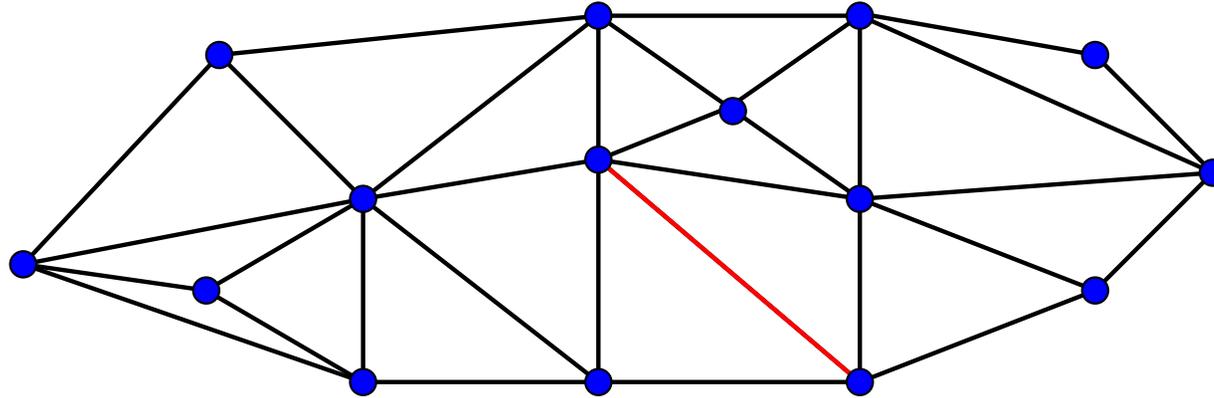
$\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ : ângulos dos  $\Delta$ s de  $f$

