

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2018

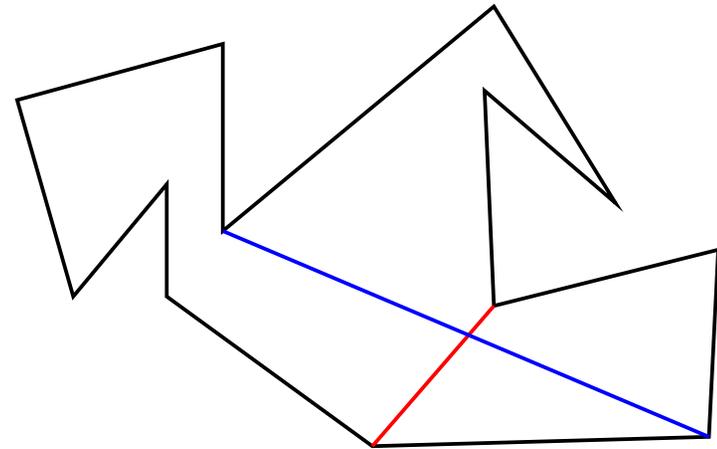
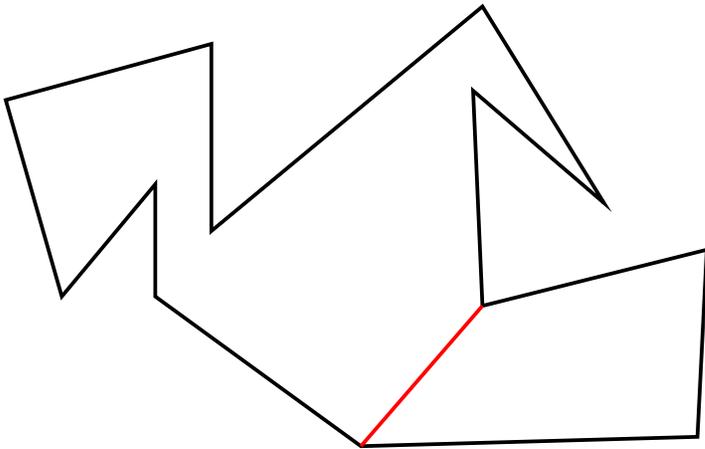
Triangulação de polígonos

Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Triangulação de polígonos

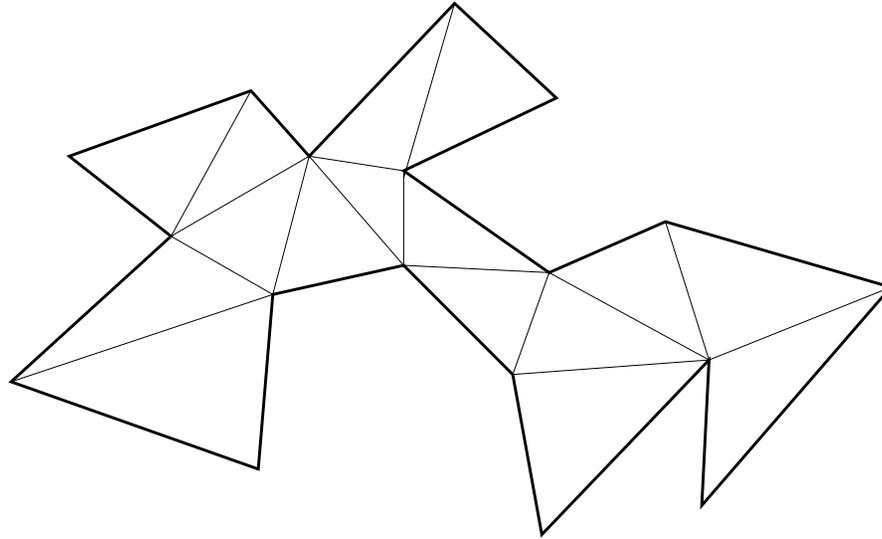
Diagonal: segmento uv onde u e v são vértices de P que se vêem claramente.

Diagonais uv e wz distintas de P **se cruzam** se $uv \cap wz \not\subseteq \{u, v, w, z\}$.



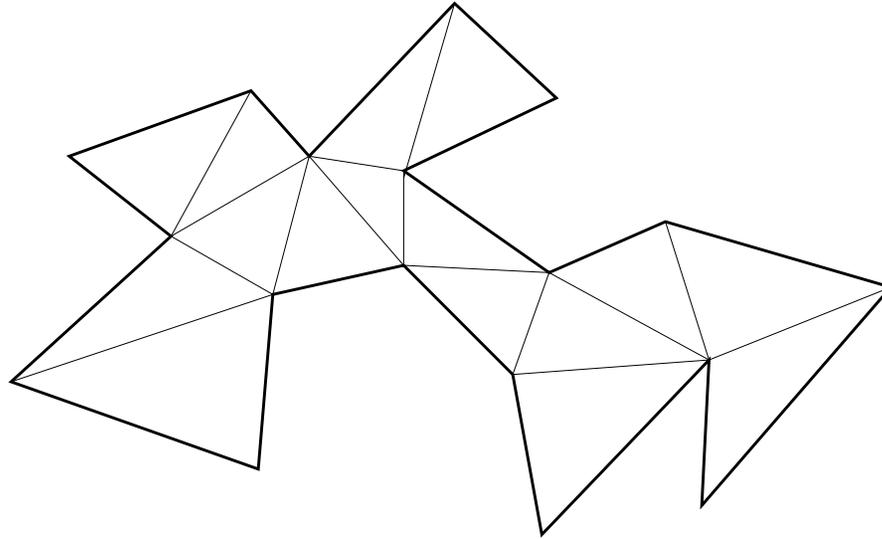
Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação de polígonos

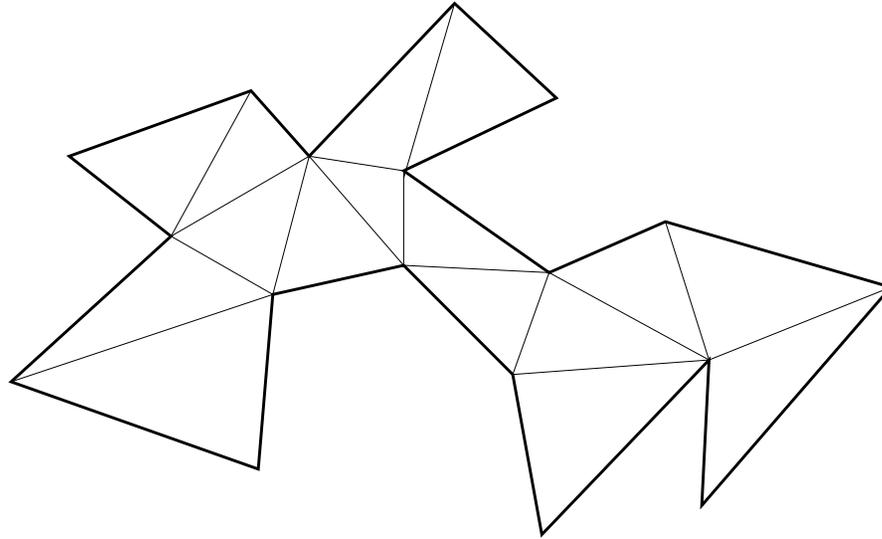
Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Triangulação de polígonos

Uma **triangulação** de P é obtida adicionando-se a P um conjunto maximal de diagonais de P que duas a duas não se cruzam.