$e$  é **ilegal** se  $\min \alpha_i < \min \beta_j$

$T$  é **legal** se não tem arestas ilegais

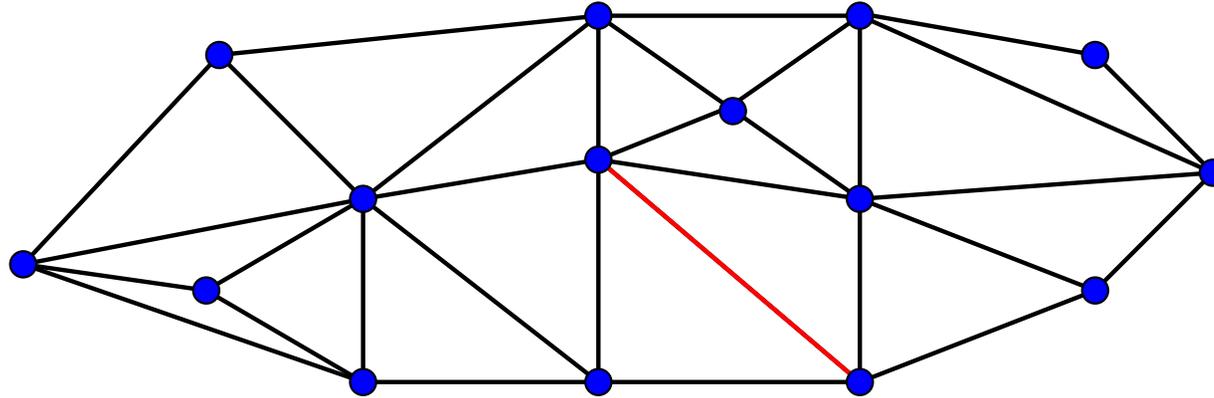
# Triangulação legal

$e$ : aresta ilegal de  $T$

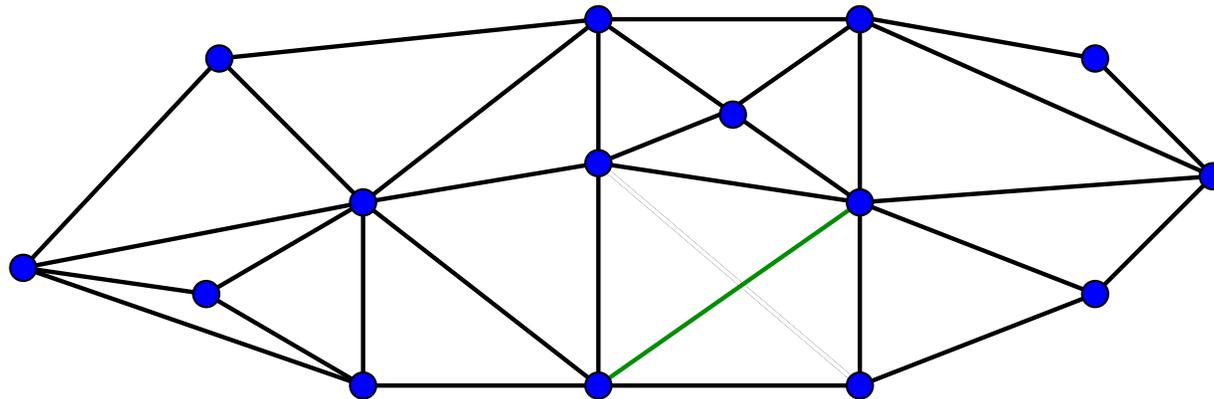


# Triangulação legal

$e$ : aresta ilegal de  $T$

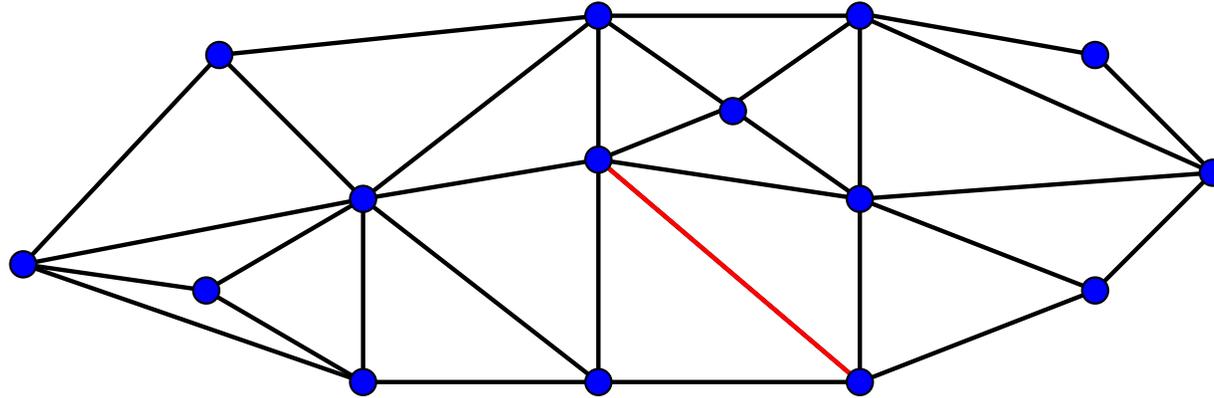


$T'$ : triangulação obtida trocando-se  $e$  pela **outra diagonal**.