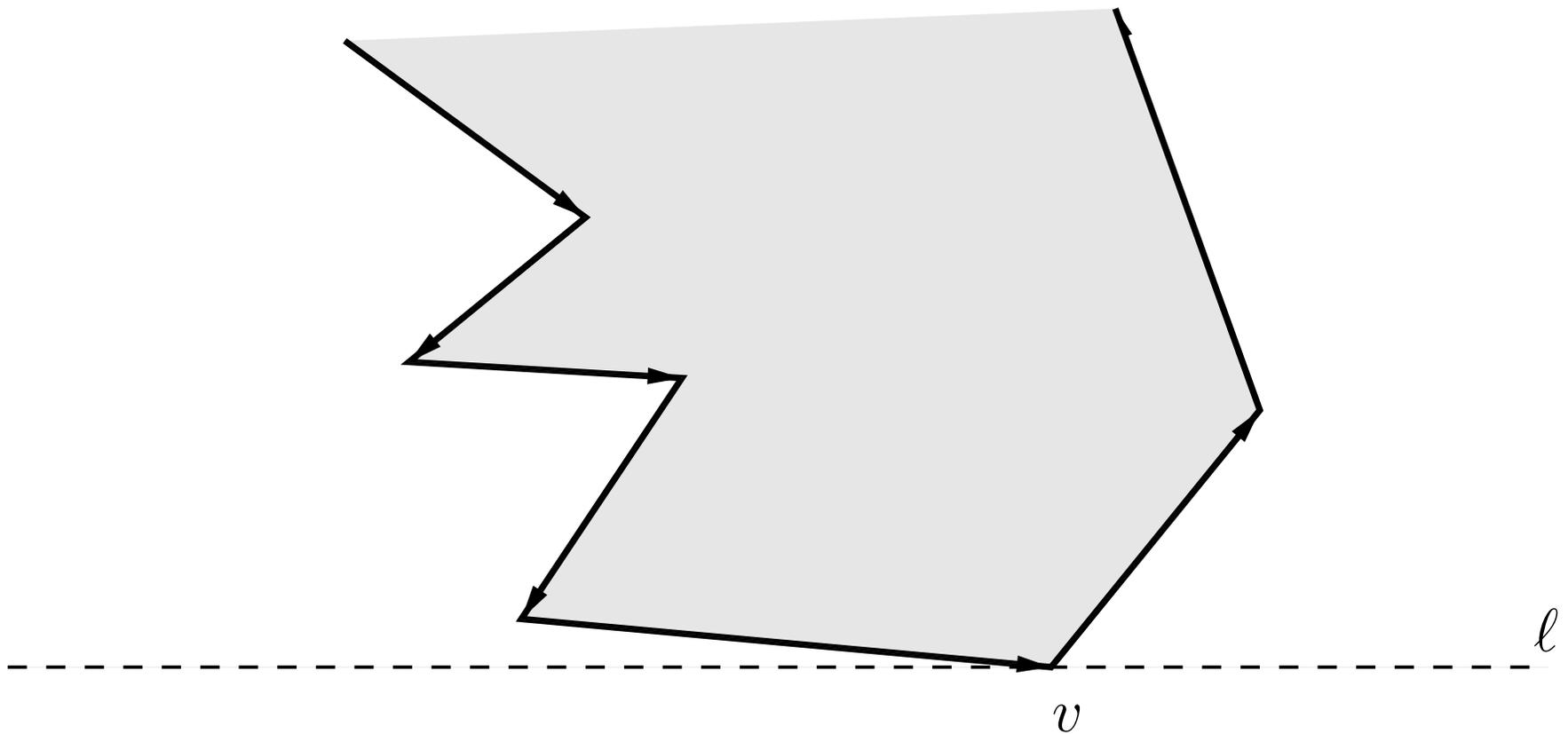
Triangulação: conjunto de triângulos que cobrem P e que se intersectam apenas em vértices ou diagonais de P .

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais.

Teoria de triangulação

Lema: Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.

Prova: (Feita na aula.)



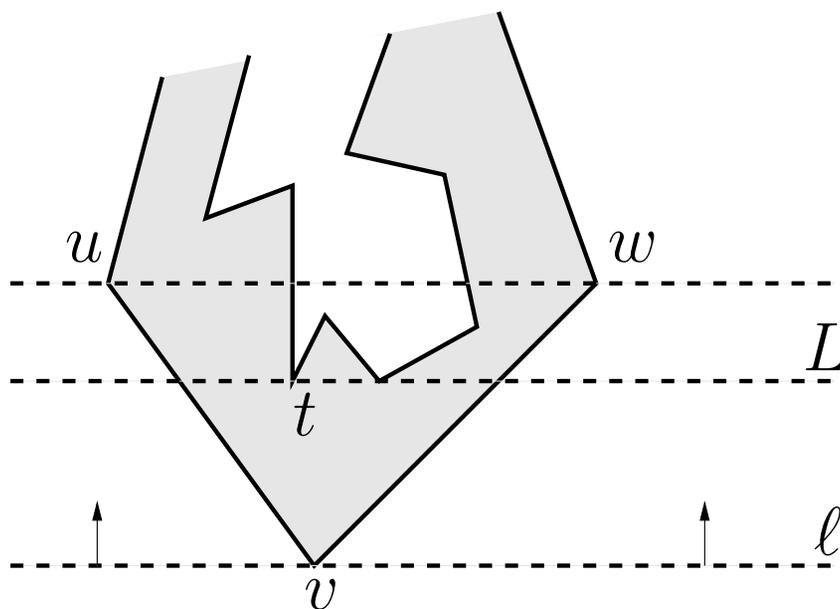
Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Teoria de triangulação

Lema (Meister): Todo polígono com pelo menos 4 vértices tem uma diagonal.

Prova: (Feita na aula.)



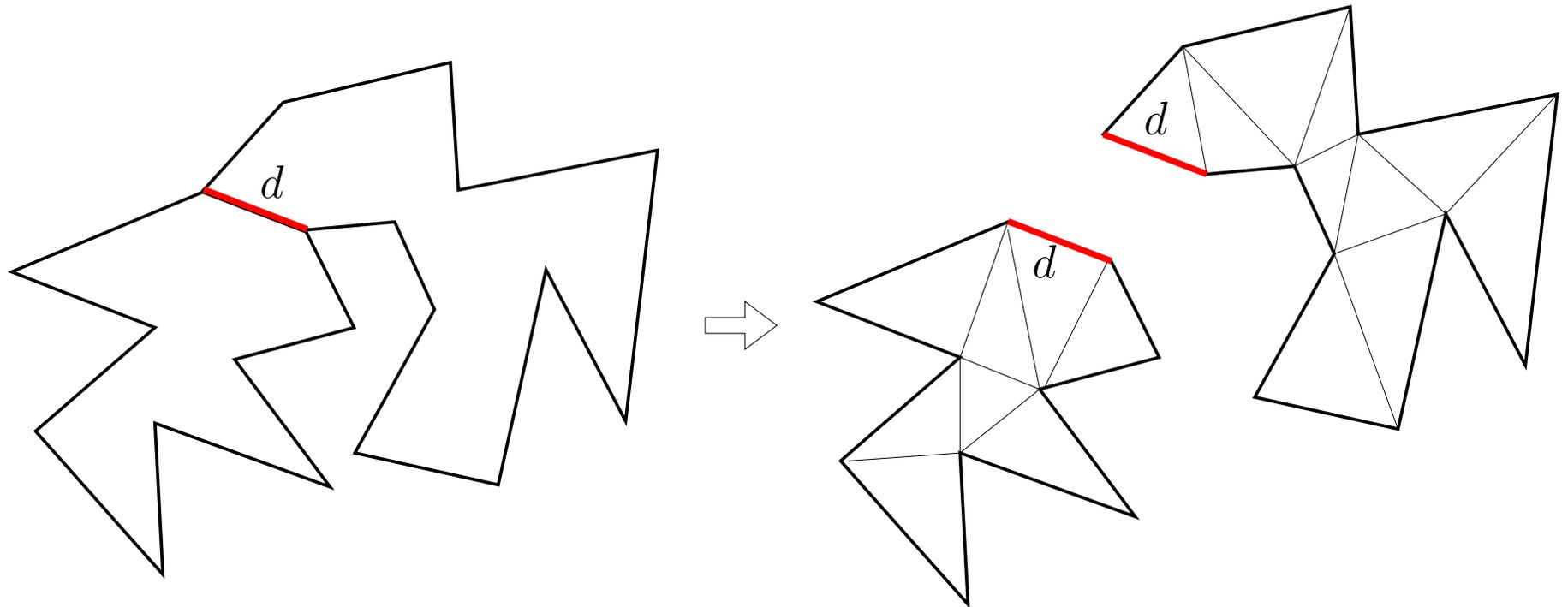
Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Teoria de triangulação

Teorema 1 (Triangulação): Todo polígono com n vértices pode ser particionado em $n - 2$ triângulos através da inclusão de $n - 3$ diagonais.

Prova: (Feita na aula.)



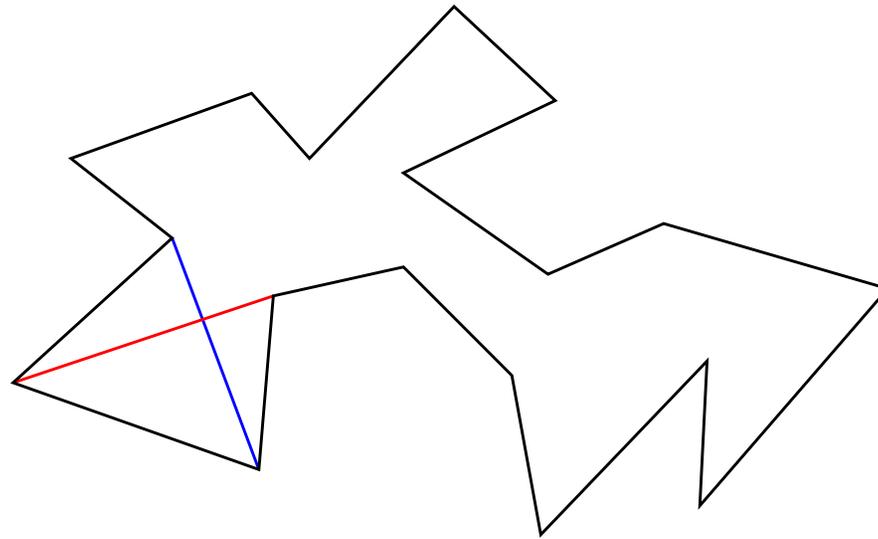
Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

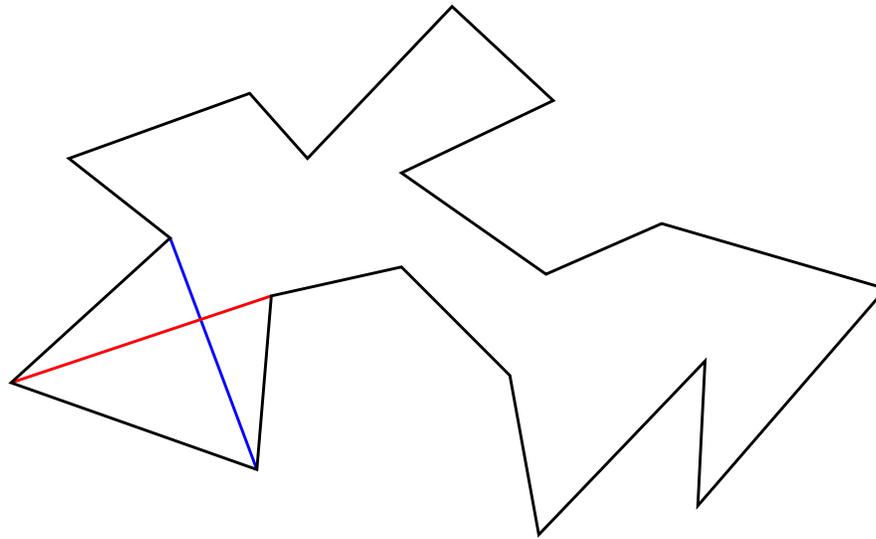
Duas orelhas **não se sobrepõem** se seus interiores são disjuntos.



Orelhas de polígonos

Três vértices consecutivos u, v, w de um polígono P formam uma **orelha** de P se uw é uma diagonal de P .

Duas orelhas **não se sobrepõem** se seus interiores são disjuntos.



Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

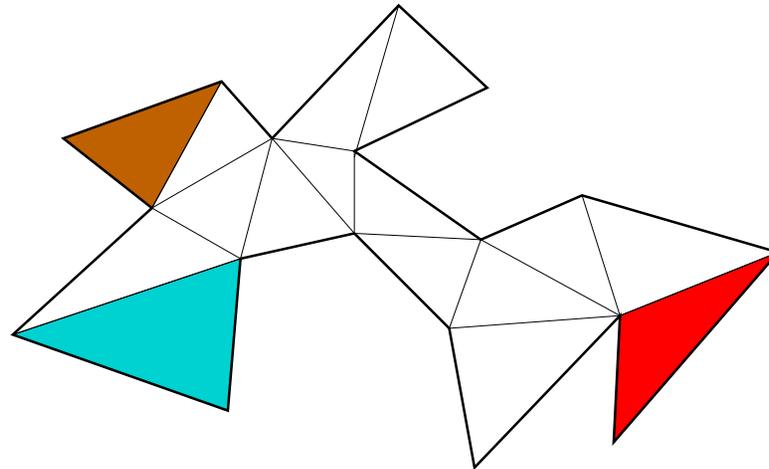
Orelhas de polígonos

Teorema (Meister's Two Ears Theorem): Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.

Segue do teorema abaixo.

Teorema 3: Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P . Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P .

Prova: (Feita na aula.)



Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

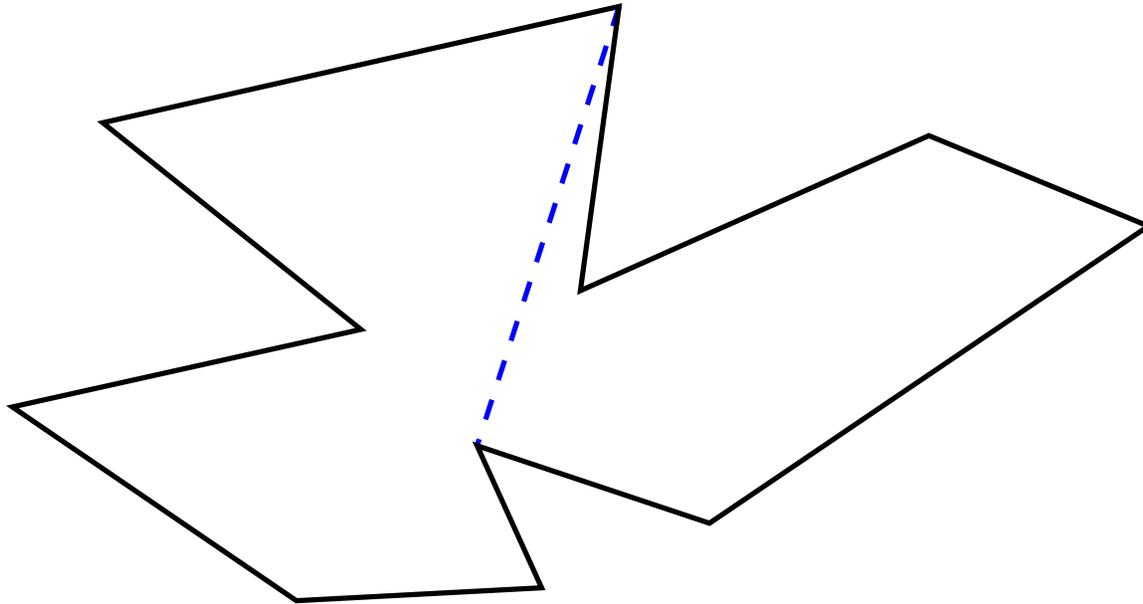
Coloração do grafo de triangulação

Teorema 2 (Coloração de grafos de triangulação): Seja G_T o grafo associado à triangulação T de um polígono P . Então G_T tem uma 3-coloração.

Prova: (Feita na aula.)

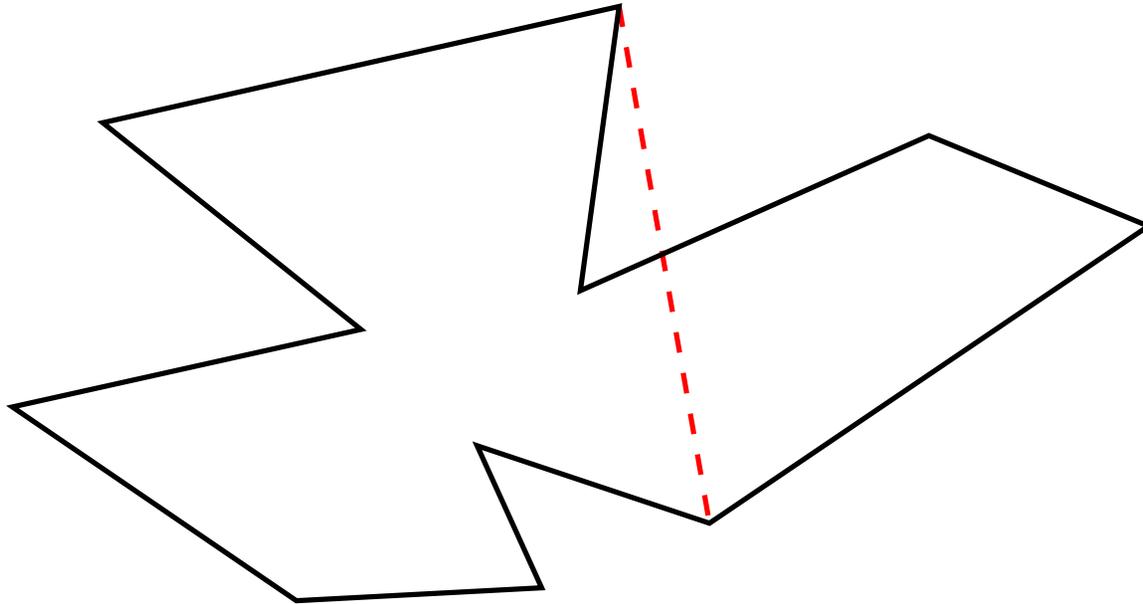
Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?



Teste de diagonal

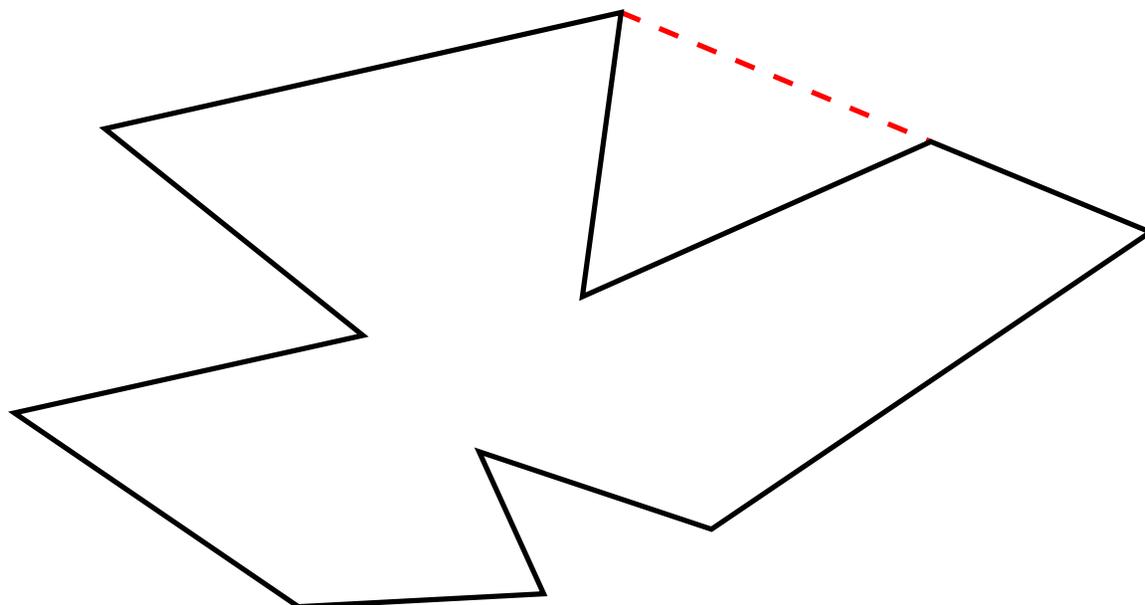
Como encontrar uma diagonal?