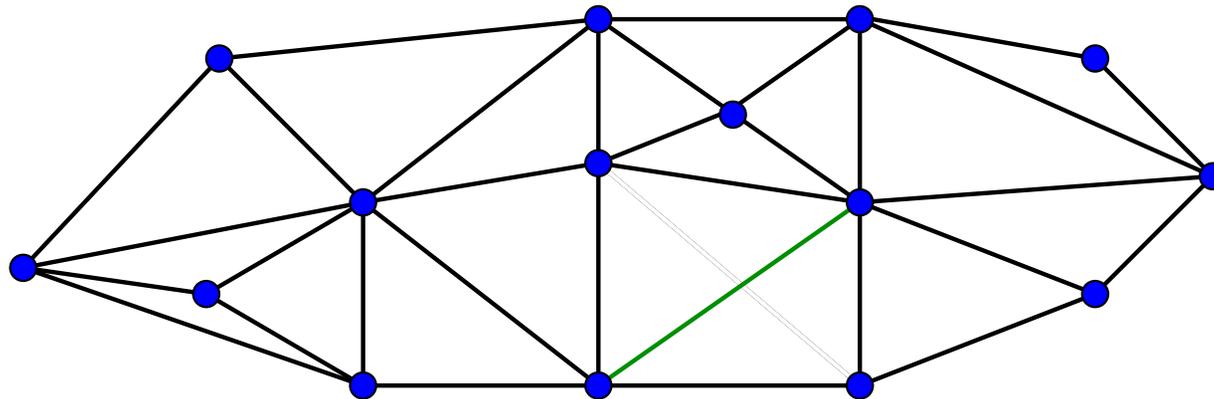


# Triangulação legal

$e$ : aresta ilegal de  $T$



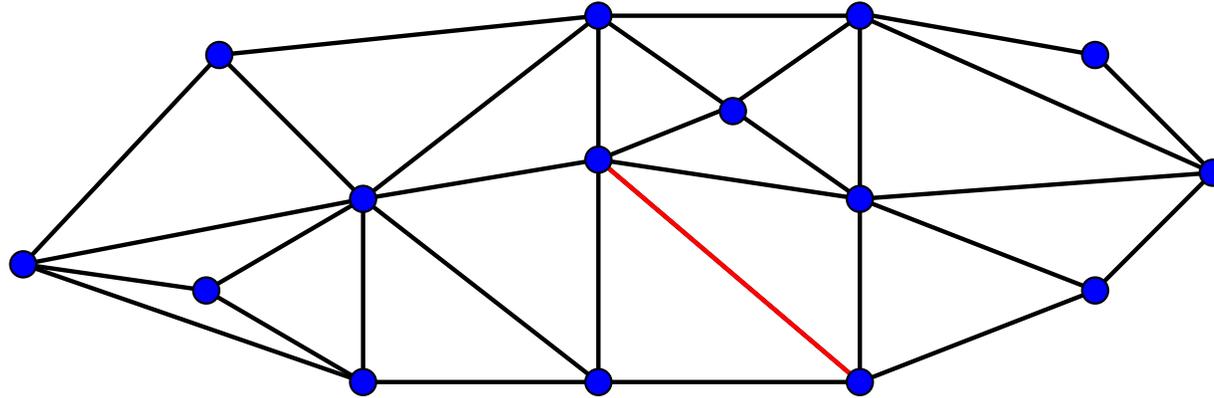
$T'$ : triangulação obtida trocando-se  $e$  pela **outra diagonal**.



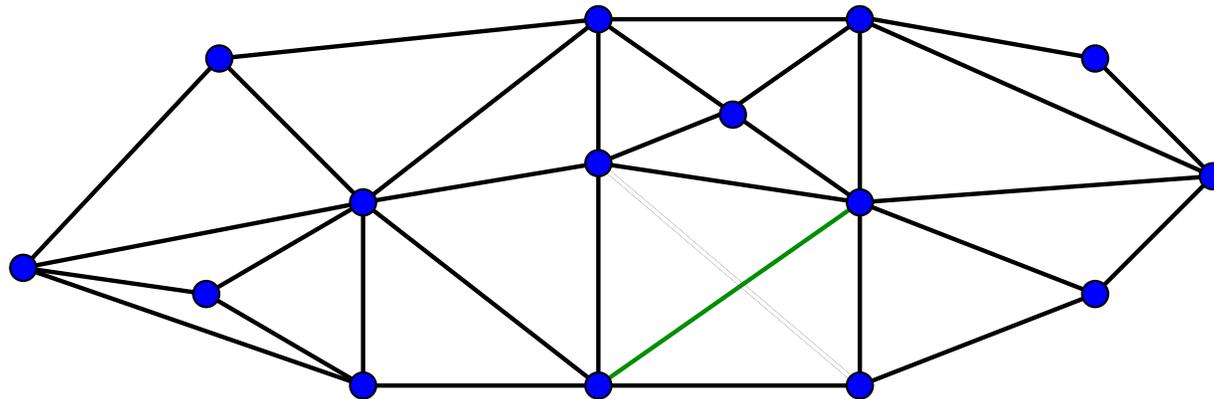
Vale que  $A(T') > A(T)$ .

# Triangulação legal

$e$ : aresta ilegal de  $T$

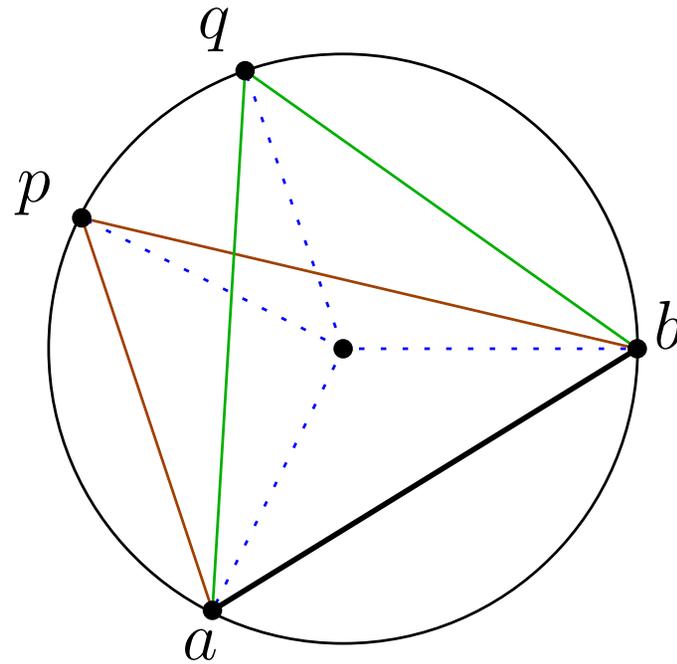


$T'$ : triangulação obtida trocando-se  $e$  pela **outra diagonal**.