Interseção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Teste de diagonal

Como encontrar uma diagonal?

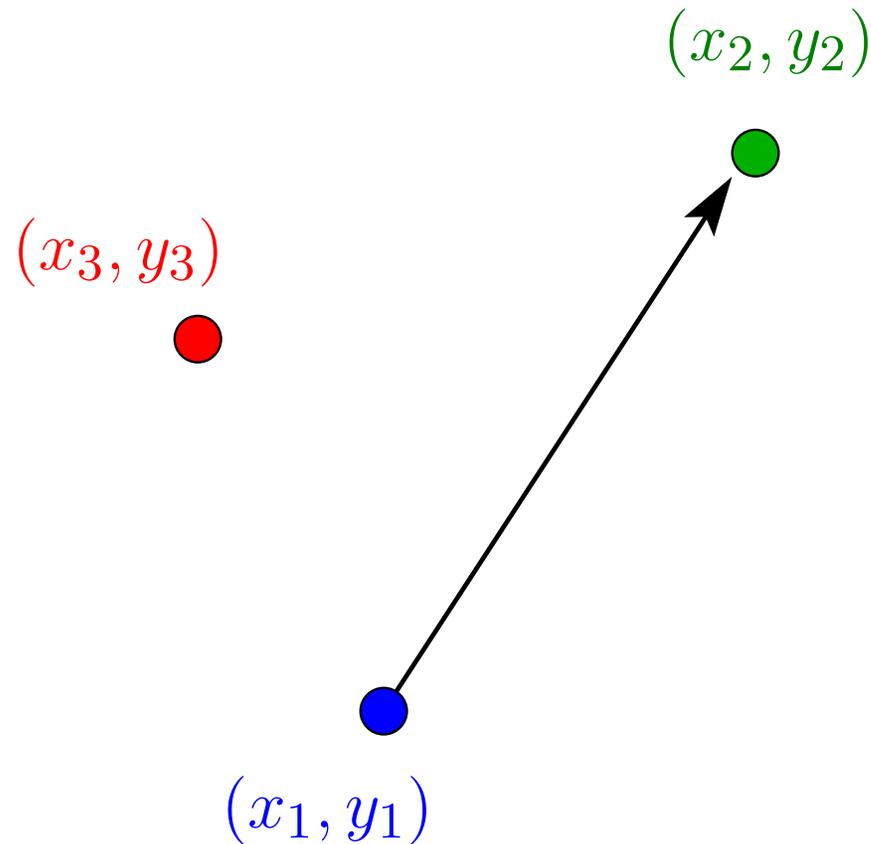


Interseção de segmentos: como decidir se dois segmentos se intersectam ou não?

Pertinência: como decidir se um segmento está dentro ou não do polígono?

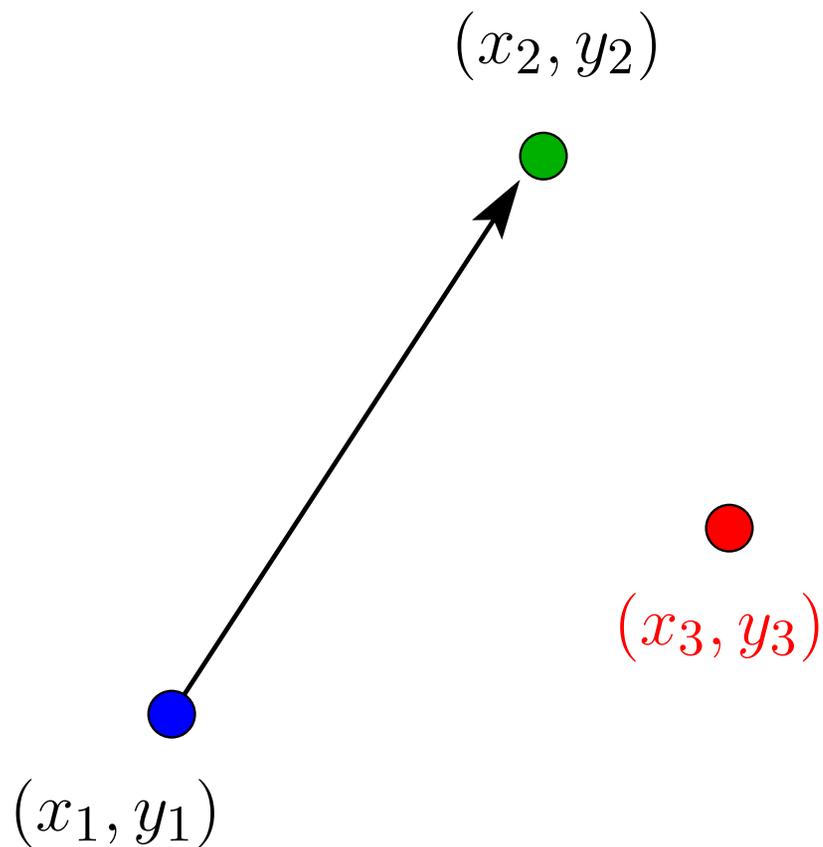
Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)) = VERDADE



Predicados geométricos

ESQUERDA($((x_1, y_1), ((x_2, y_2), (x_3, y_3)))$) = FALSO



Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3))

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

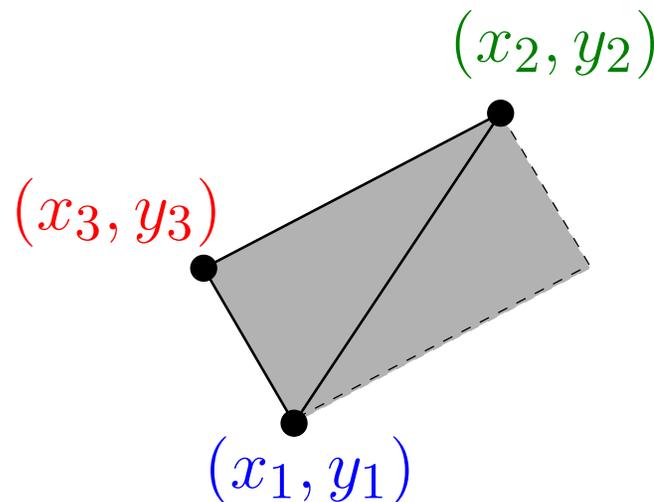
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)): sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).$$

O valor absoluto deste número é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .



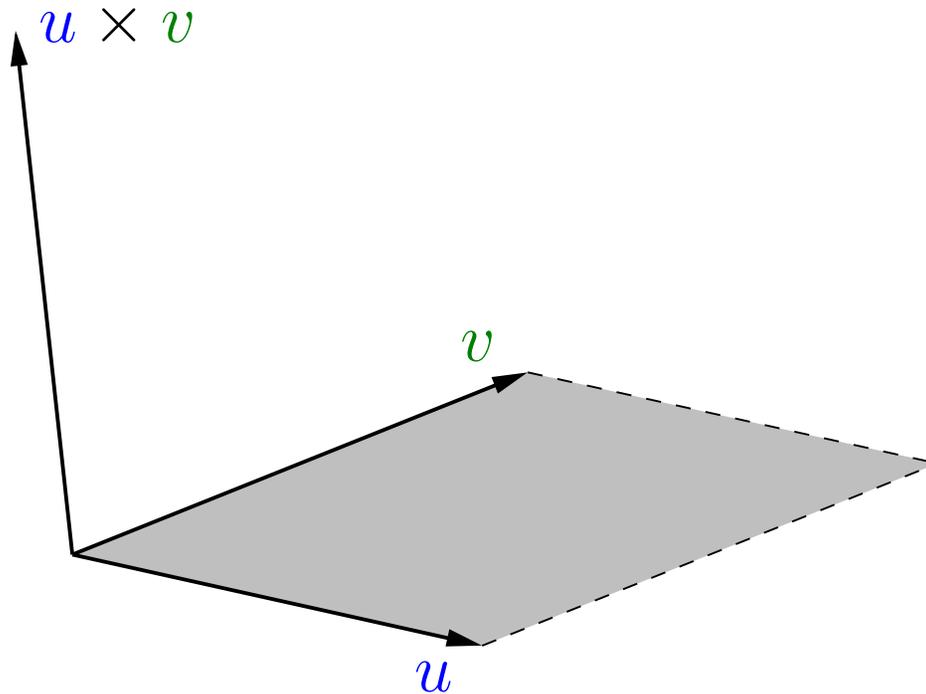
Recordação...

u e v : vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

Recordação...

u e v : vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

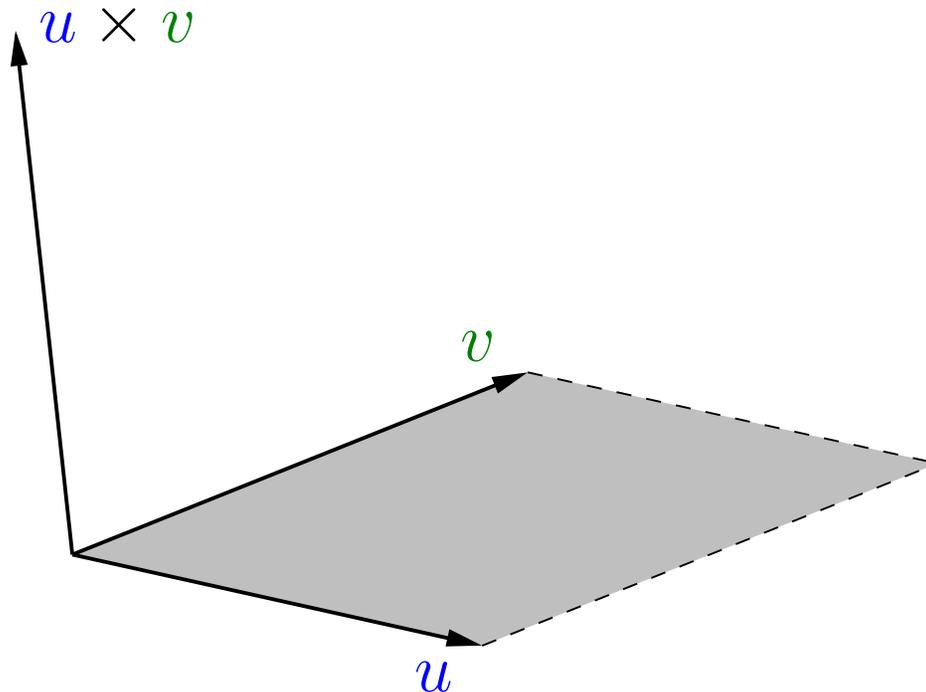
Produto vetorial $u \times v$: vetor perpendicular ao plano que contem u e v cujo comprimento é a **área do paralelepípedo** formado por u e v . Com que sentido?



Recordação...

u e v : vetores no R^3 com ponta inicial na origem.

Produto vetorial $u \times v$: vetor perpendicular ao plano que contem u e v cujo comprimento é a **área do paralelepípedo** formado por u e v . Com que sentido?



Regra da mão direita: indicador na direção de u , dedo médio na direção de v ; o polegar indica o sentido de $u \times v$.

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Alternativamente,

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} .$$

Produto vetorial

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

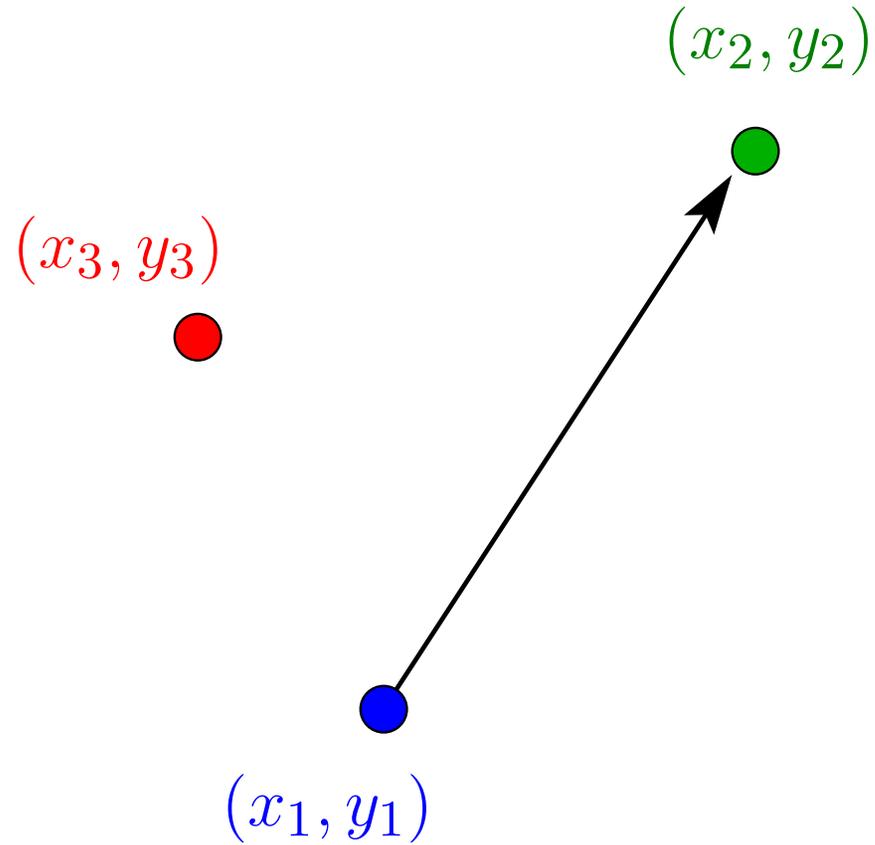
$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Alternativamente,

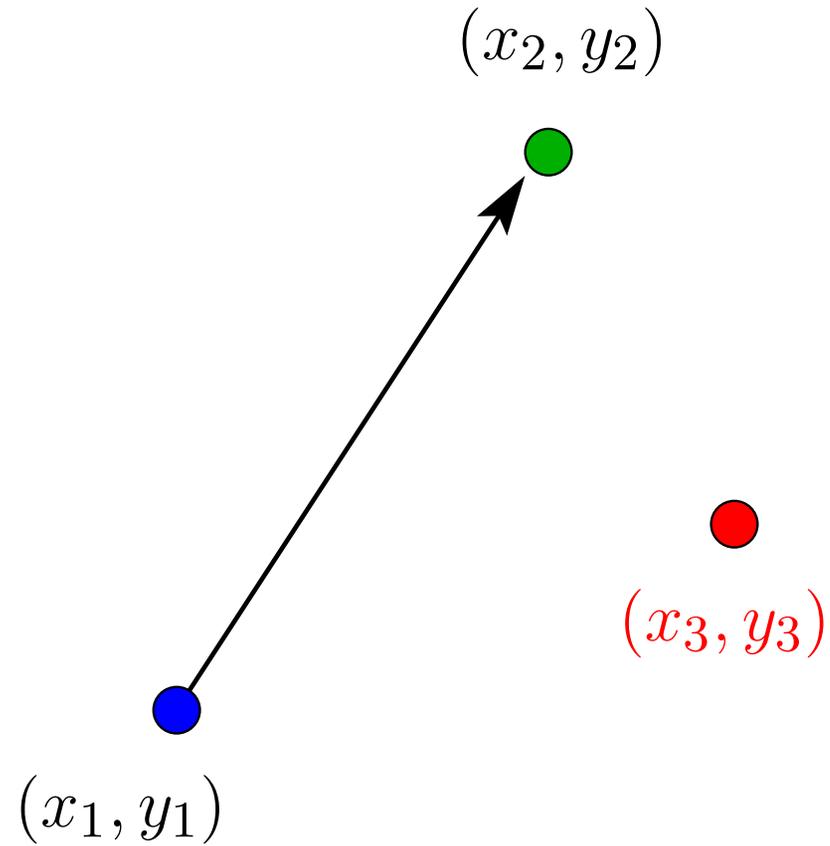
$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Como usar isso para **decidir entre esquerda e direita?**