Vale que  $A(T') > A(T)$ . **Então existe triangulação legal!**

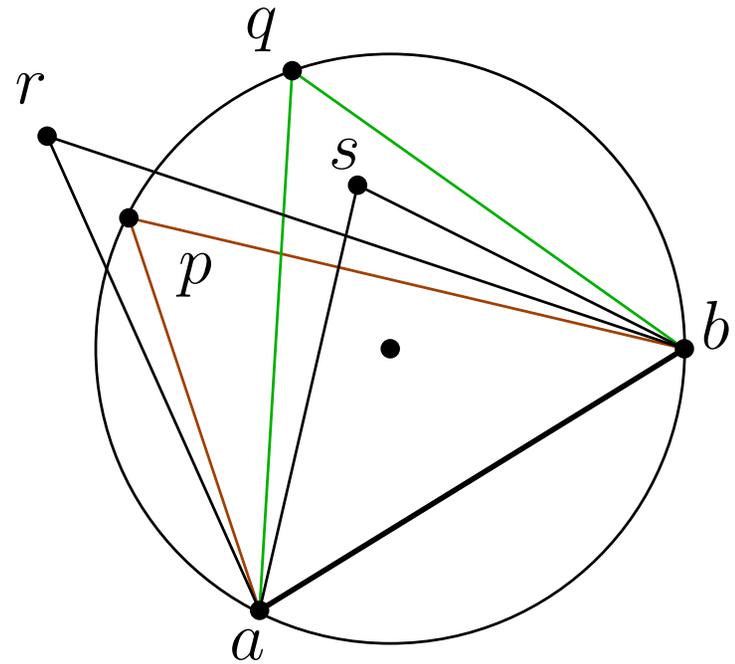
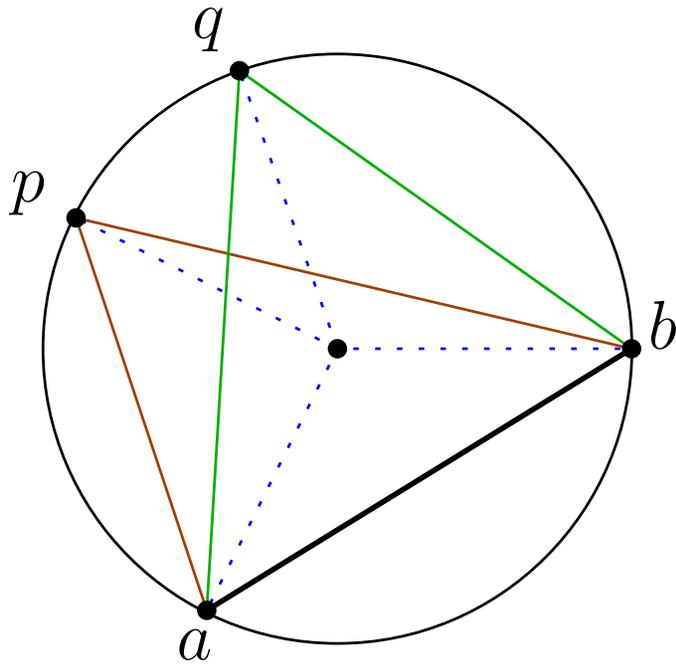
# Um pouco de geometria