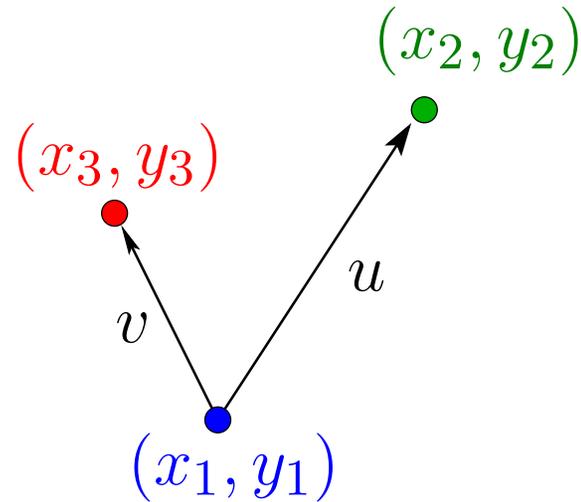
Esquerda e direita



Esquerda e direita

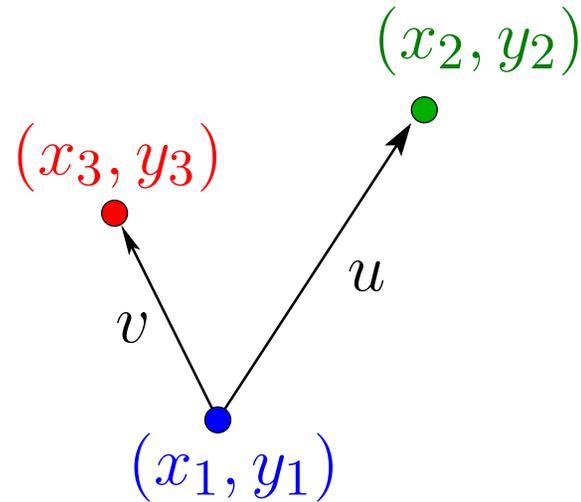


Esquerda e direita



Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

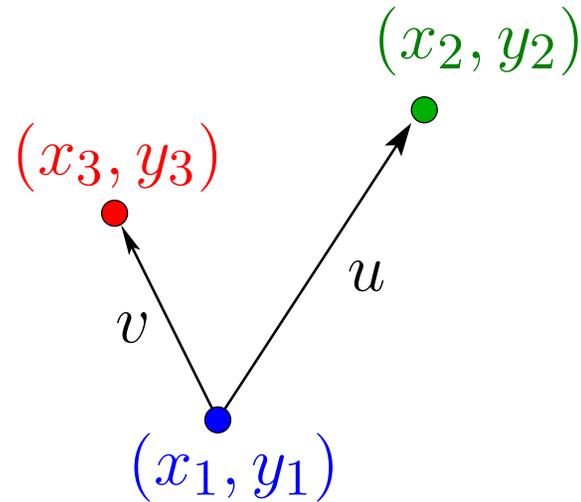
Esquerda e direita



Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

$$u \times v = (0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))$$

Esquerda e direita



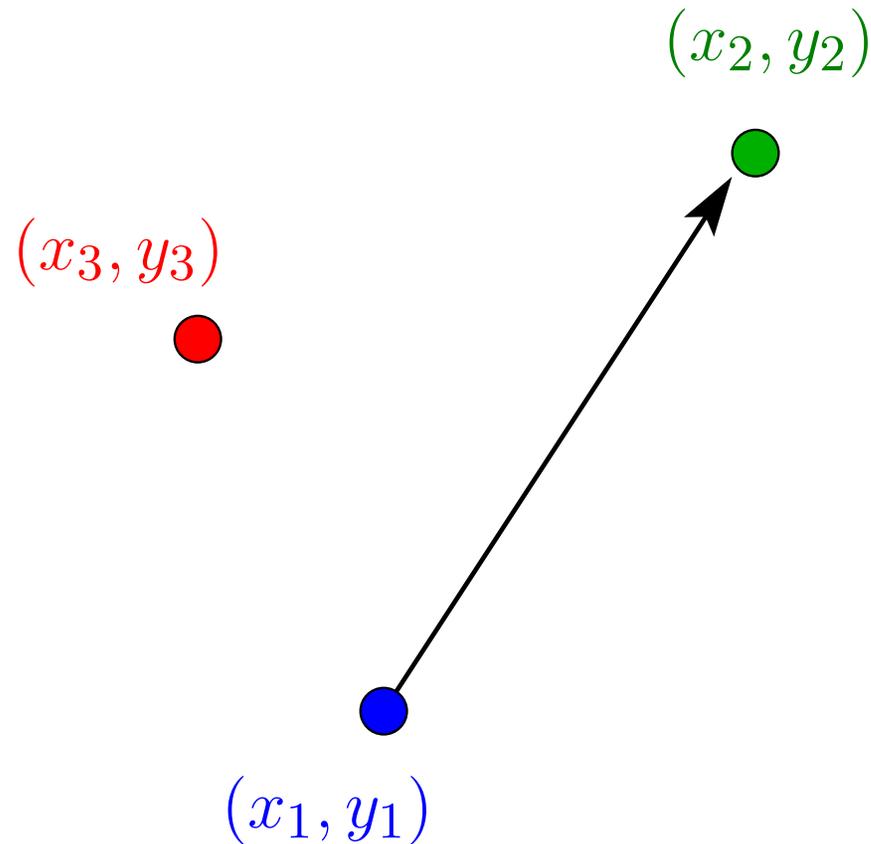
Tomemos $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$.

$$u \times v = (0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))$$

Se $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \geq 0$,
 (x_3, y_3) está à esquerda, senão está à direita.

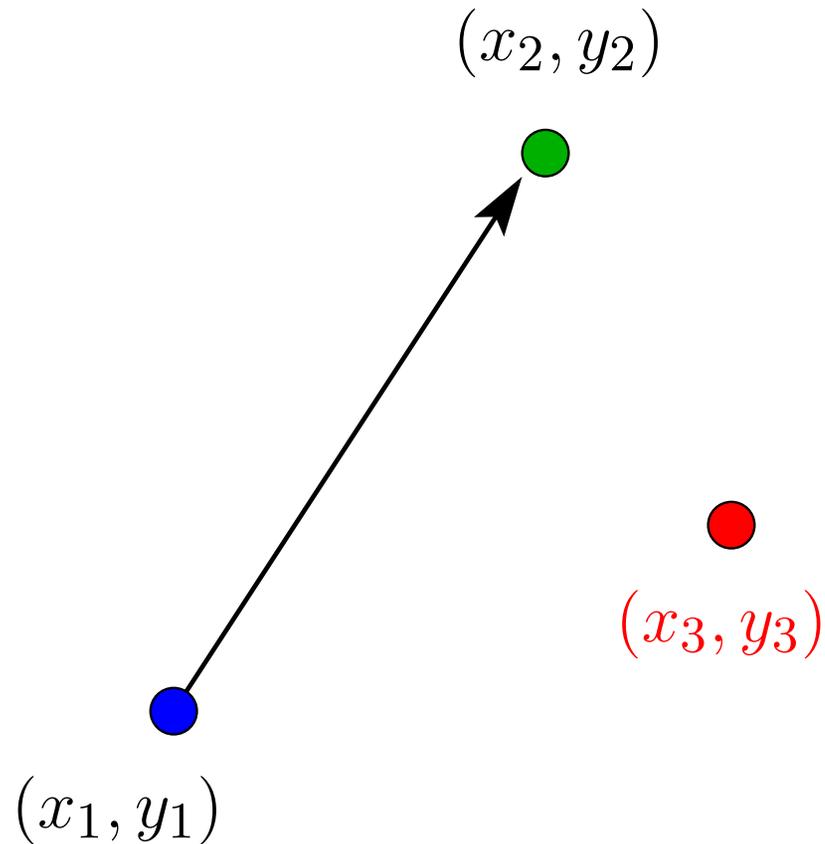
Predicados geométricos

ESQUERDA((x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)) = VERDADE



Predicados geométricos

ESQUERDA($((x_1, y_1), ((x_2, y_2), (x_3, y_3)))$) = FALSO



Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível.

Representação de ponto

Ponto: vetor de dimensão apropriada

Ficar nos inteiros enquanto for possível.

```
#define X 0
#define Y 1
#define DIM 2 /* dimensão do espaço */

/* tipo ponto inteiro */
typedef int tPointi[DIM];

/* tipo ponto real */
typedef double tPointd[DIM];
```

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? **Depende...**

Representação de polígono

Polígono: vetor ou lista ligada de pontos

Qual das duas opções escolher? **Depende...**

Com vetor...

```
/* número máximo de pontos em um polígono */  
#define PMAX 1000  
  
/* tipo polígono de pontos inteiros */  
typedef tPointi tPolygoni[PMAX];  
  
/* tipo polígono de pontos reais */  
typedef tPointd tPolygond[PMAX];
```

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

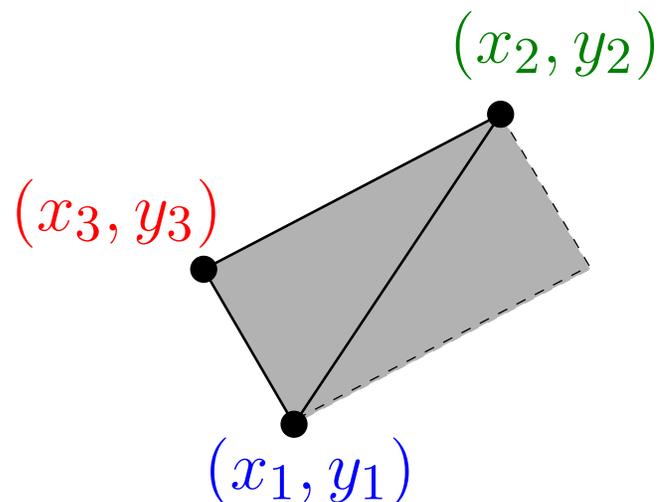
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

Cálculos de área

O valor absoluto do determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

é duas vezes a área do triângulo de extremos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .



Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {  
    return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]  
        -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];  
}
```

Cálculos de área

Triângulo

```
int Area2 (tPointi a, b, c) {  
    return a[X]*b[Y]-a[Y]*b[X]+a[Y]*c[X]  
        -a[X]*c[Y]+b[X]*c[Y]-c[X]*b[Y];  
}
```

Com menos multiplicações e em pseudocódigo:

Área2(a, b, c)

1 devolva $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
 $(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Cálculos de área

Triângulo

Área2(a, b, c)

1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
 $(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Polígono

Cálculos de área

Triângulo

Área2(a, b, c)

1 **devolva** $(a[X] - c[X]) * (b[Y] - c[Y]) -$
 $(a[Y] - c[Y]) * (b[X] - c[X])$

Polígono

ÁreaPolígono2(n, P)

1 $s \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 2$ **faça**
3 $s \leftarrow s +$ Área2($P[0], P[i], P[i + 1]$)
4 **devolva** s

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por \vec{ab}

Esquerda⁺(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) > 0$

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por \vec{ab}

Esquerda⁺(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) > 0$

Ponto c à esquerda ou sobre a reta dada por \vec{ab}

Esquerda(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) \geq 0$

Segmentos e pontos

Ponto c à esquerda da reta dada por \vec{ab}

Esquerda⁺(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) > 0$

Ponto c à esquerda ou sobre a reta dada por \vec{ab}

Esquerda(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) \geq 0$

Pontos a, b e c são colineares

Colinear(a, b, c)

1 devolva $\text{Área2}(a, b, c) = 0$

Interseção de segmentos

Interseção própria entre ab e cd :

a interseção é um único ponto no interior dos segmentos.

IntersectaProp(a, b, c, d)

- 1 **se** **Colinear**(a, b, c) **ou** **Colinear**(a, b, d)
 ou **Colinear**(c, d, a) **ou** **Colinear**(c, d, b)
- 2 **então devolva** **FALSO**
- 3 **devolva** **Xor**(**Esquerda**⁺(a, b, c), **Esquerda**⁺(a, b, d))
 e **Xor**(**Esquerda**⁺(c, d, a), **Esquerda**⁺(c, d, b))

A rotina **Xor** devolve o
ou exclusivo entre duas expressões booleanas.

Interseção de segmentos

Ponto c está no segmento ab

Entre(a, b, c)

1 **se não** **Colinear**(a, b, c)

2 **então devolva** **FALSO**

3 **se** $a[X] \neq b[X]$ $\triangleright ab$ não é vertical

4 **então devolva** $a[X] \leq c[X] \leq b[X]$ **ou** $b[X] \leq c[X] \leq a[X]$

5 **senão devolva** $a[Y] \leq c[Y] \leq b[Y]$ **ou** $b[Y] \leq c[Y] \leq a[Y]$

Interseção de segmentos

Ponto c está no segmento ab

Entre (a, b, c)

- 1 **se não** **Colinear** (a, b, c)
- 2 **então devolva** **FALSO**
- 3 **se** $a[X] \neq b[X]$ $\triangleright ab$ não é vertical
- 4 **então devolva** $a[X] \leq c[X] \leq b[X]$ **ou** $b[X] \leq c[X] \leq a[X]$
- 5 **senão devolva** $a[Y] \leq c[Y] \leq b[Y]$ **ou** $b[Y] \leq c[Y] \leq a[Y]$

Interseção entre ab e cd

Intersecta (a, b, c, d)

- 1 **se** **IntersectaProp** (a, b, c, d)
- 2 **então devolva** **VERDADE**
- 3 **devolva** **Entre** (a, b, c) **ou** **Entre** (a, b, d)
ou **Entre** (c, d, a) **ou** **Entre** (c, d, b)

Dentro ou fora?

Candidata a diagonal $P[i]P[j]$ está no interior do polígono?

Está no cone das arestas vizinhas do polígono?

NoCone(n, P, i, j)

1 $u \leftarrow i - 1 \pmod n$

2 $w \leftarrow i + 1 \pmod n$

3 **se** **Esquerda**($P[u], P[i], P[w]$) $\triangleright P[i]$ é convexo

4 **então devolva** **Esquerda**⁺($P[i], P[j], P[u]$) **e**
Esquerda⁺($P[j], P[i], P[w]$)

5 **senão devolva não** (**Esquerda**($P[i], P[j], P[w]$) **e**
Esquerda($P[j], P[i], P[u]$))

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

QuaseDiagonal(n, P, i, j)

```
1  para  $k \leftarrow 0$  até  $n - 1$   
2     $\ell \leftarrow k + 1 \pmod{n}$   
3    se  $k \neq i$  e  $k \neq j$  e  $\ell \neq i$  e  $\ell \neq j$   
4      então se Intersecta( $P[i], P[j], P[k], P[\ell]$ )  
5        então devolva FALSO  
6  devolva VERDADE
```

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

$\text{QuaseDiagonal}(n, P, i, j)$

```
1  para  $k \leftarrow 0$  até  $n - 1$ 
2     $\ell \leftarrow k + 1 \pmod{n}$ 
3    se  $k \neq i$  e  $k \neq j$  e  $\ell \neq i$  e  $\ell \neq j$ 
4      então se  $\text{Intersecta}(P[i], P[j], P[k], P[\ell])$ 
5        então devolva FALSO
6  devolva VERDADE
```

Diagonal de fato...

$\text{Diagonal}(n, P, i, j)$

```
1  devolva  $\text{NoCone}(n, P, i, j)$  e  $\text{QuaseDiagonal}(n, P, i, j)$ 
```

Teste de diagonal

Quase uma diagonal...

$\text{QuaseDiagonal}(n, P, i, j)$

```
1  para  $k \leftarrow 0$  até  $n - 1$ 
2     $\ell \leftarrow k + 1 \pmod{n}$ 
3    se  $k \neq i$  e  $k \neq j$  e  $\ell \neq i$  e  $\ell \neq j$ 
4      então se  $\text{Intersecta}(P[i], P[j], P[k], P[\ell])$ 
5        então devolva FALSO
6  devolva VERDADE
```

Diagonal de fato...

$\text{Diagonal}(n, P, i, j)$

```
1  devolva  $\text{NoCone}(n, P, i, j)$  e  $\text{QuaseDiagonal}(n, P, i, j)$ 
```

Tempo de execução: $\Theta(n)$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0..n-1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0 \dots n - 1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0..n-1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0..n-1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos
da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0..n-1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos

da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

encontre recursivamente coleções D_1 e D_2

de diagonais que triangulem P_1 e P_2

Um primeiro algoritmo de triangulação

Entrada: polígono $P[0..n-1]$ (vetor de n pontos)

Saída: coleção de diagonais da triangulação
(um par de índices de P descreve cada diagonal)

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos

da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

encontre recursivamente coleções D_1 e D_2

de diagonais que triangulem P_1 e P_2

devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos

da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

encontre recursivamente coleções D_1 e D_2

de diagonais que triangulem P_1 e P_2

devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos

da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

encontre recursivamente coleções D_1 e D_2

de diagonais que triangulem P_1 e P_2

devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Consumo de tempo no pior caso:

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + O(n^3), \text{ onde } n_1 + n_2 = n + 2.$$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Descrição grosseira:

se $n = 3$, devolva o conjunto vazio

se $n > 3$, encontre uma diagonal por força bruta:

para $i \leftarrow 0$ até $n - 3$ faça

para $j \leftarrow i + 2$ até $n - 1$ faça

se **Diagonal**(n, P, i, j) i e j vértices não adjacentes

determine os polígonos P_1 e P_2 obtidos

da partição de P pela diagonal $P[i]P[j]$

encontre recursivamente coleções D_1 e D_2

de diagonais que triangulem P_1 e P_2

devolva $D_1 \cup D_2 \cup \{P[i]P[j]\}$

Consumo de tempo no pior caso:

$$T(n) = T(n - 1) + O(n^3) = O(n^4)$$

Um primeiro algoritmo de triangulação

Triang-n4(n, P)

```
1  se  $n > 3$ 
2    então  $i \leftarrow 0$        $j \leftarrow 2$ 
3      enquanto não Diagonal( $n, P, i, j$ ) faça
4         $j \leftarrow j + 1$ 
5        se  $j = n$ 
6          então  $i \leftarrow i + 1$ 
7             $j \leftarrow i + 2$ 
8        imprima  $\{i, j\}$ 
9         $n_1 \leftarrow j - i + 1$ 
10        $n_2 \leftarrow n - n_1 + 2$ 
11        $P_1[0..n_1 - 1] \leftarrow P[i..j]$ 
12        $P_2[0..n_2 - 1] \leftarrow P[0..i] \cdot P[j..n - 1]$ 
13       Triang-n4( $n_1, P_1$ )
14       Triang-n4( $n_2, P_2$ )
```

Um primeiro algoritmo de triangulação

Triang-n4(n, P)