$$\angle apb = \angle aqb$$

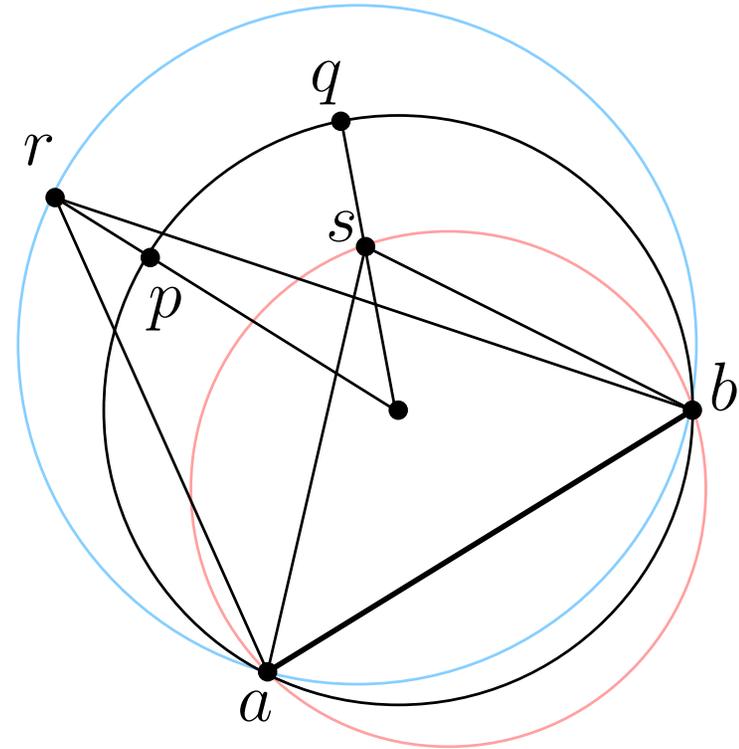
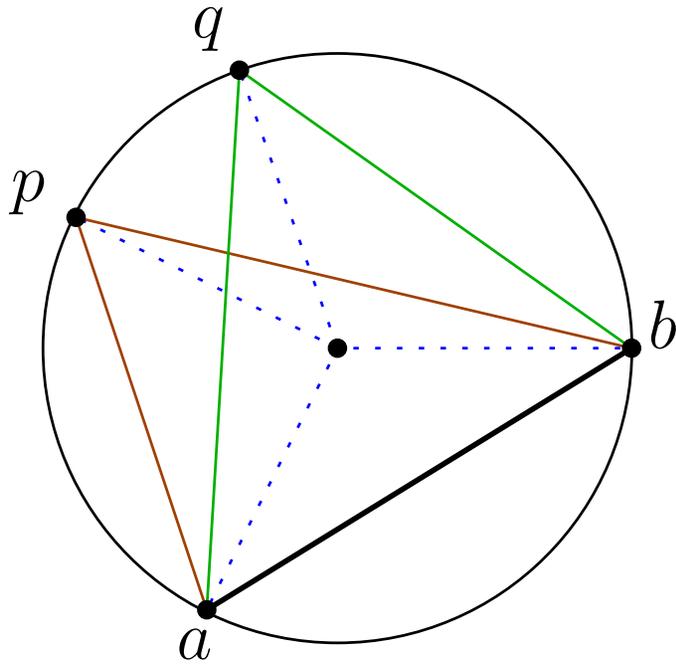
Prova feita na aula.

# Um pouco de geometria



$$\angle arb < \angle apb = \angle aqb < \angle asb$$

# Um pouco de geometria

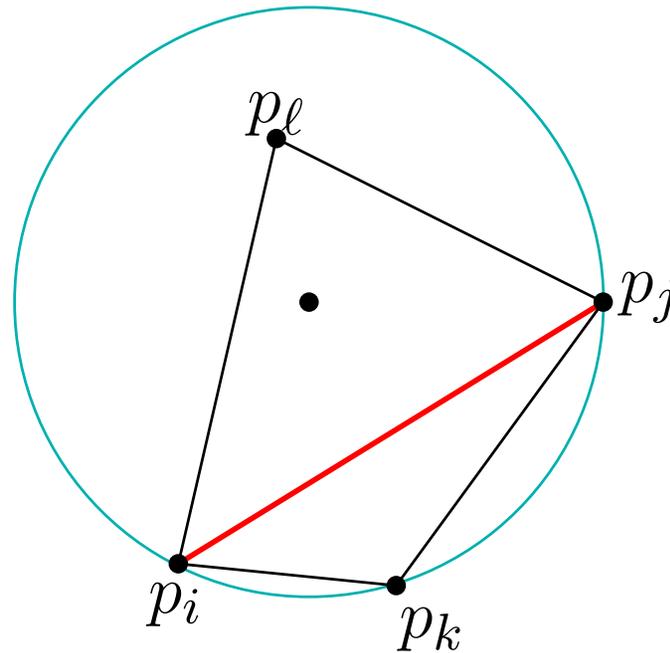


$$\angle arb < \angle apb = \angle aqb < \angle asb$$

# Aresta ilegal

Aresta interna  $e = p_i p_j$  e

$p_k$  e  $p_\ell$  pontas dos triângulos que compartilham  $e$ .



$e$  é ilegal sse

$p_\ell$  está no interior do círculo determinado por  $p_i p_j p_k$ .

Prova feita na aula.