```
1  se  $n > 3$ 
2    então  $i \leftarrow 0$        $j \leftarrow 2$ 
3          enquanto não Diagonal( $n, P, i, j$ ) faça
4             $j \leftarrow j + 1$ 
5          se  $j = n$ 
6            então  $i \leftarrow i + 1$ 
7               $j \leftarrow i + 2$ 
8          imprima  $\{i, j\}$ 
9           $n_1 \leftarrow j - i + 1$ 
10          $n_2 \leftarrow n - n_1 + 2$ 
11          $P_1[0..n_1 - 1] \leftarrow P[i..j]$ 
12          $P_2[0..n_2 - 1] \leftarrow P[0..i] \cdot P[j..n - 1]$ 
13         Triang-n4( $n_1, P_1$ )
14         Triang-n4( $n_2, P_2$ )
```

Pior caso: $O(n^3)$ chamadas a **Diagonal**

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)

1 $j \leftarrow (i - 1) \bmod n$

2 $k \leftarrow (i + 1) \bmod n$

3 **devolva** Diagonal(n, P, j, k)

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)

- 1 $j \leftarrow (i - 1) \bmod n$
- 2 $k \leftarrow (i + 1) \bmod n$
- 3 **devolva** Diagonal(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P)

- 1 **se** $n > 3$
- 2 **então** $i \leftarrow 0$
- 3 **enquanto não** PontaDeOrelha(n, P, i) **faça**
- 4 $i \leftarrow i + 1$
- 5 **imprima** $\{(i - 1) \bmod n, (i + 1) \bmod n\}$
- 6 $m, P' \leftarrow$ Remove(n, P, i)
- 7 Triang-n3(m, P')

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)

- 1 $j \leftarrow (i - 1) \bmod n$
- 2 $k \leftarrow (i + 1) \bmod n$
- 3 **devolva** Diagonal(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P) \triangleright sem recursão de cauda

- 1 **enquanto** $n > 3$
- 2 $i \leftarrow 0$
- 3 **enquanto não** PontaDeOrelha(n, P, i) **faça**
- 4 $i \leftarrow i + 1$
- 5 **imprima** $\{(i - 1) \bmod n, (i + 1) \bmod n\}$
- 6 $P[i .. n - 2] \leftarrow P[i + 1 .. n - 1]$ \triangleright remove o i
- 7 $n \leftarrow n - 1$

Triangulação em $O(n^3)$: use orelhas!

PontaDeOrelha(n, P, i)

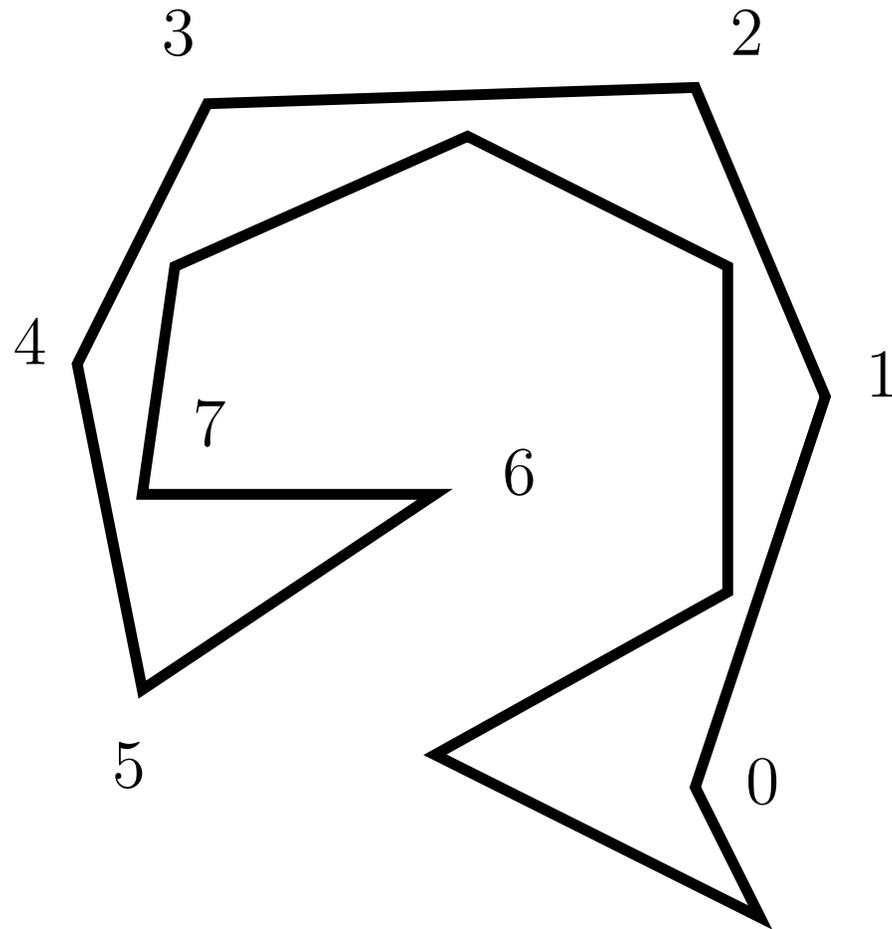
- 1 $j \leftarrow (i - 1) \bmod n$
- 2 $k \leftarrow (i + 1) \bmod n$
- 3 **devolva** **Diagonal**(n, P, j, k)

Triang-n3(n, P) \triangleright sem recursão de cauda

- 1 **enquanto** $n > 3$
- 2 $i \leftarrow 0$
- 3 **enquanto não** **PontaDeOrelha**(n, P, i) **faça**
- 4 $i \leftarrow i + 1$
- 5 **imprima** $\{(i - 1) \bmod n, (i + 1) \bmod n\}$
- 6 $P[i .. n - 2] \leftarrow P[i + 1 .. n - 1]$ \triangleright remove o i
- 7 $n \leftarrow n - 1$

Pior caso: $\Theta(n^2)$ chamadas a **Diagonal**

Exemplo ruim



Triangulação em $O(n^2)$

Triang-n2(n, P)

```
1  MarcaOrelha( $P$ )
2  enquanto  $n > 3$  faça
3       $v_2 \leftarrow P$ 
4      enquanto não orelha[ $v_2$ ] faça
5           $v_2 \leftarrow prox[v_2]$ 
6       $v_1 \leftarrow prev[v_2]$ 
7       $v_3 \leftarrow prox[v_2]$ 
8      imprima {vert[ $v_1$ ], vert[ $v_3$ ]}
9       $prox[v_1] \leftarrow v_3$ 
10      $prev[v_3] \leftarrow v_1$ 
11      $P \leftarrow v_3$ 
12      $n \leftarrow n - 1$ 
13     orelha[ $v_1$ ]  $\leftarrow$  PontaDeOrelha( $P, v_1$ )
14     orelha[ $v_3$ ]  $\leftarrow$  PontaDeOrelha( $P, v_3$ )
```

Triangulação em $O(n^2)$

Triang-n2(n, P)

- 1 **MarcaOrelha**(P)
- 2 **enquanto** $n > 3$ **faça**
- 3 $v_2 \leftarrow P$
- 4 **enquanto não** *orelha*[v_2] **faça**
- 5 $v_2 \leftarrow prox[v_2]$
- 6 $v_1 \leftarrow prev[v_2]$
- 7 $v_3 \leftarrow prox[v_2]$
- 8 **imprima** {*vert*[v_1], *vert*[v_3]}
- 9 $prox[v_1] \leftarrow v_3$
- 10 $prev[v_3] \leftarrow v_1$
- 11 $P \leftarrow v_3$
- 12 $n \leftarrow n - 1$
- 13 *orelha*[v_1] \leftarrow **PontaDeOrelha**(P, v_1)
- 14 *orelha*[v_3] \leftarrow **PontaDeOrelha**(P, v_3)

Pior caso: $\Theta(n)$ chamadas a **Diagonal**.

Orelhas com listas ligadas

PontaDeOrelha(P, v)

1 $u \leftarrow prev[v]$

2 $w \leftarrow prox[v]$

3 **devolva** Diagonal(P, u, w)

Orelhas com listas ligadas

PontaDeOrelha(P, v)

- 1 $u \leftarrow prev[v]$
- 2 $w \leftarrow prox[v]$
- 3 **devolva** Diagonal(P, u, w)

MarcaOrelha(P)

- 1 $v \leftarrow P$
- 2 **repita**
- 3 $u \leftarrow prev[v]$
- 4 $w \leftarrow prox[v]$
- 5 $orelha[v] \leftarrow$ Diagonal(P, u, w)
- 6 $v \leftarrow w$
- 7 **até que** $v = P$

Orelhas com listas ligadas

PontaDeOrelha(P, v)

- 1 $u \leftarrow prev[v]$
- 2 $w \leftarrow prox[v]$
- 3 **devolva** Diagonal(P, u, w)

MarcaOrelha(P)

- 1 $v \leftarrow P$
- 2 **repita**
- 3 $u \leftarrow prev[v]$
- 4 $w \leftarrow prox[v]$
- 5 $orelha[v] \leftarrow$ Diagonal(P, u, w)
- 6 $v \leftarrow w$
- 7 **até que** $v = P$

Diagonal também teria que ser reescrita para listas ligadas.

Exercícios

1. É verdade que um vértice de um polígono ou é ponta de orelha ou existe uma diagonal do polígono com extremo nele?
2. Qual é a relação da pergunta anterior com o consumo de tempo do algoritmo `Triang-n4`?
3. Escreva um algoritmo `PertenceConvexo`(P, n, q) que decide se um ponto q pertence ou não ao polígono convexo P , dado no vetor $P[0..n-1]$. **Dica:** Use a rotina `ÁREA2`.
4. A ideia do algoritmo do exercício anterior funciona também caso o polígono P não seja convexo? Elabore sobre isso.